

LA UTILIZACIÓN DE DIFERENTES REPRESENTACIONES PARA FACILITAR LOS PROCESOS DE FORMACIÓN Y DESARROLLO DE LA PARÁBOLA

Arcelia G. F. Gaspar De Alba Diéguez; Otilio B. Mederos Anoceto; Sivia A. Mayén Galicia
UACJ; UadeC, UACJ

arceliagaspar@hotmail.com, omederosa2081@yahoo.es, mayazuc@gmail.com

Resumen

En este trabajo se propone la elaboración y aplicación de un procedimiento didáctico dirigido a estudiantes de bachillerato para que participen en el desarrollo de heurísticas a través de las cuales puedan llegar al concepto y a diferentes representaciones de la parábola utilizando la vía genética; y para que estas actividades puedan ser aplicadas por los profesores para abordar temas subsecuentes.

Palabras clave: *Parábola, representaciones, procedimiento didáctico, formación conceptual, desarrollo conceptual*

Introducción

Dentro de los contenidos de la Geometría Analítica que se imparten en Matemáticas III en el nivel medio superior en México, se incluye el estudio de la parábola: concepto, elementos, ecuación y grafo (SEP, 2010), considerando como problema fundamental del curso, pasar de un tipo de representación a otra. La base del estudio de la Geometría Analítica es la definición de un Sistema de Referencia, llamado también Sistema de Coordenadas (Fuller y Tarwater, 1995). Dos de sus problemas fundamentales son: *dada una ecuación algebraica, caracterizarla, interpretarla geoméricamente y construir la gráfica respectiva; definir el lugar geométrico descrito por un objeto que se mueve siguiendo una ley específica.*

Una de las tareas de nuestro trabajo científico, será el diseño de un procedimiento didáctico para que los estudiantes participen en el desarrollo de heurísticas a través de las cuales puedan llegar a la formación del concepto y a diferentes representaciones de la parábola; y para que estas actividades puedan utilizarse por los profesores para abordar los temas subsecuentes relacionados con el curso: conversión de la forma ordinaria a la general, de la general a ordinaria y aplicaciones. Por tanto, en la presente investigación proponemos una alternativa de solución al problema didáctico siguiente: *¿Cómo hacer que los estudiantes apliquen esos problemas matemáticos a la solución de problemas del contexto?* En la dirección que se dará a este trabajo de investigación, nos fundamentaremos en la dialéctica herramienta-objeto de Douady (1984), para explicar el procedimiento didáctico, ya que se utilizará la parábola como herramientas para resolver problemas del contexto (objeto).

Respecto a la organización de la enseñanza, Douady (1984) señala tres puntos: la dialéctica herramienta-objeto, la dialéctica antigua-nueva y los juegos de marcos, los cuales se engranan a partir de problemas que responden a varias condiciones.

En los problemas se tiene:

- El enunciado (contexto y preguntas) tiene sentido para los alumnos.
- De acuerdo a sus conocimientos, los alumnos pueden iniciar un procedimiento de solución, pero no pueden resolver completamente el problema.

- Los conocimientos buscados por el aprendizaje (contenido o método) son herramientas adaptadas al problema.
- El problema puede formularse al menos en dos marcos diferentes (el algebraico y el geométrico).

Dialéctica herramienta-objeto. Dado un problema, la dialéctica herramienta-objeto es el proceso siguiente, con varias fases que cubren funciones diferentes.

- a) Antigua
- b) Nueva búsqueda implícita
- c) Explicitación e institucionalización local.
- d) Institucionalización-estatuto de objeto
- e) Familiarización-reinversión
- f) La tarea o el nuevo problema se hace más complejo

Por otro lado, la importancia de los sistemas de representación a la hora de abordar un tópico matemático es inminente en la comunidad de educación matemática. Por lo tanto, consideramos las representaciones semióticas de Duval (1993, 2003, 2006).

Los estudiantes confrontan muchas dificultades al pasar de una representación a otra (Gaspar de Alba, 2007), como por ejemplo, no reconocer la parábola a partir de sus elementos: foco, directriz, vértice, lado recto, excentricidad; no relacionar la expresión analítica (ecuación) de la parábola con los elementos antes referidos; no asociar la ecuación con su gráfica; o no relacionar el gráfico con la tabla de datos, entre otros. Por tanto, prestaremos especial atención a problemas de esta naturaleza en el proceso de aprendizaje y de enseñanza, por lo que pretendemos el diseño de actividades didácticas sobre diferentes tipos de representación de la parábola y sobre el paso de una representación a otra. En concreto, nos centraremos en los procesos de formación y desarrollo de los conceptos de la parábola, así como en implementar las herramientas didácticas y de las TIC's idóneas para observar el desarrollo o en su caso, la evolución que muestran los estudiantes que participen en dicho proceso, mediante cuestionarios de exploración y evaluación; diseño de actividades en Cabri Geometre II y hojas de trabajo para apoyar las actividades del software que nos permitirán observar los "registros de representación" (Duval, 2006) de los estudiantes, una vez realizadas las actividades, y por otra parte, si este método es eficaz como complemento de herramientas que ha de utilizar el profesor en su clase. Con lo que pretendemos facilitar el proceso de formación del concepto de parábola, su visualización y cambios en su representación.

En el estudio que nos antecede (Gaspar de Alba, 2007), confirmamos la necesidad del uso de diferentes registros de representaciones para la comprensión del concepto de parábola, ya que los estudiantes se enfrentan por primera vez a un proceso de formación por la vía genética (Douady, 1993). Podemos asegurar la existencia del **problema científico**: ¿Cómo contribuir a que el profesor o profesora apliquen técnicas utilizando, entre otras, diferentes registros de representaciones que le permitan al estudiante desarrollar estrategias de aprendizaje para facilitar su participación en los procesos de formación y desarrollo de la parábola?

Metodología

Centraremos nuestra atención en analizar el proceso de formación y el proceso de desarrollo de la parábola, en los estudiantes. Para este efecto, contamos con una muestra formada por un grupo de aproximadamente 40 estudiantes de bachillerato, de entre 16 y 18 años de edad, de una Escuela Preparatoria de Ciudad Juárez.

Para el desarrollo de la investigación se proponen distintas etapas: revisión bibliográfica elaboración y aplicación de un procedimiento didáctico para ampliar los conceptos de parábola expresados mediante diferentes registros de representación; desarrollar estrategias de aprendizaje que faciliten los procesos de formación y desarrollo de la parábola; y validación de los instrumentos ya mencionados por métodos cualitativos y cuantitativos. En el nivel teórico, se emplearán el análisis-síntesis e inducción-deducción, análisis histórico y el enfoque sistémico; para el nivel empírico, la encuesta; para el nivel estadístico, los métodos de la Estadística Descriptiva y el Estudio de casos.

Para lograr nuestro propósito hemos iniciado con la revisión de libros históricos, libros de texto; el análisis de artículos científicos, tesis de maestría y doctorales y páginas electrónicas, que van desde los orígenes de las cónicas en el siglo VI a.C. hasta nuestros tiempos.

El desarrollo epistemológico y la evolución de la parábola, es la *primera dirección* en la que apunta nuestra investigación, para lo que tomaremos como fundamento matemático del tema, libros de Descartes (Smith y Latham, 1954) y Anfossi (1958); documentos de investigación: De Guzmán (1986) y Yarnoz (s. f.) Una *segunda dirección* que consideramos importante para el desarrollo de nuestro trabajo es la exploración de libros de texto de algunos autores: Goodman (1980), Zill (1987), Lehmann (1990), Fuller y Tarwater (1995), López y otros (1997), Fuenlabrada (2007), Cuellar (2008) y Mata (2010), para observar cómo se aborda el concepto de la parábola y sus representaciones. En la *tercera dirección* se realiza una exploración sobre investigaciones previas a la nuestra, con la finalidad de conocer cómo es que se ha tratado el proceso de desarrollo del concepto de parábola, su ecuación y sus diferentes representaciones.

Antecedentes

Evolución de la parábola: Los primeros vestigios que tenemos sobre la existencia de la parábola datan del siglo VI a. de J.C. fueron los Pitagóricos quienes por primera vez la mencionaron, sin embargo no se referían al concepto que ahora utilizamos Ellos describían: **Parabolé** (fig. 1), es yuxtaponer a un segmento dado AB un rectángulo R que sea igual (en área) a un triángulo dado (*parabolé*). Para nosotros, actualmente, equivale a resolver $ay = S$ (De Guzmán, 1986).

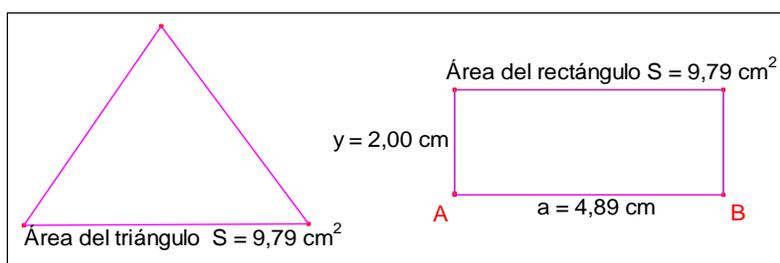


Figura 1: Parabolé

A Menaechmus (380–320 a. de J. C.) se le atribuye el descubrimiento de las cónicas tal como las conocemos ahora. La *parábola* (del griego παραβολή) es la sección cónica resultante de cortar un

cono recto con un plano paralelo a su generatriz (variante de la vía genética). La parábola resulta cuando el plano corta al cono en forma diagonal pero interceptando solo una generatriz del cono (fig. 2).

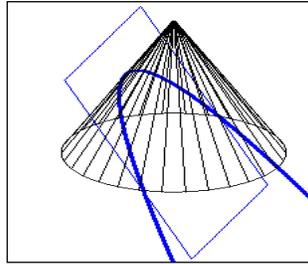


Figura 2: Corte transversal en el cono

Sin embargo, es el matemático griego Apolonio de Perga (siglo II a. de J. C.) el primero en estudiar las curvas cónicas y encontrar la propiedad plana que las definía, demostró que no es necesario considerar exclusivamente secciones perpendiculares a una generatriz del cono, que de un cono pueden obtenerse la elipse, la parábola y la hipérbola, solo variando la inclinación del plano que corta al cono, que el eje no necesariamente es perpendicular al plano de la base circular, que puede sustituirse el cono de una hoja por el cono de dos hojas lo cual le lleva a descubrir que la hipérbola es una cónica con dos ramas (Yarnoz, s. f.).

Ya el estudio de la Geometría Analítica utilizando herramientas del Álgebra, y encontrando representaciones analíticas de sus objetos, fue presentado por Descartes en su libro llamado Géométrie que se publicó en el año de 1637. En esta obra se determinan representaciones analíticas de diferentes curvas con representaciones geométricas conocidas. La mayoría de los matemáticos de los siglos XVII y XVIII, contribuyeron al desarrollo de esta nueva teoría, que en la actualidad, se fundamenta en la utilización de diferentes sistemas de coordenadas (Anfossi 1958).

Anfossi (1958) define a la Parábola como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo, llamado foco y de una recta fija llamada directriz y partiendo de la definición, obtiene su representación gráfica (fig 3).

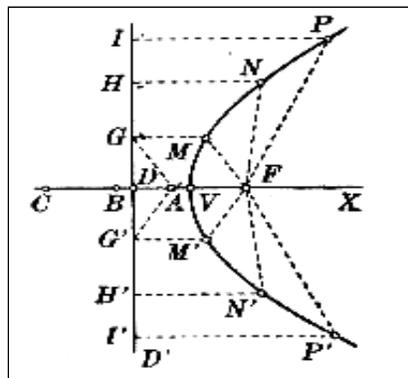


Figura 3: La parábola a partir de su definición

Para la obtención de la ecuación de la parábola, define al eje "X" como el eje de simetría, asigna a la directriz, al punto fijo, al punto móvil y al vértice las letras D, F, M y O respectivamente, a la distancia entre la directriz y el vértice le llama p (fig. 4). Posteriormente obtiene las distancias entre DM y MF las iguala y realizando las operaciones algebraicas respectivas llega a la ecuación de la parábola $y^2 = 4px$

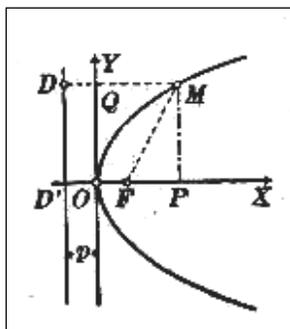


Figura 4: Parábola con el punto "M" móvil

En nuestra búsqueda, encontramos con autores como Goodman (1980), Zill (1987), Lehmann (1990), Fuller y Tarwater (1995), López, Regueiro y otros (1997), Oteyza, Lam y otros (2001), Fuenlabrada (2004) y Cuellar (2009) quienes obtienen la parábola como sección cónica de la misma forma en que lo hizo Menaechmus y encuentran la ecuación de la curva como la presenta Anfossi (1958), si acaso difieren en algunos problemas de aplicación, sin embargo, en ninguno de los libros se muestran actividades donde el alumno construya la parábola, identifique sus elementos y llegue a la ecuación, básicamente presentan los mismos tipos de problemas, dados los elementos encontrar la ecuación y dada la ecuación buscar los elementos.

En Oteyza, Lam y otros (2001), y Fuenlabrada (2007), incluyen un disco de material interactivo que de alguna manera permite la visualización de las propiedades y los elementos de la parábola, sin embargo, la forma en que presenta los dos problemas fundamentales de la parábola no difieren en nada con los otros autores que hemos citado.

En Mata (2005), lo novedoso es la caracterización geométrica de la parábola, ya que el estudiante debe construir con materiales manipulables la cónica y a partir de esta construcción, visualizar la curva. Difiere de las otras obras en la presentación de los materiales, las tablas y los gráficos, pero define la parábola, no promueve en los estudiantes la formación del concepto de parábola.

Con este análisis observamos que los autores se inclinan por la resolución de problemas, no proponen actividades para facilitar el proceso de formación, utilizando la vía genética, y el proceso de desarrollo del concepto de parábola en el alumno; todos coinciden en la forma de presentar la definición, los elementos y la resolución de los problemas, solo algunos manejan construcciones, tablas y elaboran distintas actividades en el intento de lograr el aprendizaje bajo otra perspectiva.

Investigaciones previas: Luna (1997) propone utilizar y diseñar modelos matemáticos o físico-matemáticos que permitan analizar situaciones reales, a través de las prácticas, alrededor de los temas de la Geometría Analítica, así como obtener y registrar los efectos que generan. La idea

fundamental de estas prácticas es vincular la parte teórica con la práctica, de manera tal, que esta relación ocurra de manera natural. Las prácticas se presentan desde diferentes marcos de representación y se intenta provocar un buen nivel de reflexión en el alumno para que trate de comprender lo que se pide en cada actividad. La experiencia del maestro indica que el solo hecho de cambiar de lugar físico, hace que el alumno cambie su actitud y por tal motivo su visión.

Fernández (2003), presenta básicamente los contenidos tradicionales de las cónicas, difiere con los materiales que revisamos en la forma de construirlas, presenta inicialmente la definición, ecuación y el grafo de la parábola, pero luego inicia el proceso de construcción de la cónica con ayuda del Cabri. Con este tipo de actividades se permite la manipulación de las cónicas y definitivamente la visualización facilita el proceso de formación y desarrollo de la parábola.

Gaspar de Alba (2007), presenta una serie de actividades cuyo propósito fue el de analizar los efectos y dificultades que produce en el alumno de tercer semestre de preparatoria el aprendizaje de las cónicas a través del uso de la tecnología en el contexto geométrico, con una implementación fundamentada en diversas representaciones. En el proceso de investigación se introdujeron a la práctica educativa una serie de actividades para lograr que el alumno interactuara con su entorno y construyera el conocimiento en base a su propia experiencia. Para la implementación de esta investigación se aplicó un instrumento de diagnóstico, se elaboraron nueve actividades donde el alumno construía las cónicas. Para evaluar el alcance del objetivo se diseñaron dos entrevistas, tres evaluaciones parciales y una evaluación semestral. Se exploraron las ventajas que aporta el uso del *Cabri Geometre II* en el desarrollo de sus esquemas de visualización, en el aprendizaje de las cónicas en particular y de la matemática en general. Con estas actividades se logró la participación individual y grupal, se implementó el trabajo colaborativo, se acrecentó la confianza en los participantes, se generaron discusiones, se incrementaron las aportaciones de los alumnos, se definieron las cónicas, se reprodujeron cortes en conos y se identificaron las curvas. No se logró que se efectuaran cambios de representaciones geométricas a representaciones algebraicas, ni la identificación de las ecuaciones de las cónicas entre varias ecuaciones de segundo grado. Considera que lo anterior se debe a que las actividades fueron diseñadas para el manejo del *Cabri Geometre II*, la definición de las cónicas, la visualización de los cortes generadores de las cónicas y el trabajo colaborativo y no para lograr la participación de los alumnos en los procesos de formación y desarrollo de las cónicas.

Rojas y otros (2009), presentan los resultados de la investigación sobre la importancia del uso de la tecnología computacional en los diferentes sistemas de representación de la parábola. El instrumento incluye actividades en la articulación de los sistemas de representación: primero, conversión del sistema algebraico al gráfico, segundo, conversión del sistema gráfico al algebraico. Los resultados reflejaron que se debe tener en cuenta, en el proceso de enseñanza de la parábola, la conversión del sistema gráfico al algebraico para una mejor comprensión del tema en estudio; los resultados estadísticos indican que sí hubo diferencia significativa la articulación de los sistemas de representación, algunas representaciones usadas en la tecnología difieren de las representaciones convencionales, los estudiantes alcanzan una mejor comprensión en la articulación de los sistemas de representación con el uso del software educativo *Winlab*, que facilita el aprendizaje en la articulación de los sistemas de representación de la parábola debido a que el uso de las gráficas favorece significativamente el entendimiento del concepto matemático.

En Álvarez (s. f.), la idea es explorar la construcción de una parábola a partir de ciertos elementos y en este contexto, revisar las propiedades de sus tangentes. Define a la parábola del mismo modo que todos los autores que se han analizado, hace referencia de la propiedad óptica de la parábola y recomienda la construcción de la parábola con la técnica del doblado de papel.

De la Rosa (s. f.), aborda el concepto de parábola en diversas formas y realiza conexiones entre las diferentes maneras de introducir el concepto. Construye la definición geoméricamente, se reconocen los elementos básicos de la parábola y se relacionan las construcciones con conceptos en el lenguaje de la Geometría Analítica. Se encuentra la ecuación de la parábola en distintas posiciones con respecto a los ejes coordenados, se establece una metodología para abordar el aprendizaje de las cónicas y se ejemplifica con el caso de la parábola. Se utiliza el procesador geométrico GeoGebra para apoyar la visualización de la parábola y la realización de las actividades propuestas. La importancia de este estudio se debe a que las actividades se realizan en una secuencia que no empieza a partir de la definición de un sistema de coordenadas, sino aprovechando la definición puramente geométrica de ella, lo cual los lleva al uso de la definición geométrica para poder observar propiedades relevantes de la parábola.

En general, en todos los materiales que se revisaron, se define la parábola, se determina su ecuación a partir de los datos y a partir de la ecuación se obtienen sus datos y lugar geométrico, pero solo en algunos se utilizan diferentes representaciones para facilitar los procesos de formación y desarrollo de la parábola, que es en sí el propósito de nuestro proyecto doctoral.

Referencias

- Alvarez, M. (2010). *Revista digital, Matemática, Educación e Internet. De la Parábola y sus tangentes*. Recuperado el 18 de septiembre de 2010 de <http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/>
- Anfossi, A. (1958). *Geometría Analítica*. México: Progreso.
- Cabri-Géomètre (1995). *Enseñanza y aprendizaje de la geometría*. Recuperado el 22 de Marzo del 2009 desde <http://ued.uniandes.edu.co/ued/servidor/em/recinf/software/cabri.html#40>
- Cuéllar, J. (2008). *Matemáticas III. Geometría Analítica*. México: Mc Graw Hill.
- De Guzmán, M. (1986). *Los Pitagóricos*. Recuperado el 4 de agosto de 2010 de <http://www.upasika.com/docs/atica/Guzman%20Miguel%20de%20-%20Los%20pitagoricos.pdf>
- De la Rosa, L. (sf). *Una propuesta didáctica para abordar la parábola utilizando un procesador*. Recuperado el 20 de septiembre de 2010 de <http://www.geometriadinamica.org/actividad/Actividades/Construyendoalaparabola.pdf>
- Douady, R. (1985). Juego de marcos y dialéctica herramienta – objeto. Versión en español Ernesto Sánchez S. y Gonzalo Zubieta B. *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas: Escuela Francesa. DME-CINVESTAV (1993)*.
- Douady, R. (1993). *Juego de Marcos*. *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas, Escuela Francesa, Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV-IPN. México*.
- Duval, R. (1993). *Semiosis y Noesis*, *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas, Escuela Francesa, Departamento de Matemática Educativa. CINVESTAV – IPN. México*.
- Duval, R. (2003). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Recuperado el 28 de Marzo del 2010 desde ima.ucv.cl/lconsigliere/archivos/didactica_de_las_funciones_2003/Semiosis.doc

- Duval, R. (2006). *Quelle Sémiotique Pour L'analyse De L'activité Et Des Productions Mathématiques?*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Vol. 9, No. Extra 1, 45-82.
- Fernández, H. (2003). *Construcción y Exploración de las Cónicas y de sus Propiedades usando el Cabri*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. México
- Fuenlabrada, S. (2007). *Matemáticas. Geometría Analítica*. México: Mc Graw Hill.
- Fuller, G. y Tarwater, D. (1995). *Geometría Analítica*. Wilmington: Addison Wesley Iberoamericana.
- Gaspar de Alba, A. (2007). *Efectos y dificultades que produce en el alumno de tercer semestre de preparatoria el aprendizaje de las cónicas a través del uso de la tecnología en el contexto geométrico, con una implementación fundamentada en diversas representaciones*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. México.
- Goodman, A. (1980). *Geometría Analítica y Cálculo*. México: Uthera.
- Lehmann, C. (1990). *Geometría Analítica*. México: Limusa.
- López, A., Regueiro, M., Santa, C. y Jinich, E. (1997). *Relaciones y Geometría Analítica*. México: Longman.
- Luna, J. (1997). *La geometría Analítica a través de Modelos Físicos*. Tesis de Maestría en Matemática Educativa no publicada. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez.
- Mata, P. (2005). *Matemáticas 3*. México: ST
- Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A. y Ramírez, A. (2001). *Geometría Analítica y Trigonometría*. México: Prentice Hall.
- Rojas C., Londoño N., Cañate D., Abuabara R. y Pacheco L. (2009). Efectos del uso de la tecnología computacional sobre la articulación de los sistemas de representación de la parábola en un grupo de alumnos. *Revista del Instituto de Estudios en Educación Universidad del Norte*. Recuperado el 20 de septiembre de 2010 de http://ciruelo.uninorte.edu.co/pdf/zona_proxima/10/5_Efectos%20del%20uso.pdf.
- SEP (2010). Programa de estudio, educación media superior. Dirección General del Bachillerato de la Subsecretaría de Educación Media Superior de la Secretaría de Educación Pública, México.
- Smith, E. y Latham, M. (1954). *Traducción de The Geometry of René Descartes*. New York: Dover Publications.
- Yarnoz, E. (sf). *Las cónicas*. Recuperado el 20 de septiembre de 2010 de <http://www.revista.dominicas.org/conicas.htm>
- Zill, D. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Iberoamérica