

USOS DE LA VARIABLE, SENTIDO SIMBÓLICO Y METACOGNICIÓN: una propuesta didáctica para el aprendizaje del álgebra elemental

Tamara Marino
tmarino@ungs.edu.ar

Daniela Isla Zuvalde
dislazuvialde@msn.com

Universidad Nacional de General Sarmiento. Argentina

Recibido: 05/03/2018 **Aceptado:** 27/05/2018

Resumen

Muchos autores coinciden en afirmar que uno de los conceptos más complejos en el aprendizaje del álgebra para los estudiantes es el concepto de variable. El presente artículo toma como insumo los aportes del sentido simbólico (Arcavi, 1995) y del modelo 3UV (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005). Se parte de la premisa según la cual, para favorecer aprendizajes significativos en los estudiantes, es necesario que estos tomen conciencia acerca de cuándo, para qué y cuál es el uso de los símbolos en la resolución de situaciones problemáticas. Resulta relevante entonces, desarrollar un trabajo centrado en la metacognición. En este artículo presentamos un instrumento de intervención didáctica con formato de Portafolio, cuyo objetivo principal es el de generar en los estudiantes un proceso de reflexión metacognitiva en relación al uso de los símbolos en matemática, implementado en un Taller de Matemática de la Universidad Nacional de General Sarmiento.

Palabras clave: Símbolos Matemáticos, Álgebra Escolar, Matemática Preuniversitaria, Metacognición

USES OF THE VARIABLE, SYMBOLIC SENSE AND METACOGNITION: A didactic proposal for the learning of elementary algebra

Abstract

Many authors agree that one of the most complex concepts in learning algebra for students is the concept of a variable. The present article takes the contributions of the symbolic meaning (Arcavi, 1995) and the model 3UV (Ursini, Escareño, Montes and Trigueros, 2005). We believe that in order to foster meaningful learning in students, it is necessary for them to become aware of when, why, and what the use of symbols is in solving problematic situations. It is relevant then, to develop a work focused on metacognition. In this article we present a didactic intervention instrument with a Portafolio format, whose main objective is to generate in the students a process of metacognitive reflection in relation to the use of symbol in mathematics, implemented in a commission of *Taller de Matemática* of the Universidad Nacional de General Sarmiento.

Key Words: Mathematical Symbols, School Algebra, Pre-university Mathematics, Metacognition

Introducción

Las dificultades que los estudiantes presentan en el aprendizaje del álgebra elemental es un tema abordado por distintos investigadores de didáctica de la matemática (ver Arcavi, 1995; Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero, 1996; Alurralde Ibarra, 2007; Peral y Gómez, 2003).

Uno de los conceptos de álgebra básica más complejos para los estudiantes es la noción de variable. Investigaciones realizadas con estudiantes que finalizan la escuela secundaria e ingresan a la universidad muestran que éstos presentan dificultades a la hora de resolver actividades que involucran distintos usos de la variable y su simbolización. Incluso se ha observado que en niveles más avanzados de matemática siguen apareciendo dificultades a la hora de trabajar con este concepto. Una de las problemáticas detectadas tiene que ver con la preponderancia de las estrategias aritméticas por sobre las algebraicas (Ursini y Trigueros, 1998, 2006 citados en Juárez López, 2011).

Para comprender y atender dichas dificultades consideramos centrales los aportes del *sentido simbólico* (Arcavi, 1995) y del *modelo 3UV* (3 usos de la variable) (Ursini, *et al.*, 2005). La propuesta que aquí presentamos se basa en el supuesto de que las problemáticas que se manifiestan en el aprendizaje del álgebra elemental están fuertemente asociadas a la complejidad de la noción de variable y de su carácter multifacético (Ursini *et al.*, 2005) y a la escasa comprensión de los símbolos como “una herramienta que permite comprender, generalizar, revelar estructuras, relaciones y hacer demostraciones” (Arcavi, 1995, p. 77). Acerca del carácter multifacético de la variable, adoptamos la categorización dada en el modelo 3UV en relación con sus distintos usos: como incógnita, como número general y en relación funcional.

Consideramos que para propiciar aprendizajes que permitan superar las dificultades mencionadas es necesario diseñar estrategias de enseñanza tendientes a favorecer en los estudiantes el desarrollo de la conciencia acerca de cuándo y para qué usar símbolos en la resolución de una situación problemática, así como de la capacidad de advertir los distintos usos de las variables, en particular cuando éstas se representan de manera simbólica. Creemos que lo planteado anteriormente se logra favoreciendo procesos metacognitivos en los estudiantes puesto que la metacognición, según Ríos (1990 citado en González, 1996), refiere, entre otras cuestiones, al “conocimiento que tiene un sujeto acerca de las estrategias con las

que cuenta para resolver un problema y al control que ejerce sobre dichas estrategias para que la solución sea óptima” (p. 115).

De esta manera, creemos que los estudiantes lograrán mejores desempeños en el álgebra elemental si desde la enseñanza se proponen actividades que incluyan instancias sistemáticas de reflexión en las que tengan la oportunidad de revisar la propia producción relación con para qué y cuándo usar los símbolos en matemática, qué utilidad tienen y cuál o cuáles son los usos implicados en la resolución de distintas situaciones problemáticas.

Atendiendo a todo lo planteado anteriormente, diseñamos un instrumento de intervención didáctica con formato de Portafolio cuyo propósito central es generar un proceso de reflexión metacognitiva en torno al uso de la variable y su simbolización en álgebra elemental. Dicho Portafolio fue diseñado para ser implementado en una comisión del ingreso a la Universidad Nacional de General Sarmiento. La descripción de dicho Portafolio es lo que aquí presentamos.

Referentes teóricos y conceptuales

Para este trabajo nos basamos en aportes teóricos enmarcados en la corriente cognitivista referidos al *modelo 3 usos de la variable (3 UV)*, al *sentido simbólico* y a la *metacognición*. Los dos primeros provenientes del ámbito de la educación matemática y el último más vinculado a la psicología cognitiva, pero con gran desarrollo desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. A continuación, realizaremos una breve presentación del enfoque teórico en el que sustentamos nuestra propuesta didáctica, que toma elementos conceptuales de cada uno de los referentes mencionados.

Como se dijo anteriormente, las dificultades en el aprendizaje del álgebra elemental se vinculan con la complejidad que encierra la noción de variable. La comprensión adecuada de esta noción exige desarrollar una conciencia acerca de la utilidad de usar variables para modelar matemáticamente situaciones de distinto tipo, distinguir entre los distintos usos que se les da a las variables en álgebra, pasar con flexibilidad entre dichos usos y comprender por qué es posible operar con las variables y por qué dichas operaciones permiten llegar a un resultado, sea éste numérico o no (Ursini *et al.*, 2005).

En relación con el aprendizaje del álgebra elemental, Ursini *et al.* (2005) proponen un modelo para el tratamiento didáctico del concepto de variable denominado *modelo 3UV*. En dicho modelo se sostiene que la variable presenta un carácter multifacético que se encuentra

reflejado en los distintos usos que se hace de ella: como *incógnita*, como *número general* y en *relación funcional*. Plantean que para lograr un buen manejo de cada uno de estos usos se requieren ciertas capacidades, las cuales mencionamos brevemente a continuación.

Las capacidades referidas a la variable como incógnita tienen que ver con la posibilidad de interpretar a la variable como un número desconocido cuyo valor o valores deben ser determinados a partir de determinada situación que se presenta, simbolizando las incógnitas puestas en juego y relacionándolas a partir del planteo de las ecuaciones pertinentes. Estas ecuaciones podrán ser resueltas apelando a operaciones algebraicas para arribar al conjunto solución, el que finalmente deberá ser analizado de acuerdo al contexto de la situación propuesta.

Las capacidades referidas a la variable como número general se relacionan con la posibilidad de conceptualizar a la variable como un número cualquiera, como un valor genérico, para poder obtener expresiones algebraicas que generalicen, por ejemplo, secuencias o reglas generales en el marco de alguna situación. Así, mediante la manipulación de dichas expresiones se podrán obtener conclusiones en torno a la situación propuesta.

Las capacidades referidas a la variable en una relación funcional implican el reconocimiento de cómo varían en conjunto las variables involucradas en una relación funcional, así como también poder simbolizar dicha relación, determinando los intervalos de variación de cada una de las variables involucradas. En particular, en este uso de la variable, se hace necesario identificar dos perspectivas de la relación funcional: una estática, en la que se piensa la relación como correspondencia puntual, y otra dinámica, esta última apelando a una mirada global de la relación, en la que se pone de manifiesto la variación y dependencia de las variables (Trigueros, *et. al*, 1996).

Consideramos que para mejorar el desempeño referido al trabajo con situaciones problemáticas que involucren el álgebra elemental, no sólo es necesario, como ya hemos explicitado anteriormente, desarrollar una adecuada comprensión de la noción de variable y de sus distintos usos, sino que también resultará imprescindible desarrollar capacidades relacionadas con percibir cuándo es necesario o conveniente utilizar símbolos para representar variables, como también poder hacer una buena lectura de las expresiones simbólicas en el contexto en el que se plantean para poder reconocer el alcance de las soluciones a las que se

arriba. Estas capacidades se relacionan con algunas de las cuestiones que Arcavi (1995) incluye dentro de la noción de *sentido simbólico*.

De esta manera, en el marco del álgebra elemental, un buen desempeño frente a la resolución de situaciones problemáticas requiere advertir los distintos usos de la variable y reconocer cuál (o cuáles) están implicados en la situación a resolver, decidir si es necesario o no “invocar” a los símbolos para representar las variables involucradas y ser capaz de manipular e interpretar las expresiones simbólicas planteadas, reconociendo el alcance de las mismas.

Cabe aclarar que el tipo de desempeño descrito en el párrafo anterior solo puede ponerse en juego frente a situaciones que no sean las de tipo rutinaria, entendiendo por rutinarias aquellas tareas tales como hallar el conjunto solución de una ecuación o de simplificar (o desarrollar) expresiones algebraicas. De esta manera, en este trabajo consideramos situaciones problemáticas que incluyan algún grado de desarrollo de la modelización algebraica (Alurralde Ibarra, 2007) que implica centralmente identificar variables involucradas, analizar la pertinencia de simbolizar y realizar una elección conveniente de los símbolos, plantear un modelo adecuado y tomar decisiones acerca de la situación a partir de la información brindada por dicho modelo.

Consideramos que el desarrollo de la conciencia acerca del “poder de los símbolos” y del alcance y la pertinencia de cada uno de los usos de la variable en la resolución de situaciones problemáticas se logra en el plano de la reflexión metacognitiva.

El término metacognición suele referirse tanto al conocimiento de los propios procesos cognitivos como a la regulación de dichos procesos (Flavel, 1979, Garófalo & Lester, 1985, Brown, 1987). El primer aspecto suele entenderse como conocimiento metacognitivo y se clasifica según esté referido a la persona, a la tarea y a las estrategias. Si bien esta clasificación es general y aplicable a todas las disciplinas o áreas de conocimiento, aquí la describimos particularizando en lo referido al aprendizaje de la matemática. En lo relativo al conocimiento de la persona, se trata de la autoevaluación y la toma de conciencia de las propias fortalezas y debilidades o limitaciones cognitivas y de otras características personales que pueden afectar el desempeño matemático en general o ante una situación específica. También incluye las creencias sobre la incidencia de las variables afectivas en el desempeño tales como la ansiedad, motivación, perseverancia, entre otras. El conocimiento sobre las tareas incluye, por

un lado, creencias acerca de lo que trata la matemática y creencias acerca de la naturaleza de las situaciones matemáticas y, por otro lado, hace alusión al conocimiento sobre aquellas características de las situaciones que hacen que las mismas tengan mayor o menor dificultad. Por último, el conocimiento de las estrategias implica saber cuál es el repertorio de estrategias disponibles, cómo se aplican y las condiciones bajo las cuales éstas resultan más efectivas. También incluye, por ejemplo, la conciencia de qué se espera frente a cierta situación, cuáles estrategias pueden usarse, cuál es la más adecuada, qué tipo de respuesta se espera frente a dicha situación, etc. (Garófalo & Lester, 1985).

En relación con la autorregulación y monitoreo de los propios procesos cognitivos, se considera que la disponibilidad de conocimientos metacognitivos hace que la persona pueda tener mayor control de su desempeño en el aprendizaje de la matemática. Justamente tener, por ejemplo, un conocimiento metacognitivo adecuado acerca de las estrategias disponibles favorece que la persona pueda decidir y seleccionar de manera deliberada cuáles son las estrategias o procedimientos adecuados frente a la resolución de una determinada consigna.

De esta manera, podemos decir -sin intención de ser exhaustivos- que, en lo particular del álgebra elemental, un conocimiento metacognitivo adecuado acerca de las estrategias y de la tarea y un buen control de la propia actuación se vincula con:

- La conciencia acerca de la utilidad y la necesidad de lo algebraico frente a determinadas situaciones. Es decir, la capacidad de reconocer que lo aritmético o lo gráfico es insuficiente y, a su vez, que resulta necesario el uso de los símbolos;
- La capacidad de reconocer cuándo frente a una cierta situación no es necesario o pertinente recurrir a lo algebraico;
- La conciencia acerca de los distintos usos que puede adoptar la variable y la capacidad de distinguir qué uso/s se ponen en juego frente a una determinada situación;
- La capacidad de lograr un manejo fluido de los distintos usos de la variable, en particular, cuando se simboliza.

En lo relativo al conocimiento metacognitivo relacionado con la persona, consideramos que la práctica de reflexión acerca de las cuestiones recién mencionadas podría generar una cierta conciencia acerca del propio conocimiento en relación con los usos de las variables en

álgebra. Por ejemplo, es muy común escuchar decir a los estudiantes “la x es la incógnita”, independientemente del uso que se le esté dando a ese símbolo. Creemos que un trabajo de tipo metacognitivo ayudará no solo a que los estudiantes revisen y ajusten este tipo de concepciones sino también a que adviertan que sus concepciones se están modificando.

Finalmente, nos interesa destacar la importancia que la metacognición ha ido adquiriendo en el ámbito de la educación, y en la educación matemática en particular. Muchos autores (Garófalo & Lester, 1985; Lai, 2011; Desoete, 2011) sostienen que para tener una actuación cognitiva exitosa no es suficiente con poseer el conocimiento adecuado, sino que hay que tener la conciencia y el control de ese conocimiento, puesto que dicho control favorece la utilización de los conocimientos de manera flexible y deliberada, previniendo así el hacer irreflexivo. Además, según González (1996) el desarrollo de la metacognición en una persona puede mejorar significativamente la capacidad de dirigir eficazmente sus procesos cognitivos desarrollando así la habilidad de aprender de manera autónoma.

Por otro lado, es importante mencionar que diversos autores (Mevarech&Fridkin, 2006, Desoete, 2011, Lai, 2011, Yang & Lee, 2013) sostienen que es posible favorecer el desarrollo metacognitivo desde la enseñanza.

Es por todo lo planteado anteriormente que consideramos pertinente y necesario desarrollar propuestas didácticas que favorezcan el desarrollo de la capacidad metacognitiva, esto es fomentar una retroalimentación entre conocimientos metacognitivos y un progresivo control del propio desempeño. En particular, en lo relativo al abordaje del álgebra elemental que, tal como fue planteado, genera muchas dificultades en el aprendizaje de nuestros estudiantes.

Descripción de la propuesta didáctica

Contexto de implementación

El CAU (Curso de Aprestamiento Universitario) es el curso de ingreso de la Universidad Nacional de General Sarmiento. El mismo es obligatorio para todos los aspirantes a ingresar a la universidad y está compuesto por tres asignaturas: Taller de Matemática, Taller de Lectoescritura y Taller de Ciencia. El Taller de Matemática está diseñado con la intención de atender a diversos aspectos tanto desde lo metodológico como desde lo didáctico. Durante las clases se busca generar una participación activa de los estudiantes, en tareas que requieran intercambio de distintos procedimientos de resolución y discusión acerca de la validez de los

mismos y de los argumentos que justifican las respuestas dadas. En relación con el tratamiento de los temas, los cuales en su gran mayoría están incluidos en el currículo de matemática de la escuela media, se intenta ofrecer una visión integrada de los contenidos matemáticos. Se proponen actividades cuya resolución implique la articulación de distintos conocimientos. Por ejemplo, se plantean situaciones sobre proporcionalidad directa o geometría que requieren herramientas algebraicas para su resolución. Además, la modelización y la resolución de situaciones problemáticas constituyen ejes centrales de la propuesta. En lo referido específicamente al tratamiento del álgebra, se busca proponer diversidad de situaciones que involucren distintos usos de la variable. Algunos de los asuntos que se abordan son el uso de variables y el planteo de expresiones algebraicas para generalizar reglas o secuencias planteadas en un contexto aritmético, la interpretación de expresiones simbólicas y/o el planteo y resolución de ecuaciones en el contexto de alguna situación problemática. En relación con la modelización mediante funciones, la propuesta de trabajo aborda, entre otras cuestiones, la identificación de variables y de la relación entre ellas en diversas situaciones problemáticas, la simbolización y manipulación del modelo matemático que permite describir e interpretar la situación.

Formato de la propuesta didáctica: Portafolio

El Portafolio se concibe centralmente como un instrumento de evaluación. En nuestra propuesta lo utilizamos desde esta perspectiva, destacando la función formativa de la evaluación y focalizando en la dimensión metacognitiva de este proceso, vinculada con el interés de ayudar a los estudiantes a aprender y a conocerse a sí mismos como aprendices (Anijovich, 2010). Siguiendo a Rodríguez (2012) la estructura del Portafolio que diseñamos responde a las siguientes características: es una colección de trabajos de los estudiantes, es una carpeta que contiene las actividades ordenadas y organizadas, con criterios de conformación de la carpeta y de evaluación de los trabajos explicitados por el docente y con consignas de reflexión sobre lo aprendido y, en particular, con una actividad final de reflexión sobre el trabajo completo.

Diseño del Portafolio

El Portafolio se diseñó para ser implementado a lo largo de una cursada de 4 meses de duración y con un total de 5 trabajos. El recorrido propuesto a lo largo del Portafolio incluyó

la resolución de diversas situaciones problemáticas, las cuales fueron seleccionadas y diseñadas en base al material de trabajo del curso (ver Carnelli, Cesaratto, Falsetti, Formica y Marino, 2013) con el criterio de que admitieran diversos usos de la variable y de que en su enunciado no se indicara explícitamente el uso de símbolos para su resolución, de manera que quedara a cargo del estudiante la decisión de usar o no símbolos para representar a las variables. Por otro lado, también se incluyeron actividades que requirieran estrategias aritméticas; es decir, situaciones en las que lo algebraico no fuera necesario para llegar a la resolución (ver por ejemplo, problema 1 del trabajo N°1 o problema 4 del trabajo N°2). De esta manera, se buscó ofrecer diversas situaciones que permitieran ir construyendo una comprensión y un control acerca de cuándo es necesario recurrir a la simbolización de variables y cuándo no, lo que contribuye al control del estudiante frente a las resoluciones.

El tipo de trabajo propuesto varió a lo largo del Portafolio; en algunos casos se solicitó a los estudiantes que resolvieran situaciones y que luego respondieran preguntas sobre el uso de las variables y los símbolos en las resoluciones, en otros casos se solicitó que leyeran las consignas, que anticiparan qué tipo de resolución requería cada situación y que sólo resolvieran aquellas en las que se involucraba un cierto uso de la variable. También se propuso un trabajo en el que debían realizar el análisis de la resolución de una situación que requería la simbolización de las variables involucradas.

Cada trabajo involucró una reflexión que era realizada luego de la puesta en común, en la que se compartían las resoluciones y las respuestas realizadas por los estudiantes. En esta instancia se buscaba generar la reflexión de lo hecho por cada uno en comparación con lo ajeno para que cada estudiante pudiera establecer conclusiones y valoraciones sobre la propia producción y el conocimiento involucrado. De esta manera, se solicitó que escribieran las reflexiones siguiendo ciertas pautas.

A continuación, presentamos los trabajos que conforman el Portafolio, realizando una breve descripción de la intencionalidad didáctica de cada uno.

PORTAFOLIO:

“El uso de las letras en Matemática”

TALLER DE MATEMÁTICA DEL CAU

Nombre y Apellido:

Esta es una carpeta de trabajo del Taller de Matemática del CAU. Aquí guardaremos distintos trabajos realizados a lo largo de la cursada. Cada uno de los trabajos debe contener: la consigna de la actividad dada por las docentes, la resolución escrita por ustedes y la reflexión final acerca de lo hecho y discutido en clase. Las reflexiones deben reflejar lo que cada uno “se lleva” de la actividad realizada en relación con el uso de las letras en la resolución de actividades de matemática: qué aprendieron, qué cuestiones les generan dudas o dificultades, qué errores cometieron en su resolución y cómo podrían evitar volver a cometerlos, qué conclusiones podrían elaborar que los ayude a resolver futuros problemas similares y, en particular, conclusiones sobre el uso de las letras en la resolución de actividades de matemática.

El criterio de evaluación es que la carpeta contenga todos los trabajos asignados y que los mismos reflejen el proceso de aprendizaje. No se evaluará por lo correcto o no de las resoluciones sino por la presentación de una resolución completa de la actividad y por la elaboración de reflexiones que muestren un trabajo “a conciencia” sobre las actividades.

Trabajo N° 1

Resolver el siguiente problema:

a) Tres hermanos, Juan, Pedro y Luís, reciben una herencia de \$100.000. En el testamento queda establecido que Pedro recibe el 30% de la herencia, Juan, las dos quintas partes de lo que queda y el resto es para Luís.

¿Cuál de los tres hermanos recibe la mayor parte?

b) Si en lugar del problema anterior nos dieran el siguiente enunciado:

Tres hermanos, Juan, Pedro y Luís, reciben una herencia. En el testamento queda establecido que Pedro recibe el 30% de la herencia, Juan, las dos quintas partes de lo que queda, y el resto es para Luís.

¿Cuál de los tres hermanos recibe la mayor parte?

Resolver el problema con este enunciado.

¿Qué diferencias encontrás entre ambos problemas? Al momento de resolverlos, ¿utilizaste estrategias diferentes o resolviste ambos de la misma manera? Si hubo diferencias en la resolución, ¿podrías explicar a qué se deben?

Para finalizar: A partir de lo discutido en la puesta en común realizar una reflexión sobre lo aprendido en la resolución de este trabajo.

Este primer trabajo tiene la intención de ser una introducción para los estudiantes a la temática que se quiere trabajar a lo largo del Portafolio, por ello es planteado antes de presentar el Portafolio y sus objetivos. De esta manera interesa iniciar la discusión sobre el uso de los símbolos (letras) en la resolución de actividades. En el ítem b), resulta útil introducir

una letra que represente un número general para poder justificar la generalización que se involucra en la respuesta. Interesa discutir en torno a las diferencias entre el ítem a y b en cuanto a la respuesta y el tipo de resolución esperados en cada uno.

Luego de la resolución y posterior discusión en clase, se presenta a los estudiantes el Portafolio y se les explica en qué consiste y qué se espera de ellos a lo largo de los trabajos. Finalmente, se les pide escribir una reflexión acerca de lo trabajado.

Trabajo N° 2

Dado el siguiente listado de actividades:

1) Un mago nos dice: “Pensá un número, restale 1, al resultado multiplícalo por 2, sumale 4 y restale el doble del número que pensaste”.

a) ¿Qué podés decir de la cuenta que nos propone el mago?

b) Completá el siguiente truco: “Pensá un número, restale 1, al resultado multiplícalo por 2, sumale 4 y restale el doble del número que pensaste. Encontraste ...” de manera que el mago siempre adivine el resultado de la cuenta de cualquier espectador. Explicá por qué este truco (con lo que completaste) sería siempre exitoso.

2) Si un producto costaba \$43,5 en enero de 2011 y ahora cuesta \$51,4, indicar el porcentaje de aumento.

3) Tres hermanos, Juan, Pedro y Luís reciben una herencia. En el testamento queda establecido que Pedro debe recibir un tercio del total, Luis, un medio y Juan, un millón de pesos. ¿Cuánto dinero recibe cada uno?

4) Para pintar las paredes de una sala hacen falta 3500 litros de pintura. Las dos novenas partes se pintarán de color verde y el resto de color blanco. Indicar cuántos litros de pintura serán necesarios de cada color.

5) El supermercado A propone como oferta “comprando 3 unidades del mismo producto pague 2”. El supermercado B ofrece “comprando dos productos iguales, la segunda unidad tiene un 70% de descuento”. ¿En cuál se compra más barato?

Considerar que ambos supermercados venden los mismos productos al mismo precio de lista (precio sin descuento).

6) Elegir un número tal que al restarle 6, al resultado obtenido multiplicarlo por 4 y, luego, sumarle 11 veces el número elegido, dé por resultado 6. Explicá el procedimiento utilizado para dar la respuesta.

1) Seleccioná aquellas actividades en las que, para resolverlas, necesites introducir una letra que represente un número cualquiera. ¿Qué características de las actividades que seleccionaste te hicieron tomar esa decisión?

2) De las actividades seleccionadas, elegí una y resolvela explicando todos los procedimientos utilizados.

3) ¿Encontraste alguna actividad en la que necesites utilizar una letra para su resolución pero no, en ese caso, como representación de un número cualquiera? Si tu respuesta es afirmativa, ¿podés explicitar cuál sería el uso de la letra allí?

Para finalizar: A partir de lo discutido en la puesta en común realizar una reflexión sobre lo aprendido en la resolución de este trabajo.

Con este segundo trabajo del Portafolio se pretende que los estudiantes puedan identificar, previamente a resolver las actividades, aquellas en las cuales necesiten introducir una letra para su resolución. Así se intenta que busquen características o "indicios" en cada

una de las situaciones que les permitan anticipar si su resolución requerirá o no la simbolización de variables. Por otro lado, entre las actividades presentadas en la consigna incluimos alguna que requiriera de la utilización de símbolos para su resolución, pero con un uso vinculado a la variable como incógnita. Por último, se los alienta a realizar una reflexión metacognitiva acerca del trabajo realizado.

Trabajo N° 3

Leer la siguiente resolución y responder las preguntas que se proponen a continuación de la misma:

Como vemos, no sabemos el precio inicial de cada producto. Lo usual es pensar en un producto en particular, por ejemplo las lentejas, y se piensa un precio inicial, por ejemplo, 4 pesos.

Explicación	Si “Don Cholo decide vender un 15% más caro, al precio del kilogramo de lentejas, que es \$4, hay que sumarle el 15% de ese precio.	
Planteo	$4 + \frac{15}{100} \cdot 4$	$4 + 0,6 = 4,6$
Explicación	En el caso de “Carlitos”, el precio \$4 es para un 15% menos de un kilo, el cual debe averiguarse.	
Planteo	$1 - \frac{15}{100} \cdot 1$	$1 - \frac{15}{100} \cdot 1 = \frac{85}{100}$, lo que equivale a 850 gramos.
Explicación	Entonces \$4 es el precio de 850 gramos. Para poder comparar los precios entre sí debemos referirlos a un mismo peso, por ejemplo ambos a un kilogramo. Luego hay que calcular el precio de un kilo del almacén “Carlitos” al que denotamos con la letra x . Para ello hay que tener en cuenta que una vez fijado el aumento, las variables: “peso de las lentejas” y “precio de lo pesado” son proporcionales y entonces podemos obtener el precio por kilo usando proporciones o regla de tres simple directa	
Planteo	$\frac{4}{0,85} = \frac{x}{1}$	Luego $x = \frac{4}{0,85} \approx 4,70$. Esta aproximación es realizada por truncamiento, entonces $4,70 \leq \frac{4}{0,85}$.
Explicación	Ahora hay que comparar los dos valores. El más conveniente es el menor. Por los cálculos realizados, $4,6 < 4,7 < \frac{4}{0,85}$.	
Respuesta parcial	Queda claro que en el caso de las lentejas conviene comprar en el almacén “Don Cholo”.	

Explicación	¿Qué sucede con el resto de los productos? Deberíamos repetir lo pensado y planteado pero ahora refiriéndonos a un precio p , que es variable según el producto que se venda.	
Planteo	$p + \frac{15}{100} \cdot p$	Al desconocer p , no tendremos un resultado numérico, por factor común: $(1 + \frac{15}{100}) \cdot p = (\frac{115}{100}) \cdot p = 1,15 \cdot p$. El resultado depende de p .
Explicación	En el caso de “Carlitos”, el precio p es para un 15% menos de un kilo, el cual se averigua del mismo modo que antes resultando entonces 0,85kg. Entonces, para el almacén “Carlitos” p es el precio de 850 gramos. Para poder comparar los precios entre sí debemos referirlos a un mismo peso, por ejemplo ambos a un kilogramo. Luego hay que calcular el precio de un kilo del almacén “Carlitos”, al que llamamos p' . Dado que las variables: “peso de las lentejas y “precio de lo pesado son proporcionales, podemos obtener el precio por kilo usando proporciones o regla de tres simple directa.	
Planteo	$\frac{p}{0,85} = \frac{p'}{1}$	Luego $p' = \frac{p}{0,85}$.
Explicación	Ahora hay que comparar los dos valores, que dependen de p para saber cuál es el mayor. ¿ $1,15 \cdot p$ es mayor que $\frac{p}{0,85}$? Notar que $\frac{p}{0,85} = \frac{1}{0,85} \cdot p$. Como p es un número positivo, ya que representa el precio inicial del kilo de lentejas, podríamos sólo comparar los números multiplicados por p . *	
Planteo	¿ $1,15$ es mayor que $\frac{1}{0,85}$?	Realizando la cuenta en la calculadora, vemos que $\frac{1}{0,85} \approx 1,1764$, luego comparando los números decimales $1,15 < 1,1764 < \frac{1}{0,85}$
Respuesta del problema	<i>Respuesta:</i> Conviene comprarle a “Don Cholo” que aumenta el precio un 15%.	

- 1) En la resolución se comienza pensando en un producto particular (lentejas) al que se le asigna un precio de \$4:
 - a) ¿Creés que esta estrategia es útil para resolver este problema? ¿Por qué?
 - b) ¿Considerás que es necesario comenzar a pensarlo de esta forma o podría haberse encarado de otra manera?
 - c) Si hubieses tenido que resolver este problema, ¿hubieras elegido esta misma estrategia para comenzar o lo hubieras hecho de alguna otra forma? Explicá qué otra estrategia hubieses elegido.
 - 2) En la última fila de la primera parte del cuadro, aparece la frase *Respuesta Parcial*, ¿por qué se hace esta aclaración? ¿Considerás que podría finalizarse la resolución del problema con esta respuesta?
 - 3) En el segunda parte del cuadro continúa la resolución del problema, allí se introducen dos letras:
 - a) ¿Por qué creés que fue necesario introducirlas?
 - b) ¿Por qué no alcanzaba sólo con una?
 - c) Para las dos letras que se introducen, ¿cuál es el uso que se les da? ¿Es el mismo para ambas?
 - 4) Este problema, ¿podría haberse resuelto sin introducir letras? ¿Por qué?
 - 5) ¿Cuál es el argumento en el que se basa el resolutor para decidir que es más conveniente comprarle a “Don Cholo”? En esta decisión, ¿influye el uso que se hizo de las letras? Explicar.
- Para finalizar: A partir de lo discutido en la puesta en común realizar una reflexión sobre lo aprendido en la resolución de este trabajo.

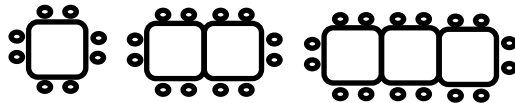
En este tercer trabajo se propone a los estudiantes revisar la resolución de una situación problemática, poniendo el foco en las estrategias usadas para llegar a la solución. Así, se intenta seguir reflexionando acerca del uso de las letras (variable simbolizada) y sobre la validez de apelar a un valor específico para abordar la resolución de la situación, cuya discusión fue iniciada en el primer trabajo del Portafolio. De esta manera se espera que los estudiantes adviertan la necesidad de recurrir a simbolizar variables para arribar a la solución general del problema y justificar.

Trabajo N°4

Dadas las siguientes situaciones problemáticas:

1) En el supermercado La Esquina, el sachet de 900 g de yogur bebible cuesta \$7 y el sachet de 1,3 kg cuesta \$9. ¿Puede decirse que las variables “cantidad de yogur” y “precio del yogur” son proporcionales?

2) En una importante reunión se ofrece una cena para todos los invitados. A medida que se van sumando comensales se agregan mesas como muestra el siguiente esquema:



- ¿Cuántas sillas se necesitan para armar 30 mesas? ¿Y para armar 97 mesas?
- ¿Es posible que se sienten 96 personas sin que sobren lugares? En caso afirmativo, ¿cuántas mesas serían necesarias?

3) Una compañía de luz eléctrica cobra a sus clientes un monto fijo de \$110,25 y el costo por kwh consumido es de \$5,2. La compañía de la competencia cobra \$150 de monto fijo y \$4 por kwh consumido. ¿Para qué consumos la primera compañía es más conveniente que su competidora?

Te pedimos que resuelvas los tres problemas, volcando en la hoja cada idea que pusiste en juego a la hora de tu resolución, es decir, debés escribir todo lo que pensaste para llegar a la respuesta. Si hubo intentos que no te condujeron a la resolución correcta, también deberán figurar aquí. Nos interesa cómo lo pensaste.

Una vez resueltos contesta las siguientes preguntas:

1) Para resolver los problemas, ¿necesitaste usar letras? ¿Por qué? (Recordá que te estamos preguntando acerca de la resolución de cada uno de los tres problemas, si en algunos la respuesta es sí y en otros no, indica cada caso y explicá).

2) En aquellos que utilizaste letras,

- ¿creés que podrías haberlo resuelto correctamente sin usarlas?
- ¿qué uso (o usos) le diste a la letra? Explicá cada uso
- En alguno de los problemas, ¿le asignaste a la misma letra usos distintos? ¿cuáles? Explicá

Para finalizar: A partir de lo discutido en la puesta en común realizar una reflexión sobre lo aprendido en la resolución de este trabajo.

En el trabajo número 4 del Portafolio se pretende que los estudiantes resuelvan distintas situaciones del libro de texto utilizado en el curso, reflexionando acerca de cómo abordaron cada una de esas resoluciones, atendiendo siempre a la necesidad o no de simbolizar las variables involucradas. En las situaciones propuestas se ponen en juego distintos usos de la variable; apuntamos con este trabajo a que puedan advertir y explicitar

esos distintos usos. Al igual que en los trabajos anteriores se propone la realización de una reflexión luego del intercambio grupal acerca de las resoluciones y las respuestas dadas a las preguntas planteadas sobre la necesidad o no de simbolizar (usar letras) y de los distintos usos de las variables involucradas.

Problema N° 5

1) Revisar todos los trabajos del Portafolio y seleccionar, para cada uso de la letra (como número general, como incógnita y como variable en relación funcional), un problema en el que hayas necesitado de ella para resolverlo. Si en el portafolio no encontraras un problema para alguno de los usos de la letra podés buscar en el libro.

Para cada problema seleccionado:

- escribir el enunciado y resolverlo
- indicar cuál es el uso que se le dio a la letra en la resolución (como número cualquiera, como incógnita y como variable en relación funcional) y explicitar si hubo un solo uso o varios
- explicar por qué fue necesaria la introducción de una letra para la resolución ¿Se podría haber resuelto sin usar letras?

Reflexión final del Portafolio

Realizar un escrito en donde vuelquen sus impresiones acerca de todo lo trabajado en el Portafolio. Indiquen qué consideran que aprendieron acerca de los distintos usos de las letras en Matemática, qué aspectos les parece que necesitan reforzar y cómo piensan que ha sido su propia evolución en cuanto a este conocimiento desde el inicio del Portafolio hasta el día de hoy.

Como último trabajo del Portafolio, se pretende que los estudiantes elijan de los problemas del libro de texto o del Portafolio aquellos en los que se hace necesario el uso de letras para su resolución. Aquí apelamos a lo aprendido en los trabajos previos, ya que esta es un tipo de consigna que se les ha presentado con anterioridad y acerca de la cual han hecho una reflexión metacognitiva con respecto a sus propias resoluciones. Tanto al momento de seleccionar consignas como de resolverlas, se espera que puedan reconocer cuándo se requiere simbolizar sino también qué uso de la variable se pone en juego en la resolución.

Para dar un cierre al trabajo realizado a lo largo del Portafolio, se les propone a los estudiantes realizar una reflexión metacognitiva final que implique realizar una mirada del recorrido realizado con la intención de valorar el proceso de aprendizaje y advertir qué se aprendió y qué aspectos se deben mejorar.

Consideramos que la sola resolución de las situaciones problemáticas, sin el acompañamiento de instancias de reflexión, no permitirían desarrollar el tipo de conocimiento buscado, que implica la toma de conciencia de los distintos usos de la variable y de la utilidad de simbolizar ante ciertas situaciones.

Reflexión acerca de la implementación del Portafolio

Con el portafolio presentado nos propusimos fomentar una reflexión por parte de los estudiantes acerca de cuándo es útil recurrir a las letras para simbolizar variables y cuáles son los distintos usos que pueden aparecer según la tarea a resolver. Desde el inicio de la experiencia, fuimos conscientes de que el tipo de trabajo que propondríamos resultaría diferente al que usualmente se realiza en una clase de matemática, tanto en lo relativo a la dimensión metacognitiva como al tipo de consignas a resolver. En general, los estudiantes están acostumbrados a que las tareas que se realizan en la clase de matemática sean simplemente resolver ejercicios o situaciones problemáticas y no, analizar resoluciones, seleccionar enunciados o escribir reflexiones. Esta particularidad en el tipo de trabajo propuesto acarreó algunas dificultades y en este apartado nos interesa compartir algunas de ellas.

En relación con la resolución de los trabajos del Portafolio, mencionamos que percibimos ciertas dificultades en la resolución de ciertas consignas. Por ejemplo, en el Trabajo 2 se solicitaba que seleccionaran de una lista de actividades aquellas que requirieran el uso de símbolos y que resolvieran solo una de dichas actividades. Tal como se mencionó anteriormente, la intención didáctica era que, a partir de la lectura del enunciado, los estudiantes anticiparan cómo resolverían la situación y evaluaran la pertinencia o no de apelar al uso de letras para simbolizar variables. Esta intencionalidad no pudo concretarse puesto que los estudiantes, primero, resolvieron todas las actividades y, luego, eligieron aquellas que resolvieron usando letras. Entendemos que esta manera de resolver no permite desarrollar el tipo de análisis y reflexión que buscábamos al plantear la consigna. Consideramos que, para colaborar en el desarrollo de la capacidad metacognitiva, es importante ejercitar la capacidad de anticipar qué tipo de resolución implicará cierta actividad a partir de su enunciado. Esto favorece el conocimiento metacognitivo acerca de la tarea y el desarrollo de comportamientos

“deliberados” ante una resolución; esto es, seleccionar qué estrategias y recursos son útiles para resolver antes de comenzar a hacerlo

Otra dificultad en torno a las consignas se refiere al pedido de realización de una reflexión metacognitiva al finalizar cada trabajo. En un inicio, no fue considerado por los alumnos como parte importante de la resolución de la tarea propuesta, pese a ser un ítem de la consigna. Cuando comenzaron a percibir su importancia, les costó realizar las reflexiones escritas. A medida que fueron avanzando en los trabajos, sus escritos fueron más ricos y lograron focalizar en sus procesos de pensamiento en torno al uso de los símbolos en la resolución. Consideramos que la realización de una reflexión metacognitiva es una actividad cognitivamente exigente y que para su aprendizaje es necesario ejercitarla; no es posible adquirir esta capacidad mediante la explicación de un profesor. De esta manera, si bien el docente puede “modelar” la actividad de reflexionar y puede ayudar a identificar los asuntos importantes sobre los cuales reflexionar, los estudiantes deben tener un espacio en la clase para hacerlo.

En relación con el uso de las letras para simbolizar variables encontramos que algunos estudiantes, al inicio del portfolio, no advirtieron la diferencia de “status” (Barallobres, 2000) entre usar una letra como “etiqueta” (por ejemplo, usar PV para referirse a pintura verde en la actividad 4 del Trabajo N°2) y una letra para denotar una variable. El primer caso, está asociado a contextos aritméticos y el segundo, a contextos en los que el álgebra resulta útil.

Otra dificultad que encontramos tiene que ver con que los estudiantes traían de su escolaridad previa una fuerte imagen conceptual acerca del uso de las letras para simbolizar: siempre es una incógnita y se simboliza con una x . De esta manera, en algunos casos forzaron en sus resoluciones el planteo de ecuaciones para intentar “averiguar la x ” (por ejemplo, en el ítem b del Trabajo N°1, al advertir que el valor de la herencia era desconocido, intentaron averiguarlo, planteando una ecuación que no reflejaba las condiciones ni los datos del problema).

Nos interesa resaltar que todas estas dificultades pudieron ser visibilizadas a partir de propiciar un espacio de reflexión en la clase sobre las resoluciones y el uso que los estudiantes hicieron de las letras. Consideramos valioso que dichas dificultades hayan surgido pues

muchas veces pasan desapercibidas, no solo para el docente sino también para el mismo estudiante. Es por esto que reafirmamos la importancia de ofrecer espacios de reflexión metacognitiva junto con los estudiantes acerca de sus errores y dificultades.

Conclusiones y Recomendaciones

Tal como mencionamos anteriormente, al inicio del porfolio los estudiantes tenían poca experiencia en la elaboración de reflexiones y una concepción de variable muy ligada al uso como incógnita. Consideramos que el trabajo realizado colaboró tanto en el desarrollo de la dimensión metacognitiva como en la toma de conciencia sobre sus concepciones. A modo de ejemplo presentamos fragmentos de reflexiones finales elaboradas por estudiantes que participaron de la experiencia

“Aprendí que una letra puede tener diversos usos (...) yo conocía la incógnita, que es una letra cuyo valor es desconocido pero que es necesario para la resolución arribar a él. Me costó diferenciar este uso y reconocer cuándo una letra representa un número general...”

“A lo largo del porfolio reforcé y comprendí mejor los diferentes usos de letras y símbolos, ya que por ahí antes hacía los mismos ejercicios sin saber en realidad cuál es la diferencia que existe entre los distintos usos o quizás utilizaba letras que nada tenían que ver con la resolución del ejercicio. Por lo que este trabajo me ayudó a ver los ejercicios desde otro punto de vista y no al que estaba acostumbrada”.

Para finalizar queremos resaltar la importancia de la reflexión metacognitiva a lo largo de toda la formación universitaria, desde los primeros años hasta el final de la carrera. Si bien esta experiencia fue realizada en el contexto de un taller de matemática, consideramos que la dimensión metacognitiva puede trabajarse desde las distintas disciplinas que intervienen en la formación profesional. En el desarrollo de la autonomía y de la capacidad de aprender a aprender que se busca en los estudiantes universitarios, la metacognición tiene mucho que aportar.

Referencias

- Alurralde, F. e Ibarra L. (2007). El uso de las letras en álgebra: Análisis de una evaluación de estudiantes de primer año de ingeniería. *Revista de Educación Matemática*. Recuperado de <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/issue/view/963>.
- Anijovich, R. (2010). La retroalimentación en la evaluación en Anijovich, R (comp.) *La Evaluación significativa*. Buenos Aires:Paidós.

- Arcavi, A. (1995). El sentido de los símbolos: Generación de intuiciones en la Matemática formal. *Actas de VII JAEM*, Madrid.
- Barallobres, G. (2000). Algunos elementos de la didáctica del álgebra. Recuperado de https://juliobaigorria.files.wordpress.com/2016/04/ruptura_de_la_aritmetica-algebra.pdf.
- Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation, and other more mysterious mechanisms. In Reiner, F. & Kluwe, R. (Eds.) *Metacognition, motivation, and understanding*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Carnelli, G., Cesaratto, E., Falsetti, M., Formica, A. y Marino, T. (2013). *Matemática en Contexto*. Buenos Aires: Ediciones UNGS.
- Desoete, A. (2011). Metacognition and mathematics in the classroom. In Warnick, J., Warnick, K. & Laffon, A. (Eds.) *Educational Policy and Practice: The Good, the Bad and the Pseudoscience. Volume II*. NY: Nova Science Publishers.
- Flavel (1979). Metacognition and Cognitive Monitoring. A new area of cognitive-developmental inquiry. *American Psychologist*, 34 (10), 906-911.
- Garófalo, J. & Lester, F. (1985). Metacognition, cognitive monitoring and mathematical performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 16(3), 163-176.
- González, F. (1996). Acerca de la metacognición. *Paradigma*, 14(17), 109 – 135. Recuperado de: https://www.academia.edu/6250971/ACERCA_DE_LA_METACOGNICIÓN
- Juárez López, J. (2011). Dificultades en la interpretación del concepto de variable en profesores de matemáticas de secundaria: un análisis mediante el modelo 3UV. *Números*, 76, 83–103. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/3573/1/Ju%C3%A1rez2011DificultadesNumeros76.pdf>.
- Lai, E. (2011). Metacognition: A literatura review. Research Report. Recuperado de http://images.pearsonassessments.com/images/tmrs/Meta-cognition_Literature_Review_Final.pdf.
- Mevarech, Z. & Fridkin, S. (2006). The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and metacognition. *Metacognition Learning*, 1, 85-97.
- Peral, L. y Gómez, J. (2003). Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario. *Mosaicos Matemáticos*, 11.
- Rodríguez, M (2012). Resolución de Problemas en Rodríguez, M. & Pochulu, M. (comp.) *Educación Matemática. Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Buenos Aires: Ediciones UNGS – EDUVIM.
- Trigueros M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el Álgebra. Recuperado de <http://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21465/93436>.
- Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa*. México: Trillas.
- Yang, C. & Lee, S. (2013). The Effect of Instruction in Cognitive and Metacognitive Strategies on Ninth-Grade Student` Metacognitive Abilities. *New Waves. Educational Research and Development*, 16(1), 46-55.

Autoras:

Tamara Marino

tmarino@ungs.edu.ar

Profesora Universitaria de Matemática (UNGS, 2004) y Licenciada en Enseñanza de la Matemática (UTN, 2010). Ha realizado un Diplomado Superior en Constructivismo y Educación (FLACSO, 2010) y actualmente desarrolla estudios de doctorado (PIDE).

Investigadora docente Asistente con dedicación exclusiva en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS). Desarrolla actividades de docencia y coordinación académica en la materia Taller de Matemática del Curso de Aprestamiento Universitario para los ingresantes a la universidad (UNGS). Ha participado en diversos proyectos de investigación en el área de Educación Matemática y actualmente forma parte del proyecto “*Prácticas de enseñanza en la escuela secundaria y en el nivel superior: Posibilidades y obstáculos para la construcción del saber en el aula*” del área de Educación.

Ha participado en varios congresos y realizado distintas publicaciones en el área de Educación Matemática.

Daniela Isla Zuivalde

dislazuivalde@msn.com

Profesora y Licenciada en Matemática (UCS, 2009). Investigadora docente Asistente con dedicación semiexclusiva en la Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS).

Desarrolla actividades de docencia y de coordinación académica en la materia Taller de Matemática de Curso de Aprestamiento Universitario para los ingresantes a la universidad (UNGS) y en la materia Probabilidad y Estadística en UTN (Regional Pacheco). Participa en proyectos de investigación en el área de Educación Matemática. Actualmente forma parte del proyecto “*Conocimiento matemático y didáctico en la formación de profesores de Matemática*”.

Ha participado en varios congresos y realizado distintas publicaciones en el área de Educación Matemática.