

## GEOMETRIZACIÓN DEL ESPACIO REAL

Alberto Camacho Ríos, Bertha Ivonne Sánchez Luján, Ricardo Blanco Vega  
Instituto Tecnológico de Chihuahua II, Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez

[camachoalberto@hotmail.com](mailto:camachoalberto@hotmail.com), [ivonne\\_mx\\_2000@yahoo.com](mailto:ivonne_mx_2000@yahoo.com),  
[ricardo.blanco@itchihuahuaaii.edu.mx](mailto:ricardo.blanco@itchihuahuaaii.edu.mx)

*A la memoria de Juan Mena Hernández*

### Resumen

Se presenta la *geometrización* de un terreno o *espacio real*, levantado a finales del siglo XVIII con un grafómetro y cordel. El levantamiento topográfico es visto como una *práctica de referencia* en el marco de la aproximación teórica conocida como socioepistemología, en tanto la geometrización es la *práctica social* asociada. Los resultados establecen la matematización y transposición del espacio real en un *micro-espacio*, así como los conocimientos matemáticos que destacan de la actividad.

**Palabras clave:** *Práctica de referencia, geometrización, grafómetro, espacio real*

« (...) muchos autores informan que los egipcios fueron los inventores de la geometría, que nació de la medida de los campos, necesaria debido a las crecidas del Nilo que borraban el límite entre las propiedades. Por lo demás, no ha de asombrar que haya sido una exigencia práctica la determinante de la invención de esa ciencia (...)»

Tomado de *Los comentarios al libro I de los Elementos de Euclides* de Proclo.

### Introducción

Por si misma, la Topografía como objeto de estudio ha sido poco investigada, dejándola al margen de las matemáticas y de las tradiciones propiamente técnicas. La particularidad de la Topografía es que asocia los pensamientos geométrico y trigonométrico con una *técnica*, que le sirven de objeto para *geometrizarse* la realidad inmediata a través de diferentes prácticas, como son los levantamientos topográficos, nivelaciones, observaciones astronómicas etc. De hecho, la geometrización es un tipo de matematización elemental que se acciona durante los levantamientos con el fin de controlar las mediciones angular y lineal de superficies de terrenos, así como, posterior a ello, durante el diseño de la planta topográfica correspondiente.

En lo que sigue se hará referencia de la extensión de los terrenos con la frase de *espacio real*, ello debido a su carácter fundamental de poseer las tres dimensiones espaciales y contar con una medida superficial que les delimita, así como con la finalidad de distinguirlos del que se conoce como *espacio matemático* o espacio euclídeo. En este sentido, se puede decir que la geometrización transforma el espacio real de los terrenos en

*micro-espacios* geométricos elementales que les aproximan, siendo estos últimos modelos a escala de los primeros.

Desde el punto de vista de la asociación de conocimientos matemáticos con diferentes técnicas, la Topografía puede verse como definidora de *Prácticas de Referencia* (PR) de las que se han desprendido nuevos conocimientos matemáticos. En sí mismo, el conocimiento matemático se admite como una *unidad* o síntesis de la acumulación de conocimientos generados por diferentes PR, los cuales tienen por límite al *saber* o conocimiento matemático teórico (De Gortari, 1988, pp. 388 a 391).

Si bien las PR generan nuevos conocimientos, entre estos últimos y las primeras se colocan las *prácticas sociales* (PS). En sí, estas últimas son actividades que orientan la interacción del conocimiento al centro de las PR, dando sentido a los procesos de matematización del espacio real, en el cual intervienen una buena cantidad de nociones y procedimientos matemáticos (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006, p. 90).

Por lo general, las PS son descritas en forma de argumentaciones de la matemática las cuales posteriormente devienen al salón de clase. Así por ejemplo, y en un contexto restringido de la noción de espacio, la geometrización del *espacio matemático* fue una PR que desarrollaron geómetras y analistas como Newton, Leibniz y Euler, entre otros. La actividad consistía en eliminar una o más de sus *determinaciones*. Por determinaciones se referían a la medida finita de las longitudes del espacio matemático, es decir, el *largo*, *ancho* y *la profundidad*, de manera que al eliminar una de ellas la parte correspondiente se *perdiera* al infinito. En la siguiente etapa se hacía una reformulación o *síntesis de conocimientos* en la que se contrastaba al infinito con el cero, de la que se desprendía una primera *proposición sintética*. En el caso de Newton la proposición que resultó de esa práctica fue definida como: «Todo (espacio) que es capaz de aumentar y disminuir es descrito con movimiento continuo» (Camacho, 2005, p. 4).

Puede observarse que la actividad normativa que rige esta última actividad es una PS inducida por argumentos variacionales que llevan a la construcción del *concepto de límite infinito*, de la que se desprende una primera proposición o discurso matemático. Este discurso es la parte inicial que orientó la construcción de los *Principia* newtonianos y sería posteriormente ordenado en forma de discurso matemático escolar por Bails (1789, pp. 313-314) y otros autores de obras elementales, acomodándolo de la siguiente manera: «La extensión infinita es un espacio geométrico que tiene por límite al infinito».

A partir de lo anterior, el presente escrito es subordinado a la aproximación teórica conocida como Socioepistemología (SE), la cual es articulada por las siguientes acciones:

1. «El foco del análisis es puesto (...) en la práctica social» y en el cómo la función normativa de esta última hace su aparición en forma de discurso matemático, para,
2. enseguida, presentarse como una forma de discurso matemático escolar (Cantoral, et al, 2006, p. 90).

Hay que destacar que para el caso de la Topografía, las PR y las PS son sujetas a los instrumentos de uso para efecto de la matematización. Así, en los levantamientos topográficos que se plantean se hace alusión a la *dioptra*, al *grafómetro* y al teodolito. De esta forma, por la incertidumbre de la poca precisión que los instrumentos aportaban, así como por las limitaciones de las técnicas de observación, tales prácticas causaban

*pequeños* errores que falseaban la geometrización final del (o los) terreno(s). Ante ese problema, geómetras que vivieron entre los siglos XVII al XIX, fue el caso de Euler, Mayer, Gauss, Bessel, Díaz Covarrubias, etc., juzgaron necesario asumir dichos errores a *tolerancias* que previamente se podían especificar y cuyo establecimiento estuvo en función, como ya se mencionó, tanto de los instrumentos como de los tipos de levantamientos que había que desarrollar.

Vista así, la tolerancia especificada hizo la diferencia entre los conocimientos matemáticos que se construyeron a partir de las prácticas de topografía y los conocimientos matemáticos ideales contenidos, en un primer momento, en los Elementos de Euclides. En épocas de mayor contribución a la construcción de conocimiento matemático, la tolerancia fue de la mano con el *conocimiento aproximado*, ampliamente discutido por Bachelard (1928) y, además, como consecuencia, asociado a los desarrollos en serie de MacLaurin en el contexto de las funciones analíticas.

A partir de lo anterior, y como una cuestión metodológica que se asume al estudio, se parte de que los cambios tecnológicos sufridos por los instrumentos, llevaron a la vez a cambiar las técnicas y prácticas de observación y medición, dando lugar a transformaciones de las PS asociadas a las PR, lo cual tuvo por consecuencia la determinación de nuevos conocimientos matemáticos.

Ante esto último se plantean para el estudio los siguientes objetivos:

1. Describir las particularidades de algunos de los conocimientos matemáticos producidos con la Topografía, a través de ciertos problemas específicos desarrollados a lo largo de la historia. En sí se plantean los siguientes casos:
  - 1.1 La transición que sufrió la *dioptra* hasta asemejarse con el *grafómetro*, ambos instrumentos de medición y observación, así como las técnicas y conocimientos que de ello derivaron. Etapa que inicia en el siglo III a. C., atraviesa el siglo XVI y concluye a finales del siglo XIX, caracterizada por una aproximación restringida en las mediciones angulares y lineales. Esta parte comprende la simulación del levantamiento topográfico de un polígono cerrado, medido a finales del siglo XVIII con un grafómetro para los ángulos y un cordel para las longitudes. El levantamiento se caracteriza por una aproximación restringida en la parte lineal de la medición.
  - 1.2 La construcción del teodolito común a mediados del siglo XVII, a partir de la invención del *nonio* en 1592. En esta etapa interesa analizar los cambios en los métodos de cálculo para la geometrización de polígonos cerrados, así como la precisión que con ello se lograba.
  - 1.3 El *método de repetición* ideado por T. Mayer, a finales del siglo XVIII, para la medición de ángulos horizontales, ampliamente utilizado por Gauss en los métodos de *triangulación* desarrollados en los levantamientos topográficos de la ciudad de Hannover, gracias a la innovación que hizo Reichenbach al teodolito común, construyendo el que se conoce como *teodolito repetidor*, y con el cual se logró estimar los ángulos horizontales con una aproximación de hasta  $10''$ .
  - 1.4 Para el caso que se analiza, interesa establecer el micro-espacio correspondiente y dejar ver las diferencias entre este último y el espacio real del terreno.

Lo anterior a partir de tomar como eje central de trabajo a la geometrización.

Por la amplitud de los objetivos que se plantean, en este documento solamente se ofrecen resultados y algunas conclusiones del rubro 1.1.

### Estado del arte

Cantoral et al (2006, p. 90) han considerado al teorema del binomio de Newton (TBN) como el objeto matemático que llevó a ingenieros del siglo XVIII a «predecir el comportamiento de lo que fluye (...) calor, el movimiento, flujos eléctricos». En este caso las PR asociadas son prácticas de ingeniería cuya PS normativa es la *predicción* relacionada con una buena cantidad de argumentos matemáticos de naturaleza variacional.

Por su lado, Montiel (2008) hizo una revisión socioepistemológica de las funciones trigonométricas desde su definición a través de la *matematización* de la astronomía expuesta en el *Almagesto* de Ptolomeo. La autora sugiere la *anticipación* como PS vinculada con la *matematización*, de modo que el modelo matemático que con ello se puede construir es de naturaleza geométrica elemental.

En el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), Chevallard (2006) ha posibilitado las *praxeologías* como *organizaciones matemáticas* que son colocadas en escenarios escolares, a través de la resolución de problemas  $T$  que se adecuan a técnicas  $\tau$ . El bloque  $[T, \tau]$  se concibe como *práctico-técnico* y, desde la perspectiva del presente estudio, su conjunción lleva a los sujetos a PS en forma de argumentaciones matemáticas que dan para la solución de las tareas  $T$ .

Finalmente, en Camacho y Sánchez (2010), se coloca como resultado de investigación a la noción de *variabilidad*. Esta última surgió de sistemas de PR vinculadas con actividades de ingeniería que se asocian con modelos de aproximación incorporados en el dominio de las funciones analíticas.

### Geometría Práctica

En la actualidad se pudiera preguntar a un topógrafo sobre qué hace la precisión en los levantamientos topográficos. Él puede asumir, de entre las respuestas que pudiera dar, el *orden* de importancia que tienen los levantamientos. Dependiendo de su importancia, estos se clasifican en: De *primer orden*, *segundo orden* y *tercer orden*. Por lo general los de tercer orden involucran teodolitos cuya aproximación angular no rebasa el minuto y se acompañan de estadales para la determinación de las distancias; en tanto los de primer orden suelen ser desarrollados con teodolitos de aproximación angular de hasta centésimos de segundo, asociando a la parte lineal cintas métricas o distanciómetros electrónicos.

En la misma dirección se puede exigir al topógrafo echar mano de las precauciones necesarias en la *toma* de datos para asegurar la *justeza* de la medición. No obstante, los errores *accidentales* y *sistemáticos* (por ejemplo, dar una tensión superior a la que soporta la cinta métrica, lo cual provoca un error en la medición lineal), que se relacionan con los

instrumentos, inevitablemente aparecen en los cierres angular y lineal de los polígonos levantados.

### ***La dioptra y su evolución***

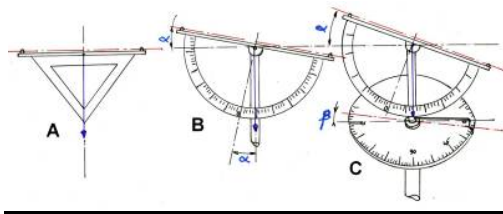
Durante el primer tercio del siglo XVI, en la *Geometría Práctica*, como se conocía a la Topografía desde la época de los antiguos griegos, uno de los instrumentos de observación de más uso fue el *grafómetro*. Este último es el antecedente inmediato del teodolito común<sup>19</sup> y a su vez se puede decir que es una consecuencia de la evolución tecnológica de la *dioptra*, ampliamente utilizada por los griegos y romanos en los levantamientos topográficos. La Figura 1 muestra tres procesos de evolución que tuvo ese instrumento hasta asemejarse al grafómetro diseñado por el francés Danfrie (1597), (véase la Figura 3).

La dioptra, que aparece en la imagen A, era un instrumento sencillo constituido por un triángulo isósceles cuya base servía de *alidada*. Por lo general la alidada es una regla fija o móvil que tiene en cada extremo una pínula en las cuales están practicados sendos agujeros, pequeños, que sirven para dirigir visuales. La punta del triángulo, unión de los lados iguales, se colocaba en su base y servía para sujetar el hilo de la plomada. Luego que la base del instrumento se *centraba* sobre algún vértice del terreno, la observación a través de la alidada resultaba de posicionarla horizontalmente.

No obstante, el modelo del triángulo isósceles se intercambiaba más comúnmente por otro cuadrangular como el que se muestra en la Figura 2. De igual forma, la base opuesta a la graduación servía de alidada, siendo que el movimiento angular iniciaba en alguno de los vértices no graduados del cuadrado.

La primera evolución, dada por Herón de Alejandría, unos 130 años a. C., fue la de reemplazar el triángulo y cuadrado por un semicírculo graduado en forma de transportador (véase la imagen B), cuya base servía de alidada. El sistema se colocaba sobre una *rodilla* de madera que servía para nivelarlo, al centrar la plomada sobre algún vértice del terreno. Posteriormente, la rotación de la alidada permitía la elección angular deseada, la cual está en función del origen o índice del transportador.

Una segunda evolución se muestra en la imagen C, esta fue la de incorporar un segundo disco graduado perpendicular al primero sobre un eje vertical, con el que se determinaban los ángulos de elevación.



*Figura 1. Las imágenes muestran el proceso de evolución que sufrió la dioptra hasta asemejarse al grafómetro diseñado en 1597 por P. Danfrie, que aparece en la Figura 3.*

<sup>19</sup> Cuando se menciona al teodolito común, se hace referencia de aquellos de aproximación angular de un minuto de grado sexagesimal.

Con estos instrumentos se realizaban levantamientos, nivelaciones, etc., semejantes a los que se efectúan en la actualidad con los teodolitos comunes. Incluso, hay evidencia de la utilidad de la dioptra en el proyecto de construcción de acueductos, trazado de caminos y amplios túneles romanos durante el siglo VI a. C., no obstante su invención se asume a los griegos hacia el siglo III a. C. Por su lado, la Figura 2 deja ver el uso práctico que se hacía de la dioptra en su modalidad de escuadra graduada sujeta a un marco cuadrado, para la medición de ángulos de depresión y otras operaciones, esto último durante el siglo XVI (Pérez de Moya, 1523). Obsérvese cómo la graduación de la escuadra tiende a parecerse a la forma de un semicírculo graduado<sup>20</sup>.

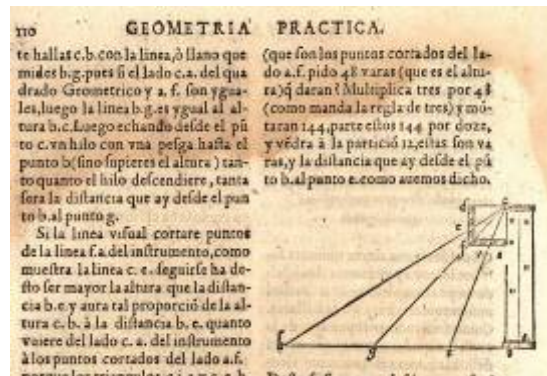


Figura 2. En la figura se aprecia el uso que se hacía con la dioptra para la medición de ángulos de depresión durante el siglo XVI. La ilustración aparece en la *Geometría Práctica* de Pérez de Moya, escrita hacia 1523.

### El grafómetro

Desde su invención en 1597, el grafómetro se distinguía por su sencillez, portabilidad y resistencia. Como tal, constaba en la parte superior de un semicírculo graduado que servía para medir ángulos verticales (véase la Figura 3). Las observaciones se realizaban a través de unas pínulas colocadas al final de dos alidadas cuyos extremos contaban con vernieres para apreciar las fracciones de la graduación angular<sup>21</sup>. Para medir los ángulos horizontales se usaba el semicírculo inferior, el cual era atravesado a la mitad por una regleta, la cual era sujeta por otra de éstas en la parte donde la primera terminaba, por medio de un tornillo. Este aditamento era llamado *recipiángulo*, y permitía medir los ángulos *de entrada* o *salida* que se formaban entre las dos rectas del terreno comprendidas por el vértice donde se estacionaba el instrumento que, en este caso, eran alineadas por las regletas. Semejante a la dioptra, todo el sistema se apoyaba sobre una *rodilla* para fijarlo a un tripié (Danfrie, 1597).

<sup>20</sup> En esta dirección, Apóstol (2004) encontró un error de alineación de 0.1 de grado al usar la dioptra en el trazo del túnel de Samos, construido por los romanos al interior del Monte Kastro, durante el siglo VI a. C.

<sup>21</sup> Humboldt consigna el uso del grafómetro en la medición de una base inclinada *AB*, usada para determinar la altura en toesas sobre el nivel del mar de la cima ubicada en los andes denominada *Tolima*. Se cita en: *Viaje de Humboldt por Colombia y el Orinoco*, para el año de 1806. Obtenido el 28 de julio de 2010 en la ruta: <http://www.lablaa.org/blaavirtual/exhibiciones/humboldt/ibague3.htm>.

El grafómetro fue ampliamente utilizado en las operaciones de alineación, medición de terrenos, sobre todo en la delimitación de los campos de cultivo para el pago de impuestos catastrales, trazado de edificios públicos y catedrales, así como observaciones astronómicas, tanto por los agrimensores como por los geómetras -europeos y americanos- desde mediados del siglo XVII y hasta finales del siglo XIX.

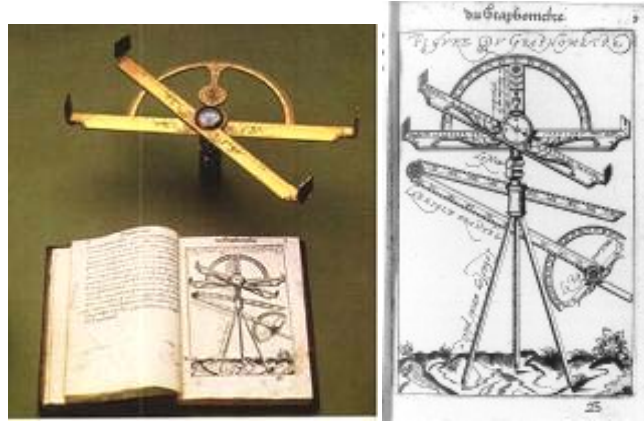


Figura 3. Grafómetro diseñado por el francés Philippe Danfrie. Las ilustraciones descubren la manera de emplearlo. Véase la referencia Danfrie, (1597)

En su origen, los grafómetros se limitaban a una aproximación angular que dependía del tamaño del diámetro y la graduación del semicírculo, la cual podía ser del orden de 10' de grado sexagesimal (no obstante era común que el semicírculo se graduara en los sistemas sexagesimal y centesimal). En sí misma la medición angular era complicada debido a que inicialmente estos instrumentos no contaban con un aditamento óptico para precisar en la lectura, llegándose a cometer errores de hasta 30' en las alineaciones. Otra de las limitaciones resultaba ser su *nivelación* horizontal, en tanto adolecían de niveles y accesorios para ese fin. Ante ello, las distancias que se medían, con *cordeles*<sup>22</sup>, contenían errores de observación que hacían que la geometrización final del terreno no correspondiera con el espacio real levantado.

No obstante, el grafómetro fue mejorándose con incorporaciones tecnológicas hasta su etapa final, que corresponde al último tercio del siglo XIX, dejando de utilizarse debido a la amplia difusión de los teodolitos comunes. Así, para mediados del siglo XVIII, la casa inglesa Canivet construía los mejores grafómetros de un pie de diámetro para los círculos horizontal y vertical, cuya alidada por lo general era dividida por el método de Werner, es decir en subdivisiones sexagesimales y centesimales, con los cuales se podían medir los ángulos con aproximación de 1'. Para esta etapa, los grafómetros se hallaban armados por anteojos de 28 pulgadas con lentes de buen alcance para las observaciones, de hasta más de 30 kilómetros, incluyendo *tornillos niveladores* para el eje horizontal de tales instrumento. En sí, para esa época fue indistinguible su semejanza con los teodolitos comunes.

<sup>22</sup> Por lo general los cordeles que se usaban para los levantamientos topográficos, sobre todo a lo largo del siglo XVIII, eran de cáñamo de unos tres cuartos de centímetro de diámetro, los cuales eran torcidos, encerados y aceitados, para que resistieran la tensión. El cordel, de hasta 50 varas, cada vara equivalía a 0.836 m., era marcado usando una *vara patrón*. Finalmente, estos segmentos se subdividían en *palmas*, cada palmo de doce dedos; y cada dedo en doce *granos*.

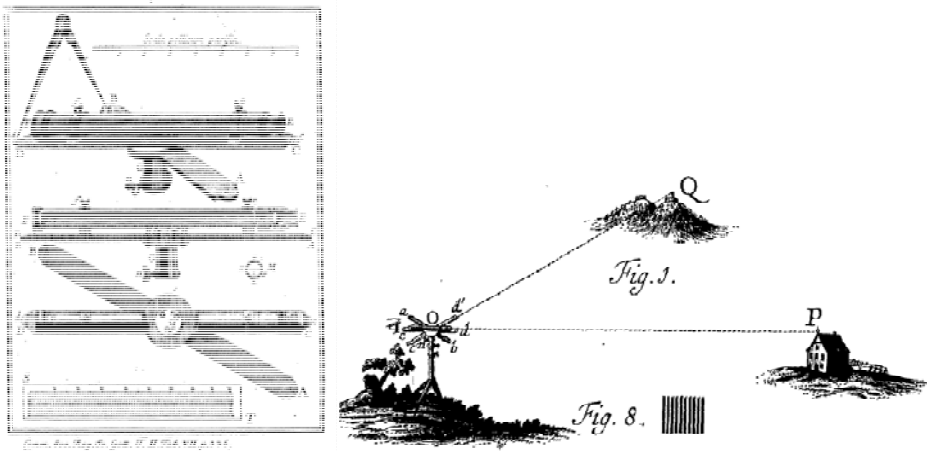


Figura 4. A la izquierda, grafómetro alemán con anteojo, la abertura del compás servía para determinar el valor angular apreciando su valor sobre la escala que ahí aparece. A la derecha se puede ver el método utilizado en la medición de un ángulo horizontal. Fue utilizado para los levantamientos topográficos alrededor del año de 1750.

### **Las técnicas de medición usando el grafómetro**

En un principio, las técnicas de medición que se empleaban con los grafómetros consistían de la *intersección angular* de los diferentes vértices de que constan los terrenos, tomándose como puntos de referencia para las observaciones dos o más estaciones desde las que se dominaba con el instrumento el total de la superficie. Las estaciones a su vez establecían un lado *base* para los triángulos que así se formaban, logrando con ello una *red de triángulos* o *triangulación* elemental. En la Figura 5 se aprecia el modelo de medición angular y lineal utilizado con el grafómetro.



Figura 5. Técnica de medición angular y lineal mediante intersecciones, haciendo uso del grafómetro, sugerido por Danfrie (1597).

No obstante, otros métodos expeditivos que se llegaron a utilizar fueron el de *radiaciones*, que consiste en medir los vértices de los terrenos sobre un punto central *P* (véase el ejemplo que se muestra en la Figura 6) desde el cual se domina su totalidad,



tomando a su vez como referencia base para la medición de los ángulos centrales una de las radiaciones, por ejemplo la línea  $PA$ .

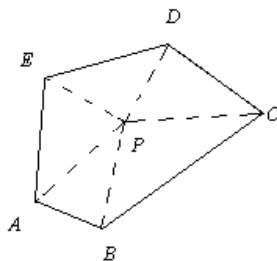


Figura 6. Técnica de medición angular y lineal de un terreno por medio de radiaciones desde el punto  $P$ .

Otro método común era (y sigue siendo) el de *itinerarios* o *caminamiento cerrado*, que consiste en levantar el polígono midiendo sus ángulos internos; por ejemplo, en la Figura 6, el ángulo  $EAB$  así como las longitudes correspondientes entre cada vértice, iniciando con la distancia  $AB$  para concluir la medición con la distancia  $EA$ , toda vez que se sigue la marcha de la medición sobre el itinerario del polígono, en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

En la actualidad, las técnicas de medición se siguen eligiendo de acuerdo a los *reconocimientos* previos que hay que desarrollar antes de la medición de los terrenos. No obstante, y de acuerdo a su aparición, históricamente las técnicas se pueden resumir en dos, en primer lugar el método de triangulación elemental y, en segundo, el de poligonación o itinerarios.

### Geometrización de una superficie de terreno haciendo uso del grafómetro

Situemos el siguiente ejemplo a finales del siglo XVIII<sup>23</sup>, conviniendo que el terreno  $ABCDEA$  de la Figura 6, en su forma ideal, fue medido a partir de un levantamiento topográfico usando la técnica de poligonación itinerante, con un grafómetro de aproximación angular de  $1'$  y una cuerda resistente dividida en décimos de metro. Supóngase que se cuenta ya con la medición de los ángulos internos y las distancias medidas sobre el terreno. No obstante, consideremos un error sistemático en la medida de las longitudes debido a lo defectuoso de la cuerda.

Una primera condición que se sigue es que la suma  $s$  de los ángulos internos medidos debe ser:

$$s = (n - 2)180^\circ \dots(1)$$

Fórmula en la cual  $n$  es el número de vértices con que cuenta el polígono, para el caso  $s=720^\circ$  (sugerida en los Elementos de Euclides para las figuras geométricas regulares<sup>24</sup>). Una cuestión que de aquí surge es la generalización que se hace de la fórmula (1) para los

<sup>23</sup> Con la salvedad del uso del sistema métrico, el cual fue establecido en Francia hacia el año de 1791.

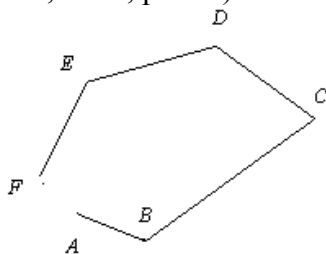
<sup>24</sup> Al final de los Elementos, Euclides demuestra en un Lema que los ángulos interiores de un pentágono regular miden un ángulo recto y un quinto de este último, es decir  $108^\circ$ , lo cual deja ver el conocimiento que se tenía de este tema. No obstante, ello no prueba la generalización de la expresión (1) para cualquier figura regular.

polígonos irregulares como el que se muestra en la Figura 6. Pero dejemos de pronto esta cuestión y supongamos que la suma  $s'$  que se obtuvo difiere de  $s$  una cantidad angular  $\pm e$ , la cual aceptamos, como principio fundamental, que debe dividirse en partes iguales entre todos los ángulos. Es más, supongamos que ya ejecutamos esta última operación y el *cierre* angular cumple con la especificación (1).

El trabajo que seguía era el diseño de la planta topográfica a cierta escala previamente convenida. Al no contarse con un sistema de coordenadas rectangulares<sup>25</sup>, lo que se permitía era el uso del transportador para la medición polar de los ángulos en el papel y regla graduada para las longitudes, que hacía las veces de escalímetro. Supongamos que el contorno del terreno  $ABCDEA$ , de la Figura 6, no *cierra* al dibujarse debido a los pequeños errores de observación de las distancias ante el uso y limitaciones de los instrumentos, dando la pequeña diferencia  $AF$ , que en la Figura 7 se ha exagerado para darle más claridad. En este caso, el error  $k$  que se comete al trazar sobre el papel un lado medido equivocadamente sobre el terreno, influye en la posición de los siguientes lados del polígono.

Hasta esta parte del trabajo, el espacio real es el polígono cerrado  $ABCDEA$  de la Figura 6, en tanto el micro-espacio *preliminar* que resulta corresponde al polígono abierto formado por los vértices  $ABCDEF$  de la Figura 7.

El modelo de análisis que se presenta enseguida fue tomado de diferentes fuentes (Gauss, 1822; Díaz Covarrubias, 1896, pp. 240-247; Toscano, 1955, p. 57; Caillemer, 1967, p. 70; Pasini, 1969, p. 342; Jordan et al, 1981, p. 466).



*Figura 7. Al dibujar el espacio real identificado por polígono cerrado  $ABCDEA$ , con transportador y regla graduada, a cierta escala, este no cierra debido a los errores de observación de las distancias cometidos con el grafómetro y cordel, quedando así el polígono abierto  $ABCDEF$ .*

Por su naturaleza el error  $FA$  en la geometrización es inevitable. Más supongamos que se encuentra dentro de la tolerancia previamente especificada para este tipo de levantamientos, razón por la cual no es necesario verificar la medición, es decir, hacer de nuevo el levantamiento. Por tanto éste puede *disimularse*, o sea, no eliminarse, proporcionando su valor entre los lados del polígono. Al no haber más fundamento para atribuir a una parte de las longitudes mayor error que el resto, habrá que dividir la diferencia o *error*  $k=FA$  proporcionalmente entre estas. Ello consiste en desplazar cada vértice paralelamente al error  $FA$ , una cantidad proporcional a la longitud de cada lado.

<sup>25</sup> Aún cuando el modelo de coordenadas fuera conocido, su difusión no tenía el alcance de utilidad que se desarrollaría a lo largo del siglo XIX.

Supongamos:  $AB=l_1, BC=l_2, \dots, \text{etc.}$ , de modo que  $c_1 = BB', c_2 = CC', \dots, c_{n-1} = EE'$ , sean las correcciones que les corresponden, en tanto el polígono corregido será  $A'B'C'D'E'$ , y sea, además:  $P = l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1}$  el perímetro total (véase la Figura 8). De aquí se sigue que para el primer lado  $AB$ :  $P : c_n :: l_1 : c_1$ , de donde:  $c_1 = \frac{c_n}{P} l_1$ . De igual forma, para el segundo lado  $BC$ , se tendrá:  $P : c_n :: l_1 + l_2 : c_2$ , o bien:  $c_2 = \frac{c_n}{P} (l_1 + l_2)$ . De modo que la corrección para el penúltimo lado es dada por la relación (2):

$$c_{n-1} = \frac{c_n}{P} (l_1 + l_2 + \dots + l_{n-1}) \dots (2)$$

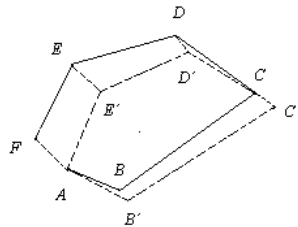


Figura 8. Las magnitudes  $FA, BB', CC', DD'$  y  $EE'$ , son las que hay que restar a cada vértice respectivamente para que quede el polígono corregido.

Puesto que las correcciones son además proporcionales entre sí, las magnitudes de estas irán de menor a mayor, quedando la última con la misma magnitud. Para ejemplificar se contemplan los lados del polígono con las siguientes magnitudes, dadas en metros:  $AB=175.2, BC=341.7, CD=289.6, DE=274.5$  y  $EA=124.3$ , cuyo perímetro es:  $P=1205.3$ . Haciendo uso de la expresión (2), quedan las correcciones correspondientes de la siguiente manera:  $BB'=1.16, CC'=3.41, DD'=5.32, EE'=7.13$  y  $FA=8.00$ . En este caso el error de cierre  $k=FA$  fue medido directamente con la regla graduada en el polígono dibujado a la escala especificada.

Bajo este supuesto, la geometrización final del terreno se aprecia en la imagen de la Figura 9 en línea más gruesa que el resto.

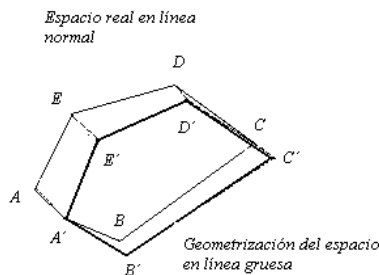


Figura 9. La figura muestra la geometrización del espacio real ideal a partir del uso del grafómetro y un cordel defectuoso, así como el error o desplazamiento homotético que con ello se produjo.

Como se ve en la Figura 9, el error sistemático que supusimos en la medida de las longitudes tiene por efecto dar un polígono homotético del espacio real. En este caso, la relación de homotecia está en proporción directa con el error sistemático.

### Algunos resultados

Al centro de la práctica topográfica se pueden plantear los siguientes resultados desde la perspectiva de estudio que hemos elegido.

- La PR es una práctica topográfica que involucró la medición del terreno haciendo uso de la técnica de poligonación itinerante, es decir, medir los ángulos internos del polígono y las distancias entre cada dos vértices marchando sobre el perímetro del terreno y siguiendo un orden inverso al de las manecillas del reloj.
- La PS que norma la actividad para determinar el micro-espacio, es la geometrización. Esta actividad muestra argumentos en forma discurso matemático, tomados inicialmente de los Elementos de Euclides, como es el caso de la fórmula (1) para el cierre angular. No obstante, el problema que surge en el cierre lineal, hizo que se establecieran condiciones que dieran oportunidad de ajustar dicho error, como el caso de la expresión (2).
- Para el levantamiento la geometrización se mueve en un ambiente en el que se privilegia la *proporción* como una razón entre las magnitudes del terreno. En tanto los objetos matemáticos de uso son los ángulos, magnitudes lineales y direcciones.
- La expresión (2),  $c_{n-1} = \frac{c_n}{P} \sum_{i=2}^{n-1} l_{n-1}$ , es un modelo matemático de compensación lineal resultado de la PS. Por sí mismo, el modelo sugiere que: «a un error en el cierre lineal  $k=A'A$  de un polígono cerrado, este debe ser repartido siguiendo una *compensación paralela proporcional*».
- La transposición del espacio real ideal del terreno al micro-espacio, resultado de la geometrización, se experimentó al confrontar el grafómetro con el uso del transportador y al cordel con la regla graduada.
- Por su lado, la métrica de uso para el espacio real, se guarda a través de la escala utilizada durante la geometrización del micro-espacio. De aquí que esta última sea una actividad que se ubica en ambas experiencias.

### Conclusiones

En principio no se aprecia que los conocimientos matemáticos sugeridos por la expresión (2) que se establecieron con la PS, hayan tenido una aplicación inmediata en el contexto de la matemática misma y su enseñanza, más ello no debe preocupar puesto que sí ocurrió en la Topografía, incluso en la enseñanza de los métodos que aquí se expusieron.

Por su lado, las técnicas de medición angular y lineal fueron rescatadas por (Anfossi, 1943), y otros, para la enseñanza de los conceptos elementales involucrados en los cursos de trigonometría elemental. No obstante, estas ideas se pueden utilizar para introducir algunos conceptos del cálculo diferencial.

## Referencias

- Anfossi, A (1943), *Trigonometría rectilínea*. México: Editorial Progreso.
- Apóstol, T. (2004). El túnel de Samos. *Ingeniería y Ciencia*, 64(4), 30-40. Obtenido de <http://pr.caltech.edu/periodicals/EandS/articles/LXVIII/samos.html>, el 28 de julio de 2010.
- Bachelard, G. (1928). *Essai sur la connaissance approchée*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.
- Bails, B. (1789). *Principios Matemáticos de la Real Academia de San Fernando*. Segunda edición. Madrid: Imprenta de la Viuda de Ibarra, tomo II.
- Caillemer, A. (1967). *Topographie et photogrammétrie*. Paris: Société des Editions Technip.
- Camacho, A. (2005). Sistemas sintéticos. Lo inteligible en los manuales para la enseñanza. *Revista Cinta de Moebio*, Universidad de Chile. Marzo, núm. 022.
- Camacho, A y Sánchez, B. I. (2010), Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número especial, México, Relime (aceptado para su publicación).
- Cantoral, R., Farfán R. M., Lezama J., y Martínez G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9 (Número especial), 83-102.
- Chevallard, Y. (2006). Passé et présent de la Théorie Antropologique du Didactique. En Ruiz-Higueras, L. Estepa, A García, F. J (Eds.). *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones a la teoría Antropológica de lo Didáctico*, pp. 705-746. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén. Impreso en España.
- Danfrie, Ph. (1597). *Illustrations de declaration de l'usage du graphonomètre par la pratique duquel l'on peut mesurer toutes distances*. París: Obtenido el 9 de julio de 2010 de: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b2100149p/f13>.
- De Gortari, E. (1988). *Diccionario de la lógica*. España: Plaza y Valdés.
- Díaz Covarrubias, F. (1897). *Tratado elemental de topografía, geodesia y astronomía práctica*. México: Oficina Tipográfica de la Secretaría de Fomento, Tomo I, tercera edición.
- Gauss, F (1822). *Die trigonometrischen und polygonometrischen rechnungen in der feldmesskunst*. Euden Strien Halle.
- Jordan, W., Reinhertz, C. y Eggert, O (1981). *Topographie*. (Mantero, J. M., Trad.). Barcelona: Gustavo Gili. (Trabajo original publicado en 1890).
- Montiel, G. (2008). Una construcción social de la función trigonométrica. Implicaciones didácticas de un modelo socioepistemológico. En Hernández, H. y Buendía, G. (Eds.), *Investigaciones en Matemática Educativa*, 105–119. Universidad Autónoma de Chiapas.
- Pasini, C. (1969). *Tratado de topografía*. Barcelona: Gustavo Gili, 6ª edición española.
- Pérez de Moya, J. (1523). *Tratado de geometría práctica y especulativa*. Alcalá: Observatorio de Marina de San Fernando. Impreso por Iván Gracián.
- Toscano, R. (1955). *Métodos topográficos*. México: Editorial Porrúa, S. A.