CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA A TRAVÉS DE DINAMIZAR LA REGLA DE LOS CUATRO PASOS. APROXIMACIÓN SOCIOEPISTEMOLÓGICA

Adriana Engler, Alberto Camacho
Facultad de Ciencias Agrarias. Universidad Nacional del Litoral, Argentina; CICATA-Instituto Politécnico Nacional, México, Instituto Tecnológico de Chihuahua II, México
aengler@fca.unl.edu.ar, camachoalberto@hotmail.com

Resumen
El objetivo del proyecto es hacer más dinámica, en un sentido funcional, la regla de los cuatro pasos que lleva a la determinación de la derivada de una función en los cursos de cálculo diferencial del nivel de ingeniería, incorporando en ella argumentos de carácter variacional. A partir de lo anterior, se busca diseñar una situación didáctica para el aula que permita colocar a los estudiantes en procesos de construcción del concepto derivada. Se presenta enseguida el avance en que se encuentra el estudio.
Palabra clave: *"regla de los cuatro pasos"*

Introducción

Quienes trabajamos en el aula universitaria necesitamos ocuparnos del aprendizaje matemático y de los procesos de enseñanza. Investigaciones desarrolladas buscan entender mejor las dificultades de aprendizaje del cálculo diferencial que nuestros estudiantes enfrentan. En varios casos, la investigación ha conducido a la producción de diseños instruccionales que han mostrado ser efectivos aunque no necesariamente mejoren sustancialmente los procesos de enseñanza y aprendizaje. Año a año observamos en nuestros estudiantes de primer año de ingeniería, dificultades en el aprendizaje, conocimientos insuficientes y escasa transferencia a nuevas situaciones. Esta realidad es una problemática generalizada y motiva que numerosas investigaciones educativas centren actualmente su atención en los procesos de aprendizaje y en la construcción de conocimiento matemático.
En la dirección de la enseñanza y aprendizaje de la derivada, Dolores (1996a) presentó en su tesis doctoral un profundo análisis de la problemática en relación a la enseñanza del Cálculo Diferencial y en especial del concepto de derivada. Analizó las causas que hacen que los estudiantes del nivel medio superior comprendan escasamente las ideas básicas del cálculo y en especial las relacionadas con la derivada. Como logro principal, enunció una propuesta didáctica para la enseñanza del tema en el bachillerato. En su diseño adoptó a la *variación física* como eje rector de los contenidos. Logró un acercamiento intuitivo a la derivada utilizando problemas de rapidez de variación (sin un tratamiento riguroso de los contenidos del cálculo). Los resultados mostraron que los estudiantes escasamente desarrollan un *pensamiento variacional*, incluyendo aquellos que cursan sus estudios preparatorios y que inician estudios superiores. Señaló que las causas atribuidas a esta problemática se relacionan tanto con los procesos de asimilación de los conceptos, procedimientos y relaciones básicas, así como con la planificación y ejecución del proceso de enseñanza. Esta problemática no es exclusiva de México, país donde se desarrolló el proyecto, sino que se extiende a otros países latinoamericanos.
Consecuentemente, en Dolores (1996b) se dieron a conocer los resultados de un estudio exploratorio en estudiantes de bachillerato sobre las ideas que se forman de la derivada en sus cursos ordinarios de Calculo Diferencial. Diseñó y aplicó un cuestionario donde, por un lado, se exploraron las ideas que preceden a la derivada y, por otro, las ideas relacionadas directamente con el concepto. El objeto fundamental de la investigación fue que los estudiantes pusieran en

juego sus ideas acerca de la derivada. En la primera parte investigó la cuantificación simple de la variación y la velocidad media. El análisis de las repuestas arrojó que los alumnos mostraron un escaso manejo de la noción de variación. Solo el 24% contestó correctamente.
En la segunda parte del cuestionario se exploraron las ideas de los estudiantes acerca de la derivada como límite, como la pendiente de la recta tangente y como velocidad instantánea. El autor detectó numerosas deficiencias acerca de las concepciones de la derivada como un límite. Solamente el 3,5% se mostró capaz de interpretar consistentemente la simbología utilizada en la definición de derivada. Los estudiantes no fueron capaces de reconocer que, mediante la posición límite de la secante (tangente), se puede obtener la derivada de la función. Casi la mitad de los alumnos contestaron que la derivada se mide en dos puntos y solamente el 17,8% dio la respuesta correcta. Presentaron dificultades también en la interpretación geométrica de la derivada. El 37,5% respondió dando el valor de la función en el punto al preguntarles por el valor de la pendiente de la recta tangente (consideraron $f(x) = f'(x)$). Solamente el 8% logro relacionar a la derivada con procesos de variación, con la velocidad instantánea. El 74,1% asocia el valor de la función en el punto solicitado con el valor de la velocidad instantánea.
Por su lado, Cantoral y Farfán (2000) presentaron un acercamiento novedoso basado en la investigación en Matemática Educativa. Buscaron construir una *base de significaciones* para procesos y conceptos del análisis matemático, especialmente en el nivel universitario. Enunciaron que las causas que hicieron que en los sectores académicos y universitarios se ocupen del estudio de los procesos de pensamiento avanzados se deben a: el creciente interés de los matemáticos profesionales en cuestiones de enseñanza y aprendizaje y la estabilidad y madurez que alcanzaron comunidades de investigación organizadas en torno de grupos académicos con paradigmas propios. Definieron el *pensamiento y lenguaje variacional* como una línea de investigación que, en el marco del acercamiento socioepistemológico[10], se ocupa de la articulación entre la investigación y las prácticas sociales que generan la matemática de la variación y el cambio en los sistemas didácticos. Según los autores, el acercamiento socioepistemológico incorpora cuatro componentes fundamentales en la construcción del conocimiento: 1. Su naturaleza epistemológica, 2. Su dimensión sociocultural, 3. El plano cognitivo y 4. La dimensión didáctica.
En la misma dirección, Cantoral (2004) ha sostenido que el conocimiento matemático tiene un origen y una función social asociada a un conjunto de prácticas humanas socialmente establecidas. Asume que la enseñanza y el aprendizaje constituyen tanto una práctica humana como social y que el compromiso de la Matemática Educativa con la práctica educativa de referencia da sentido a su desarrollo. El autor afirmó que el pensamiento y lenguaje variacional estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social en el que se desarrolla. Es una línea de investigación que se ocupa de estructuras variacionales específicas, desde el punto de vista matemático y fenomenológico. Estudia las funciones cognitivas que se desarrollan a través del uso de conceptos y propiedades del cambio y tiene en cuenta los problemas en lo social mediante las estructuras variacionales en la escuela y el laboratorio. En el desarrollo del escrito se resalta que el enfoque socioepistemológico se ocupa de desnaturalizar o desmatematizar el saber matemático, buscando actuar sobre prácticas de carácter social, que dan sentido y significado al saber matemático escolar. Estas prácticas pueden ser externas a la matemática:

[10] Presentado por R. Cantoral en 1977 durante el Seminario de Investigación en Matemática Educativa del Área de Educación superior del CINVESTAV –conferencia inaugural- y en una conferencia plenaria, el mismo año, en la Conference on Research in Mathematics Education en EUA.

> Por ello sus primeros instintos de organización educativa tanto al nivel de sus textos como de sus programas de formación de profesores, en tanto formas culturales de socialización del saber, usa verbos en los que reflejan su visión: predecir, argumentar, gestuar o actuar, anticipar, compartir, difundir, consensuar, estabilizar, acumular, promediar (…). De modo que difunden una noción de la matemática escolar centrada en el uso social y la funcionalidad asociada. (pp. 6-7)

- **Dinamización y Regla de los Cuatro Pasos**

La construcción del concepto de derivada no es fácil para los estudiantes de ingeniería. Sin embargo, la interpretación de su significado y su uso en la resolución de problemas en la vida profesional es indispensable.

La Regla de los Cuatro Pasos (RCP) fue desarrollada a lo largo de los siglos XVIII y XIX en diversas ramas de la ingeniería, como la topografía, astronomía y otras, apareciendo en los textos de cálculo diferencial desde finales del siglo XIX y principios del siglo XX, como se puede constatar en Sonnet (1869) y en Granville (1911). La RCP se describe en algunos de los libros de texto de cálculo diferencial para ingeniería, de la siguiente manera:

1. Se sustituye en la función x por $x+\Delta x$, y se calcula el nuevo valor de la función $y+\Delta y$.
2. Se resta el valor dado de la función del nuevo valor y se obtiene Δy (incremento de la función).
3. Se divide Δy (incremento de la función) por Δx (incremento de la variable independiente).
4. Se calcula el límite de este cociente cuando Δx tiende a cero. El límite así hallado es la derivada buscada (Granville,1980, p. 30).

Llegándose con ese proceso a la determinación de la derivada de una función $f(x)$, o sea: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

La regla ha sido ampliamente usada para determinar la derivada *por incrementos* o *por definición* de ciertas funciones elementales, algebraicas, (particularmente funciones analíticas) con las que los profesores de los niveles medio superior y superior intentan dar orientación a la propia definición de derivada que proponen a sus estudiantes. Con todo, la RCP es en cierta forma *incompleta* para establecer una organización didáctica que lleve a los estudiantes a construir el concepto de derivada antes citado. Ante esto, el objetivo del estudio es *dinamizar* la regla incorporando en ella argumentos de carácter variacional que permitan hacerla más funcional hacia el objetivo que se demanda.

La *dinamización* es la actividad central del desarrollo de nuestro proyecto. Según el diccionario de la Real Academia Española *dinamizar* significa imprimir rapidez e intensidad a un proceso.

Balbuena (2007), en la conferencia denominada Innovación y Dinamización Matemática, hizo referencia a las labores de dinamizar la matemática en el sentido de ofrecer al alumnado actividades que complementan su formación porque inciden en el desarrollo de capacidades que le ayudarán y no sólo en sus estudios de matemáticas. Existen numerosos trabajos y artículos que muestran diferentes formas de dinamizar una enseñanza o bien un conocimiento.

En nuestro caso, consideramos la RCP como un argumento que permite organizar a su alrededor los diferentes significados de la derivada que se usan para su enseñanza: *diferencia, diferencial, pendiente de la recta tangente*, etc. No obstante, la RCP muestra una buena cantidad de obstáculos para que los estudiantes universitarios la usen en procesos algorítmicos.

Como se deja ver, la RCP es una técnica que encapsula los argumentos del álgebra que se emplean para determinar la derivada de determinado tipo de funciones. En ese sentido, la derivada de expresiones, como por ejemplo $f(x) = \sqrt[5]{x}$, deviene imposible para estudiantes del primer semestre de ingeniería por la encapsulación binomial que resulta del proceso algebraico subyacente. ¿Qué haría un estudiante de primer semestre de ingeniería si le pidiéramos que derivara la función: $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x}$ a través de la RCP? Sería imposible pensar que pueda satisfacer nuestro pedido.

- **Elementos para una propuesta de enseñanza**

Las prácticas de ingeniería llevadas a cabo a lo largo de los siglos XVIII y XIX, enfatizan la utilidad del desarrollo de funciones analíticas en la forma:

$f(x + \Delta x) = f(x) + A\Delta x + B(\Delta x)^2 + \ldots + \ldots$, (Camacho y Sánchez, 2010).

No obstante, es fácil probar que esta posibilidad obedece al desarrollo del Teorema del Binomio de Newton (TBN) como: $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2} + \ldots + etc.$ Así, si desarrollamos la función del ejemplo citado anteriormente a través del TBN como: $f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^{\frac{-1}{2}} + 2(x + \Delta x)^{\frac{1}{3}}$, y la ordenamos de la siguiente manera, obtendremos:

$$f(x + \Delta x) = 4x^{\frac{-1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}} + \left(2x^{\frac{-3}{2}} + \frac{2}{3}x^{\frac{-2}{3}}\right)\Delta x + \left(3x^{\frac{-5}{2}} - \frac{2}{3}x^{\frac{-5}{3}}\right)(\Delta x)^2 + \ldots + \ldots .$$

Como se puede observar, este último recurso desencapsula los binomios en el juego algorítmico y hace más dinámico el uso de la RCP para determinar la derivada de la función.

En lo que sigue se intentó un planteamiento semejante para la determinación de la derivada en profesores y estudiantes, usando estas ideas.

Metodología

En relación a lo manifestado en el apartado anterior, a la fecha trabajamos con estudiantes y profesores del Sistema Tecnológico mexicano (DGEST), del nivel superior, así como, de la misma manera, con alumnos y profesores de la Facultad de Ciencias Agrarias de la Universidad del Litoral.

En Argentina el trabajo se extendió a docentes de diferentes niveles y modalidades a quienes se les presentó el siguiente planteo:

> *La Regla de los cuatro pasos (RCP) constituye la estructura matemática usada como una técnica para la determinación de la derivada de una función* $f(x)$.
>
> *La técnica asume que, dada* $y = f(x)$, *se llega a la derivada siguiendo los siguientes pasos:*
>
> *PRIMER PASO: Se calcula* $f(x + \Delta x)$
>
> *SEGUNDO PASO: Se calcula* $f(x + \Delta x) - f(x)$
>
> *TERCER PASO: Se divide por* Δx *, quedando:* $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
>
> *CUARTO PASO: Se aplica* $\lim_{\Delta x \to 0}$ *en ambos lados, como:* $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

De manera que de este último paso queda la derivada en cualquiera de las dos opciones siguientes: $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ *o bien:* $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ *siempre que el límite exista.*

Resuelva las actividades siguientes aplicando la RCP

Actividad 1. *Calcule la derivada de* $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x}}$

Actividad 2. *Calcule la derivada de* $f(x) = \frac{5}{\sqrt[3]{x}}$

Actividad 3. *Calcule la derivada de* $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x}$

Los docentes argentinos, a los cuales se invitó a participar de la experiencia, fueron 11 y hasta estos momentos sólo recibimos las respuestas de seis. De los que participaron en la propuesta, cuatro son docentes de facultades de ingeniería y dos del nivel medio. Dado que en todos los casos la resolución de las actividades prácticamente fueron las mismas (mucho trabajo algebraico considerando el desarrollo de $a^n - b^n$, racionalizando además los denominadores) ninguno planteó la posibilidad de utilizar el desarrollo del teorema del binomio para coeficientes fraccionarios. Se los invitó nuevamente a trabajar bajo las consignas que se enumeran a continuación.

La historia continúa…

Hace tiempo le pedimos que aplicara La Regla de los Cuatro Pasos para obtener las derivadas de diferentes funciones. Les agradecemos por la tarea realizada.

Ahora queremos compartir con usted una cuestión que nos parece interesante abordar dada la complejidad de los cálculos algebraicos realizados aquella vez.

Desarrollos binomiales

Una herramienta que permite desarrollar funciones como las analizadas en los ejemplos ya trabajados es el Teorema del Binomio de Newton.

Según el teorema del binomio $(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2} + \ldots + \ldots.$

Este teorema fue formulado en la edad media y desarrollado (alrededor de 1676) para exponentes fraccionarios por el científico inglés Isaac Newton, lo que le permitió el uso de sus métodos de cálculo recién descubiertos para resolver muchos problemas difíciles.

Teniendo en cuenta lo anterior ¿considera que este teorema podría resultar útil para la resolución de las actividades que trabajó anteriormente y que se enuncian a continuación?

En ese caso ¿podría resolver nuevamente las actividades y dar su opinión?

Hasta ahora, de los seis docentes que respondieron a la primera actividad sugerida, solamente tres volvieron a responder a lo solicitado. Estamos esperando las producciones del resto.

Resultados y discusión

Nos vamos a referir exclusivamente a lo ocurrido con la resolución de la actividad 3 que es la que representa mayor grado de complejidad.

Los resultados en los estudiantes mostraron una nula manipulación algebraica de los binomios que ahí aparecen, lo cual les condujo a evitar la resolución de los problemas.

En tanto, a los profesores fue necesario dejarles el problema para que lo resolvieran con más tiempo de por medio que los estudiantes, lo cual les permitió resolverlo y darse oportunidad de

comprobar la descomposición del binomio al cubo que ahí surge. No obstante, en ambas experiencias se revelan dificultades en la algoritmia algebraica que subyace al proceso de resolución, ello sin considerar la amplitud de la misma.
A continuación presentamos lo elaborado por uno de los docentes que intervinieron en las dos oportunidades en que se lo solicitamos.

Actividad 3 $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x}$

1er paso) $f(x+\Delta x) = \frac{4}{\sqrt{x+\Delta x}} + 2\sqrt[3]{x+\Delta x}$

2º paso) $f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{4}{\sqrt{x+\Delta x}} + 2\sqrt[3]{x+\Delta x} - \frac{4}{\sqrt{x}} - 2\sqrt[3]{x}$

3er paso) $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\frac{4}{\sqrt{x+\Delta x}} + 2\sqrt[3]{x+\Delta x} - \frac{4}{\sqrt{x}} - 2\sqrt[3]{x}}{\Delta x}$

4º paso) $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{4}{\sqrt{x+\Delta x}} + 2\sqrt[3]{x+\Delta x} - \frac{4}{\sqrt{x}} - 2\sqrt[3]{x}}{\Delta x} =$ indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$

$= \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{4}{\sqrt{x+\Delta x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}}{\Delta x}}_{(*)} + \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sqrt[3]{x+\Delta x} - 2\sqrt[3]{x}}{\Delta x}}_{(**)}$ (X)

por propiedades del límite

Resolviendo cada límite:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{4}{\sqrt{x+\Delta x}} - \frac{4}{\sqrt{x}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{4\sqrt{x} - 4\sqrt{x+\Delta x}}{\sqrt{x+\Delta x}\sqrt{x}}}{\Delta x} =$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x})}{\sqrt{x+\Delta x}\sqrt{x}\,\Delta x} =$ → indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(\sqrt{x} - \sqrt{x+\Delta x})(\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x})}{\sqrt{x+\Delta x}\sqrt{x}\,\Delta x\,(\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x})} =$ → multiplicando y dividiendo por esta expresión

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4(\cancel{x} - \cancel{x} - \Delta x)}{\sqrt{x+\Delta x}\sqrt{x}\,\Delta x\,(\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x})} =$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-4\cancel{\Delta x}}{\sqrt{x+\Delta x}\sqrt{x}\,\cancel{\Delta x}\,(\sqrt{x} + \sqrt{x+\Delta x})} =$

$= \frac{-4}{\sqrt{x}\sqrt{x}\,2\sqrt{x}} = \underline{-2x^{-\frac{3}{2}}}$ Este límite existe siempre que $x \neq 0$

indeterminación de tipo $\frac{0}{0}$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sqrt[3]{x+\Delta x} - 2\sqrt[3]{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\sqrt[3]{x+\Delta x} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})}{\Delta x\,(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^3} + \cancel{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2 x}} + \cancel{\sqrt[3]{(x+\Delta x)x^2}} - \cancel{\sqrt[3]{x(x+\Delta x)^2}} - \cancel{\sqrt[3]{(x+\Delta x)x^2}} - \sqrt[3]{x^3})}{\Delta x\,(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} =$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2(\cancel{x} + \Delta x - \cancel{x})}{\Delta x\,(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} =$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}\,(\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2} + \sqrt[3]{x+\Delta x}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2})} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} = \underline{\frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}}$ Este límite existe siempre que $x \neq 0$.

Volviendo a (X) para el cálculo de la derivada

$f'(x) = (*) + (**)$

Resulta: $f'(x) = -2x^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

la derivada existe para todo x para la cual existe límite es decir, en este caso, $x \neq 0$.

Figura 1. Las tres imágenes muestran el desarrollo algebraico alcanzado por el profesor para determinar la derivada de la función $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x}$ *, usando el recurso tradicional de la RCP.*

Obsérvese la amplitud de los cálculos, así como lo brumoso del desarrollo algebraico.

En la segunda oportunidad, usando el recurso de teorema del binomio de Newton, el trabajo desarrollado por el docente fue el siguiente:

Actividad 3 $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x} \Rightarrow f(x) = 4x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{3}}$

Primer paso $f(x+\Delta x) = 4(x+\Delta x)^{-\frac{1}{2}} + 2(x+\Delta x)^{\frac{1}{3}} =$

$$= 4.\left(x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\Delta x + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})x^{-\frac{5}{2}}.\Delta x^2}{2} + \ldots\right) +$$

$$+ 2\left(x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x + \frac{\frac{1}{3}.(-\frac{2}{3}).\ x^{-\frac{5}{3}}\Delta x^2}{2} + \ldots\right)$$

Segundo paso

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \cancel{4x^{-\frac{1}{2}}} - 2x^{-\frac{3}{2}}\Delta x + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\Delta x^2 + \ldots$$

$$+ \cancel{2x^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x^2 + \ldots - \cancel{4x^{-\frac{1}{2}}} - \cancel{2x^{\frac{1}{3}}}$$

Tercer paso $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-2x^{-\frac{3}{2}}\Delta x + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\Delta x^2 + \ldots + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\Delta x - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x^2 + \ldots}{\Delta x} =$

$$= \frac{\cancel{\Delta x}\left(-2x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\Delta x + \ldots + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x + \ldots\right)}{\cancel{\Delta x}}$$

Cuarto paso $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} -2x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\Delta x + \ldots + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\Delta x + \ldots =$$

$= -2x^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ (El límite de los otros términos es cero).

Luego $f'(x) = -2x^{-\frac{3}{2}} + \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

Figura 2. Obsérvese como la utilidad del recurso del teorema del binomio de Newton, reduce el trabajo algebraico para la determinación de la función $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} + 2\sqrt[3]{x}$ *, haciendo, incluso, el proceso más dinámico*

Como se puede observar en la resolución, el trabajo algebraico es mucho menor y la posibilidad de llegar rápidamente al resultado es evidente. Ante la pregunta realizada con respecto a la utilidad del TBN para la resolución de estas actividades, la respuesta obtenida fue:

Ambas maneras de desarrollar cada uno de los pasos para determinar la derivada recurren a procedimientos algebraicos.
La utilización del binomio de Newton para el desarrollo de las potencias hace que el proceso para salvar la indeterminación del límite sea más corto y menos engorroso en cuanto a las operaciones implicadas.
Además pienso que resulta menos abstracto porque de la otra manera hay que recurrir a un artificio como es multiplicar y dividir la razón por alguna expresión, diferente según la función, y bastante complicada según los pasos.
De esta manera el desarrollo es el mismo para todos los ejemplos y me parece que los alumnos pueden comprenderlo de una manera más natural.
La desventaja sería que se debió haber desarrollado el tema (potencia de un binomio) previamente.

Figura 3. Apreciaciones del profesor después de utilizar el teorema del binomio en la determinación de la derivada citada

Las apreciaciones realizadas son muy interesantes y coincidimos con que es muy difícil que se utilice el desarrollo teniendo en cuenta el teorema del binomio, dado que no es una práctica habitual en el aula de cálculo.

Conclusiones

Como tal, en la socioepistemología se asume que el conocimiento matemático deriva de *prácticas* *de referencia* en las que a su vez se ponen en juego *prácticas sociales*. Las prácticas de referencia son por lo general actividades desarrolladas por los seres humanos en el intento de matematizar la realidad inmediata, casos específicos son las prácticas de ingeniería: civil, arquitectura, topografía, astronomía, agronomía y otras. En este sentido, el TBN deriva de una práctica de referencia que tiene que ver en la física con el movimiento de los fluidos, estudiado originalmente por Newton (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez Sierra, 2006, pp. 86-87). No obstante, el TBN culminó en otras prácticas de ingeniería que descansan en el desarrollo de las funciones analíticas a través de las series de MacLaurin (Camacho y Sánchez, 2010). Desde esta perspectiva, interesa instrumentar un diseño de situación didáctica en la que se incorporen elementos de una práctica de referencia y se ponga en juego la práctica social que subyace al conocimiento matemático. Este interés deja ver nuestro intento por iniciar el diseño a partir de una situación a-didáctica, en el sentido de Brosseau (1998), en la que las cuestiones epistemológicas del conocimiento y de los instrumentos en uso de dicha situación, son el principal reto. No obstante, los elementos del conocimiento que a partir del TBN se han presentado para la RCP, en el presente documento, forman parte estructural de la práctica social asociada a la práctica de referencia, que en estos momentos nos encontramos delimitando.

Referencias

Balbuena, L. (2007). Innovación y dinamización matemática. Recuperado el 14 de mayo de 2010 de http://www.gobiernodecanarias.org/educacion/3/Usrn/cep_laguna/recursos/Proy_EAM/DOCUMENTOS/CONFERENCIAS/Conferencia_Luis.pdf.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques.* Grenoble: La Pensée Sauvage.

Camacho, A y Sánchez, B. (2010). Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Número especial (aceptado para su publicación).

Cantoral R. y Farfán R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral, *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8* (pp. 69-91), México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz Moreno (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17,* 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Cantoral, R., Farfán R. M., Lezama J., y Martínez G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 9 (Número especial), 83-102.

Dolores, C. (1996a). *Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el Bachillerato.* Tesis de Doctorado no publicada, Instituto Pedagógico "Enrique José Varona". Facultad de Ciencias. Cuba.

Dolores, C. (1996b). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de cálculo diferencial. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 257-272), México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Granville, W. (1911). *Elements of the Differential and Integral Calculus.* Boston: Ginn and Company.

Granville, W (1980). *Cálculo diferencial e integral*. México: Editorial Limusa-Noriega Editores.

Sonnet, H. (1869). *Premiers Éléments du Calcul Infinitésimal a l´usage des Jeunes gens qui ce Destinnent a la Carrière d´Ingénieur.* Paris:Hachette