EL USO DE LAS GRÁFICAS PARA RESIGNIFICAR ELEMENTOS DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Gabriela Buendía Abalos
CICATA-IPN
buendiag@hotmail.com

Resumen
Discutimos el estatus epistemológico del uso de las gráficas para la enseñanza de diferentes aspectos de las ecuaciones diferenciales lineales bajo la perspectiva socioepistemológica. La graficación se presenta como una práctica institucional y en su desarrollo, los diferentes funcionamientos y formas que presenta una gráfica permiten reconstruir significados de las ecuaciones diferenciales. Se presentan los primeros resultados de una exploración con profesores de matemáticas que permite analizar el uso de las gráficas al resolver un problema de un texto escolar.
Palabras clave: *uso de gráficas, ecuaciones diferenciales, socioepistemología*

Introducción

Las gráficas y su papel en la enseñanza de las matemáticas es un tópico que desde diferentes perspectivas genera interés en la matemática educativa. El objetivo de esta investigación es discutir el estatus epistemológico del uso de las gráficas para la enseñanza de diferentes aspectos de las ecuaciones diferenciales lineales y lo haremos bajo la perspectiva socioepistemológica bajo la cual, la graficación se propone como una práctica institucional. En el desarrollo intencional de esta práctica dentro del sistema educativo, las gráficas se muestran capaces de sostener el desarrollo del razonamiento y de la argumentación en diversas situaciones de uso, resultan ser productos de la experiencia histórica de comunidades y grupos sociales y, normado por lo institucional, permanecen en el sistema educativo continuamente transformándose y transformándolo a su vez (Cordero, 2008; Cordero, Cen y Suárez, 2010).

Esta investigación retoma estudios donde se hace uso de las gráficas para tratar con tópicos como los comportamientos tendenciales de las gráficas solución y el papel de las condiciones iniciales en las ecuaciones diferenciales lineales. Con estos antecedentes, se plantea una exploración del papel de las gráficas en la resolución de un problema de libro de texto. Se presentan aquí algunos resultados. En su conjunto, buscamos discutir a la graficación como una práctica que permite darle significados a diversos aspectos de las ecuaciones diferenciales.

Aspectos teóricos

Las gráficas se usan de diferentes maneras. Cordero (2008) propone analizar este uso a través de los diferentes *funcionamientos y formas* que las gráficas toman, dependiente siempre de la situación particular en la que se presentan. Por funcionamiento, se reconoce la variedad de tareas que le corresponde realizar a una gráfica cuando se analiza qué se presenta a través de ella, de qué informa, para qué está presente. Ello ocurre de manera entrelazada con las diferentes formas de las gráficas las cuales consideran tanto la apariencia perceptible de la misma como el hacer del individuo sobre ella cuando, por ejemplo, se *lee* información sobre ella o se *ve* alguna familia de curvas. Así, la mirada sobre las gráficas se desplaza desde el objeto matemático *gráfica* representativo de una función, hacia su naturaleza como un objeto temporal y evolutivo en un espacio de interacciones entre el estudiante, el docente y la matemática puesta en juego ante una situación específica (Carrasco, 2010).

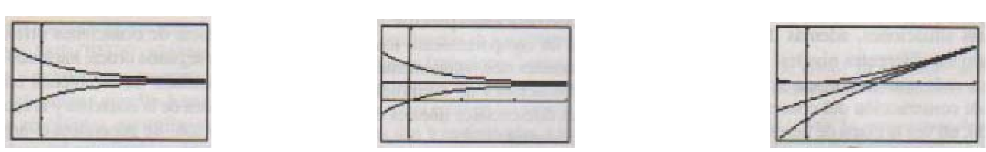
El uso de las gráficas tiene un desarrollo pues los funcionamientos y formas identificadas en una situación se reorganizan para dar lugar a otros, lo cual genera una relación dialéctica con la situación misma; ésta se puede desarrollar gracias a cierto uso de las gráficas y a su vez, la situación favorece que se desarrollen el uso de las gráficas. Ello permite entonces que al analizar el papel de las gráficas en la construcción de conocimiento matemático, se puedan considerar aspectos como distintos paradigmas en el aprendizaje de la función y de diversos tópicos matemáticos abordables a través de las gráficas, o el papel de las herramientas y el carácter situado de la construcción del conocimiento matemático, relativo a diferentes comunidades escolares. Al reconocer que el uso de las gráficas se desarrolla en el ejercicio intencional e institucional de la práctica de graficación, esta práctica resulta ser el referente de necesidades sociales, de origen pragmático o reflexivo, en un momento y lugar determinados dentro del discurso matemático escolar.

Así, el uso de las gráficas se presenta como un constructo teórico que reconoce la naturaleza social de la construcción del saber matemático. No se asume la adquisición del objeto gráfica por sus partes, ni las gráficas resultan ser la re-presentación (en el sentido de volver a presentar) ya sea de la propia ecuación diferencial o de sus soluciones. Las gráficas son un medio que permite explorar la naturaleza no sólo de la función solución sino de la ecuación diferencial (Cantoral, Farfán, Lezama, Martínez-Sierra, 2006).

Antecedentes

Con relación a la estabilidad en las ecuaciones diferenciales, Cordero (1998) y Solís (2009) han trabajado actividades en las que el estudiante aprende a reconocer patrones de comportamientos gráficos, a buscar tendencias en los comportamientos y a establecer relaciones entre funciones de tal manera que aparezcan nociones de tendencia.

En dichas investigaciones, la forma de la gráfica –*forma* entendida como característica ostensible del dibujo- permite reconocer patrones de comportamientos gráficos y analíticos, mediante procedimientos tales como la variación de parámetros. Así, la gráfica 1*a* correspondería al conjunto solución de una ecuación diferencial del tipo $y'(x)+ y(x) = 0$; nótese cómo sus soluciones tienden a $F(x) = 0$. La gráfica de las soluciones 2*b*, correspondería a $y'(x)+ y(x) = k$ y la gráfica de la familia 1*c*, a la ecuación diferencial $y'(x)+ y(x) = x$



a *b* *c*

Figura 1. Comportamiento tendencial de y(x)

La búsqueda del comportamiento tendencial que tienen las soluciones $y(x)$ para una ecuación diferencial del tipo y' + y = F(x) es del tipo *"la gráfica de y tiende a parecerse a la gráfica de F"*. Son argumentos gráficos que los estudiantes van desarrollando cuando grafican y analizan diferentes casos para $F(x)$, argumentos que el comportamiento observable de las gráficas puede sostener. Entonces, lo que el alumno lee de la gráfica y cómo ésta funciona al representar una familia solución, favorece que la ecuación diferencial sea una instrucción que organiza comportamientos y no sólo una expresión analítica que hay que resolver y graficar.

Sobre estos patrones que presentan las familias solución de una ecuación diferencial, es factible construir significados de las condiciones iniciales y de la relación entre el número de condiciones iniciales y el orden de la ecuación. Buendía y García (2002) realizaron un análisis respecto al papel que juegan las condiciones iniciales para determinar gráficamente una solución única para la ecuación diferencial lineal en cuestión.

Parten de la ecuación diferencial de primer orden $y' + y = x$, cuya familia de soluciones está conformada por curvas que no se cruzan entre sí. Entonces, para determinar una solución particular, es suficiente con una única condición inicial que nos indica por cuál punto (par ordenado) pasa la curva que representa la solución buscada. En cambio, las curvas solución de una ecuación diferencial de segundo orden, como $y'' + y' + y = x$, tienen un comportamiento como el de la figura 2.

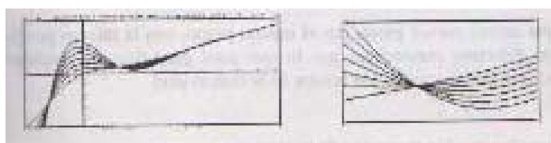


Figura 2. Curvas solución que se intersectan en un punto o en varios puntos

Así que para seleccionar una única curva solución, no es suficiente señalar un punto por donde pasa la curva, puesto que por ese punto podría pasar más de una; la pendiente de la recta tangente a las curvas en el punto donde se intersectan, sirve para poder determinar a cuál curva nos estamos refiriendo. Por esto, las condiciones iniciales para obtener una única solución deben ser del tipo $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$. De alguna manera, la primer condición se refiere a "por dónde pasa la curva" , y la segunda a "cómo pasa por ese punto".

Finalmente, los autores presentan una ilustración de la familia solución para ecuaciones de tercer orden (figura 3), como $y''' + y'' + y' + y = x$. En este caso es factible encontrar curvas que pasan por el mismo punto, con la misma pendiente en la tangente en ese punto, pero con diferente concavidad, por lo que para garantizar la unicidad de la solución es necesaria una tercera condición acerca de la concavidad.

Figura 3. Comportamiento de las curvas solución de una ecuación diferencial de tercer orden

La forma de la gráfica, vista en primera instancia localmente en el punto (x_0, y_0) permite distinguir cuándo será necesaria una, dos o tres condiciones para seleccionar una única curva solución de la ecuación diferencial. Si por ese punto, no pasa más que una curva, entonces será necesaria una única condición inicial. Sin embargo, si pasan más, será necesario una distinción adicional que podrá ser la pendiente de la recta tangente para el caso de curvas provenientes de una ecuación de segundo orden o bien alguna condición relativa a la concavidad, para las de tercer orden. Los tópicos matemáticos de *pendiente de la recta tangente* o *concavidad*, como aplicaciones de la derivada se están a su vez re-significando para que tenga sentido la relación entre el número de condiciones iniciales y el orden la ecuación diferencial.

Las gráficas son capaces de sostener el argumento relativo a dicha relación, haciendo que los alumnos *lean* en ellas condiciones del tipo $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, $y''(x_0) = y''_0$.

La investigación

Los antecedentes que hemos mostrado respecto al uso de las gráficas en algunos tópicos de las ecuaciones diferenciales, nos permiten proponer a las gráficas como un medio que permita explorar la naturaleza no sólo de la función solución sino de la propia ecuación diferencial. La graficación entonces se presentaría como una práctica que vive en la escuela y que de manera implícita, no siempre intencional, sí favorece el uso de las gráficas para darle significado al conocimiento matemático. De ahí que se hable de *resignificar* diversos elementos de las ecuaciones diferenciales, significados que son producto del hacer del alumno al graficar.

Aspectos metodológicos

Para llevar a cabo esta primera etapa de la investigación y poder evidenciar el papel de las gráficas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales, realizamos lo siguiente. Se seleccionó el "Problema de la Memorización" (Blanchard, Devaney y Hall, 1999) de un libro de texto de ecuaciones diferenciales que tiene una orientación declarada por sus mismos autores hacia promover los análisis cualitativos de las ecuaciones diferenciales. Una de las preguntas que se proponen en la estructura de dicho problema es la siguiente:

> Ahora suponga que dos estudiantes memorizan listas de acuerdo con el mismo modelo: $\frac{dL}{dt} = 2(1 - L)$. Si uno de los estudiantes aprende la mitad de la lista en el tiempo t = 0 y el otro no memoriza nada de ella, ¿qué estudiante está aprendiendo más rápidamente en este instante? ¿Alcanzará el estudiante que comienza sin saber nada de la lista al estudiante que empieza sabiendo la mitad de la lista? (Blanchard et al., p. 15).

La razón de esta selección es que esta pregunta no puede ser respondida resolviendo la ecuación diferencial dada. Esto es, obtener la función $L(t)$ en realidad no responde lo que se pide, a menos que se manipule, derivando por ejemplo, la función obtenida. Así, la pregunta invita a abordarla de alguna otra manera.

La primera puesta en escena que realizamos, se llevó a cabo durante un Seminario-Taller en la XII Escuela de Invierno, espacio al que asistieron profesores de matemáticas principalmente de nivel superior y estuvo dirigido por la investigadora. En un primer momento, el problema fue trabajado de manera individual por los profesores, después lo comentaron con los compañeros que tenían cerca y finalmente, se llevó a cabo una discusión grupal. Para los fines de esta investigación, las producciones escritas individuales es lo que se analiza y se presenta aquí. Se recopilaron las respuestas escritas de los profesores que voluntariamente quisieron entregarlas a la investigadora.

Primeros resultados

De manera casi natural, los profesores intentan dar su respuesta resolviendo primero la ecuación diferencial pues es finalmente, parte de lo que siempre se hace cuando se presenta un problema de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, la respuesta que se obtiene es una función $L(t)$ que, a menos que se vuelva a derivar, no ayuda a dar respuesta a lo solicitado y así, uno de los profesores reconoce que *quién sabe para qué la resolvió* (figura 4).

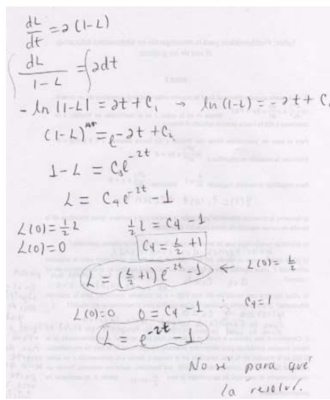


Figura 4. No sé para qué la resolví

Al ver que el sentir del grupo era similar, se solicitó explorar otras posibilidades de solución. Dado que era un grupo de profesores mayoritariamente de nivel superior, empezaron a surgir análisis de tipo cualitativo. En la figura 5, se muestra la respuesta de otro profesor en la que el cociente dL/dt es usado como la parte de la ecuación diferencial que ya está hablando de la rapidez de aprendizaje, así que sólo sustituye en la ecuación diferencial original los valores de ½ y 0. Esto le permite hallar que cuando L= 0, el estudiante está aprendiendo más rápido.

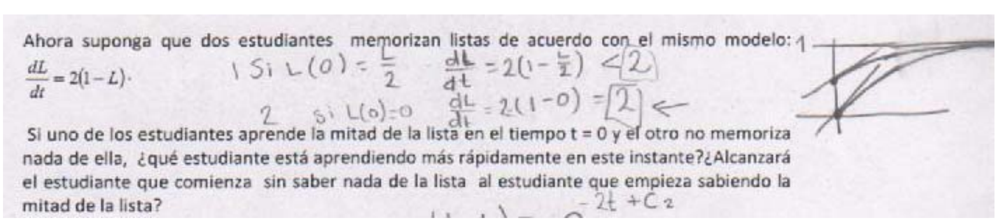


Figura 5. Dando significado al cociente

Por otra parte, el mismo profesor esboza el comportamiento de las soluciones (figura 5) y situado en el momento de análisis deseado (t=0), dibuja rectas tangentes. Esto parece indicar que la pendiente de la tangente funciona como un argumento gráfico que habla acera de la rapidez de aprendizaje en ese momento.

Mostramos una respuesta más de un tercer profesor (figura 6). En ella, nuevamente surge el intento infructuoso por resolver analíticamente la ecuación. Después, sobre el esbozo gráfico, el profesor señala con mayor énfasis las pendientes de las rectas tangentes en $t = 0$ y eso se vuelve explícitamente el argumento para responder que "*el que empieza en 0 aprende + rápido*"

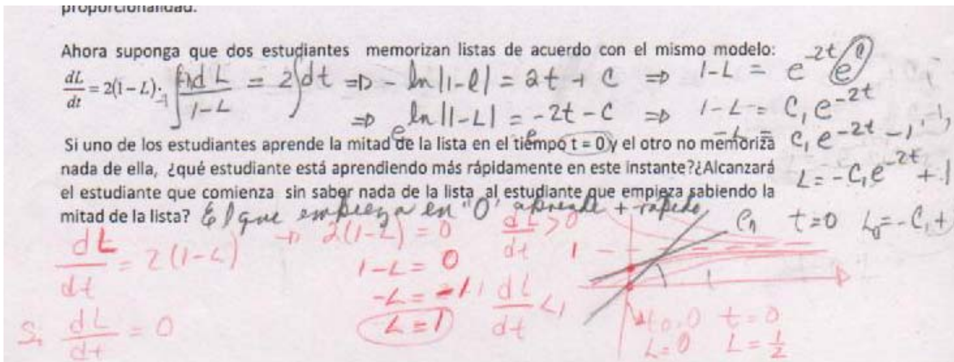


Figura 6. El que empieza en 0 aprende + rápido

En estas ilustraciones, podemos ver que el comportamiento de las gráficas solución ayuda a dar respuesta a la velocidad del aprendizaje; la pendiente de la recta tangente se vuelve una herramienta que le da un significado a la velocidad de aprendizaje. Eso es lo que el profesor puede leer de la gráfica, es su forma de usar la gráfica. Así, en esta situación, las gráficas funcionan a partir de análisis cualitativos para darle significado a la ecuación diferencial como una razón de cambio.

Reflexión final

La propuesta socioepistemológica tiene como fin la reorganización de la matemática escolar y para ello, le apuesta a reconocer la naturaleza social del conocimiento matemático a través de las prácticas sociales involucradas en su construcción. Consideramos que los marcos de referencia para analizar las gráficas y sus problemas de enseñanza-aprendizaje que la consideren únicamente como la representación de un objeto pre-existente, no son suficientes.

El uso de las gráficas en situaciones como las presentadas, permite dar cuenta de cómo los significados relativos a diversos aspectos de las ecuaciones diferenciales, se resignifican. Así, la categoría epistemológica *uso* no se refiere únicamente al aspecto cognitivo involucrado en lograr la aprehensión del objeto ecuación diferencial mediante el tránsito entre representaciones o incluso en su tratamiento al seno de la representación gráfica; más bien, la graficación se muestra como una práctica institucional que hace de las gráficas en la enseñanza de las ecuaciones diferenciales un reflejo de realidades cotidianas, construcción de significados y el desarrollo de argumentos.

A la luz del discurso matemático escolar, son las diferentes tareas y tipos de tareas las que en su evolución, favorecen el desarrollo del uso de las gráficas mejorando su ejecución, por ejemplo, pero también resignificando a través de ellas diferentes tópicos relacionados con el saber matemático.

Con este tipo de estudios entonces, la propuesta educativa sería hacia la generación de ambientes de trabajo gráfico en los que la gráfica no sea un objeto matemático a obtener, sino una herramienta de trabajo capaz de sostener argumentaciones, portando significados a la luz de prácticas situadas socioculturalmente.

Referencias

Blanchard, P.,Devaney, R.,Hall, G. (1999). *Ecuaciones diferenciales.* México: Thomson Editores.

Buendía, G. y García, C. (2002). Un análisis del significado de las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales. En C. Crespo (ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 15, pp. 108-113). Chile: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R. Farfán, RM., Lezama, J., Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial, 83-102

Carrasco, E. (2010). *Lo social en ambientes gráficos*. Presentación en el Grupo Matemática Educativa en el Nivel Superior (Mens). Pontificia Universidad Católica de Valparaiso.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama, A. Romo (eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. (pp. 285-309) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. y Díaz de Santos S.A.

Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13(2), 187-214

Solís, M. (2009) El comportamiento tendencial de las funciones en la resignificación de las ecuaciones diferenciales lineales: la relación entre predicción y simulación. En P. Lestón (ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 22 pp.779-786). México: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.