¿MATEMÁTICA EDUCATIVA: UNA DISCIPLINA CIENTÍFICA?

Marcela Ferrari Escolá, Flor M. Rodríguez Vásquez
Universidad Autónoma de Guerrero
ferrari@mathacapulco.mx, flor_r@cimateuagro.org

Resumen

En este escrito discutiremos algunos principios básicos de la matemática educativa, a fin de que tanto estudiantes de licenciatura como profesores en servicio, se inicien en la vida académica en el área de la matemática educativa. En general abordaremos cuestiones relativas a: ¿Qué es la matemática educativa?; ¿Cómo se identifica una problemática de investigación?; Diferentes teorías y perspectivas en matemática educativa. La finalidad es mostrar un abanico de posibilidades en las cuales la matemática educativa está presente y al mismo tiempo se distingue como una disciplina científica.
Palabras clave: *matemática educativa, referentes teóricos y metodológicos, disciplina científica*

Introducción

Grosso modo, en México, el primer antecedente de la matemática educativa data de la década de los 70's, cuando un grupo de investigadores en el Cinvestav[17] enfatizan en las problemáticas existentes acerca del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática a nivel nacional, debate ya iniciado a nivel mundial. Una de las primeras reflexiones que encontramos al respecto corresponde al Dr. Imaz[†] (1987) donde enfatizaba que matemática educativa "*es lo que surge cuando, haciendo cierto tipo de abstracciones, abordamos a la matemática como un problema de comunicación*" (p. 1) mencionando además que una de las razones más alarmantes es que *los cursos de matemáticas están jugando el papel de filtro del sistema educativo* (p.4) considerando que la preocupación de comunicar estos saberes debe recaer en *el rediseño del discurso matemático en la enseñanza* (p.5).

De esas primeras pinceladas respecto a cómo explicarnos los fenómenos que cotidianamente ocurren en las aulas de matemáticas, podemos hablar hoy de teorías desarrolladas por investigadores mexicanos respondiendo a las particularidades del país, a esas prácticas escolares tan arraigadas y a ese discurso matemático escolar ya instaurado en nuestro quehacer educativo. Hoy día, reconocemos que en México se ha diversificado y se sigue extendiendo la investigación en matemática educativa como una disciplina científica y asimismo la práctica de la misma, lo cual podemos constatar por el incremento en el número de publicaciones que a la fecha se tienen, emergentes de proyectos de investigación que evidencian la búsqueda de respuestas al desafío planteado hace más de treinta años.

En Rodríguez-Vásquez y Aparicio (2007), se menciona que a nivel mundial, la matemática educativa posee un reconocimiento importante, lo que indica la preocupación existente por generar ambientes de enseñanza aprendizaje adecuados en tanto resulten efectivos y significativos, por lo que en consecuencia existe una gama de teorías que sustentan los fenómenos didácticos que se suceden en la terna didáctica: estudiante, profesor y saber, y por lo

[17] Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
[†] Carlos Imaz Jahnke (1932-2010) matemático mexicano reconocido a nivel mundial, miembro fundador del Cinvestav-IPN e impulsor de la creación del Departamento de Matemáticas (1968) y del Departamento de Matemática educativa (1975) de éste.

tanto existe un esfuerzo por orientar las investigaciones hacia las formas de apropiación, construcción, entendimiento, epistemología, enseñanza y representación de un saber matemático.
En este sentido, nuestra intención es ofrecer tanto a estudiantes como a profesores una perspectiva acerca de la matemática educativa con base en tres ideas fundamentales:

- ¿Qué entendemos por matemática educativa?
- ¿Cómo se identifica una problemática de investigación en ella?
- ¿Cómo hablar de diferentes perspectivas teóricas y metodológicas en matemática educativa?

En general, cuando como profesores, incursionamos en esta disciplina, lo hacemos buscando ciertas recetas para enseñar cuestionándonos sobre ¿cómo dar mejores clases de matemáticas?, ¿qué tengo que hacer para que mis estudiantes aprendan?, etc. Siendo natural que todos busquemos "la" respuesta a todos nuestros problemas cotidianos como educadores. Sin embargo, al ir incorporándonos en esta comunidad de matemáticos educativos vamos comprendiendo que compartimos ese desafío de encontrar respuestas a los fenómenos didácticos, entendiendo la complejidad que ello conlleva, así como que podemos acercarnos a generar una identidad particular, respetando nuestra propia identidad pero evolucionando a través del intercambio, de ir generando un nuevo discurso matemático escolar desde la investigación.

La invitación es entonces a compartir cierto panorama del qué, cómo y por qué hacemos investigación en matemática educativa. En este sentido abordaremos algunos elementos necesarios, tanto teóricos como prácticos, para afrontar la problematización de la matemática a la luz de su didáctica.

Nos cuestionamos sobre qué entender por matemática educativa.
No nos detendremos aquí a enunciar una definición de matemática educativa sino a reflexionar sobre su emergencia, ya que se relaciona con otras ramas del saber como la psicología, la didáctica, la epistemología y la sociología, entre otras. El objetivo principal de esta disciplina es, por una parte proveer explicaciones, no simples y con base en la evidencia empírica, del conjunto de problemáticas de las que se ocupa; y por otra, esclarecer problemas educativos abordándolos de una manera científica.

Para algunos autores como Cordero (2001), es una disciplina que atiende como problemática fundamental la enseñanza de la matemática o bien su aprendizaje. En este sentido menciona que la matemática educativa se ha cuestionado sobre el conocimiento matemático, entre otras cosas, que oscilan en la naturaleza, en las formas, en las condiciones de construcción y sobre las construcciones que tienen que hacer los individuos para que se dé dicho conocimiento.
Para Steiner (1985, citado en Godino, 2010), la educación matemática admite, una interpretación global dialéctica, como disciplina científica y como sistema social interactivo que comprende teoría, desarrollo y práctica. Propone además (ver Figura 1), visualizar la educación matemática (E.M.) como parte de un sistema más amplio que denomina "Educación Matemática y Enseñanza" (S.E.M) donde reúne entre otros elementos a la clase de matemática, a la formación de profesores, al desarrollo curricular, a los materiales didácticos, a la evaluación, etc., considerando un espacio especial para la educación matemática o didáctica de la matemática

(E.M.) y a su vez, dentro de ella la teoría de la educación matemática (TEM), evidenciando así distintas esferas de competencia.

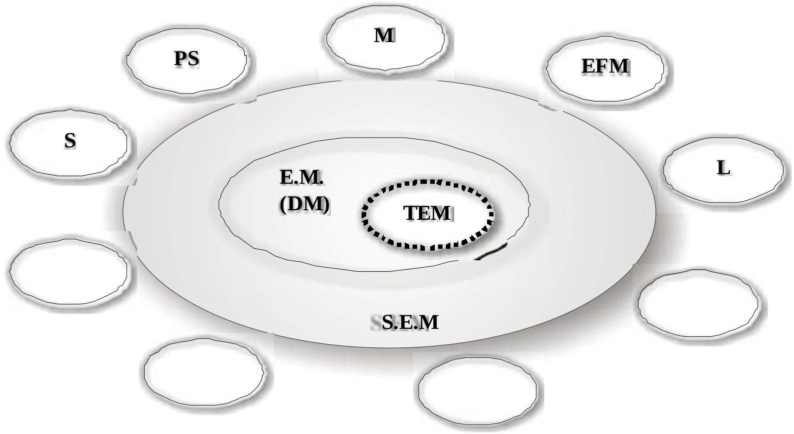

Figura 1: Educación Matemática y Enseñanza (Esquema de Steiner (1990, en Godino, 2010))

Del diagrama se observa además que la educación matemática comparte, como objeto de estudio, problemáticas que emergen del sistema de enseñanza de la matemática, siéndole necesarias otras áreas disciplinares como las matemáticas (M), la epistemología y filosofía de las matemáticas (EFM), la psicología (P), la lingüística (L), entre otras.

Este reconocimiento como disciplina emergente de las matemáticas generó discusiones alrededor de si las matemáticas son el mismo objeto de estudio para los investigadores en matemática educativa y los investigadores en matemáticas (Sfard, 1998). En efecto, ambos estudian las matemáticas pero el enfoque de investigación es distinto, pues mientras los primeros se preocupan por investigar problemáticas respecto a procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, los segundos se preocupan por descubrir matemáticas como entes per se. En este sentido, Moreno (2007), establece que si bien uno de los puntos de partida de esta disciplina es la matemática misma, tiene *un componente heurístico y un marco axiomático como partes centrales de su actividad de sistematizar los resultados, es decir, se organiza alrededor de núcleos conceptuales denominados "teoremas"* (p. 45). La matemática educativa en cambio, *se encuentra en la intersección de la matemática como conocimiento socialmente generado y la práctica de la educación* (p. 45). Considera además que esta disciplina emerge como campo de investigación al problematizarse sobre la enseñanza de las matemáticas como objeto de investigación en el seno de un sistema educativo.

El problema de investigación en matemática educativa

Partiremos de la idea de que una investigación no es una búsqueda lineal de respuestas, sino que se va forjando sobre la marcha. Por ejemplo, el investigador puede tener un tema de inicio del que deberá cuestionarse ¿quién?, ¿cómo?, ¿qué?, ¿cuándo? y ¿por qué? de tal forma que sea capaz de formular un problema específico de investigación. O quizá primero tenga una problemática de investigación y de aquí que pueda formular su problema cuestionándose de igual forma con las preguntas anteriores. En realidad todo depende de la investigación que se esté haciendo y las circunstancias en las que se origina. En cualquier caso, lo que se debe hacer es siempre justificar el problema, estableciendo algunos criterios[18] como la conveniencia, la relevancia social, las implicaciones prácticas, el valor teórico y el impacto en la disciplina misma.

[18] Criterios que pueden variar según la naturaleza misma de la investigación y del tema en sí.

De acuerdo con Tamayo (1993), se deben considerar tanto los factores subjetivos como los objetivos en la elección de un tema, entendiendo dentro de los primeros el interés personal por el tema, la capacidad para desarrollarlo, el tiempo disponible para ejecutar el trabajo, la disponibilidad de los recursos materiales y que las fuentes de información estén al alcance del investigador; mientras que los segundos se referirán a las características primordiales del tema como son la utilidad, la factibilidad, la originalidad y la actualidad. Es primordial mencionar que el tema y el problema de investigación deben corresponderse, evidentemente, con una problemática de la disciplina.

Algunas teorías y perspectivas metodológicas de la matemática educativa

Como mencionamos anteriormente, varios fueron los investigadores que responden al llamado de estudiar la problemática de la enseñanza de las matemáticas generándose diferentes explicaciones con referentes teóricos fuera de las matemáticas tales como psicología, epistemología, sociología entre otros. Si miramos la evolución de nuestra disciplina en Europa, podemos mencionar a la escuela francesa siendo algunos de sus representantes Brousseau (1997), Chevallard (1995), Duval (1999) que de diferente manera han impactado en el quehacer mexicano. Efectivamente, Brousseau genera la *Teoría de Situaciones Didácticas* donde las situaciones didácticas juegan un papel esencial en la generación de conocimiento, pues son el medio que permite discutir con los maestros las acciones adecuadas para favorecer al estudiante en un aprendizaje duradero, es decir, son el medio en donde se pueden producir problemas o ejercicios adaptados a los saberes en correspondencia con los alumnos. En la teoría se distinguen cuatro tipos de situaciones didácticas: la de *acción*, en donde el alumno debe actuar sobre un medio y se evalúan los conocimientos con los que el alumno ya cuenta; la de *formulación*, en donde el alumno deben formular un mensaje destinado a otro alumno para que comprenda el mensaje y éste a su vez responda con base en el conocimiento contenido en el mensaje; la de *validación*, en donde se debe llegar a un consenso del conocimiento “descubierto”, discutiendo sobre la verdad o falsedad del mismo; y la *institucionalización*, definida como la consideración “oficial” del objeto de enseñanza por parte del alumno y del aprendizaje del alumno por parte del maestro.

Chevallard (1995) por su parte, reinterpreta la idea de *Teoría de la Transposición Didáctica* generando una explicación de la transformación paulatina que sufre la matemática erudita al transponerla al aula generando lo que llamamos matemática escolar, ideas que se profundizarán en el siguiente parágrafo. Evoluciona su pensamiento hacia la *Teoría de la Antropología Didáctica* (TAD) donde el estudio de las praxeologías da cuenta de las discusiones que se generan alrededor de matemáticas en diferentes ambientes. Las *tareas*, referente a lo que podemos hacer, las *técnicas*, es decir, cómo realizamos la tarea, la *tecnología* que implica reflexionar sobre esas técnicas que emergen en la resolución de las tareas y finalmente, producir *teoría*, en el sentido de reflexionar sobre esa tecnología reconocida (Chevallard, 1998) son los componentes de las praxeologías matemáticas donde praxis (tareas y técnicas) y logos (tecnología y técnica), modelizan la matemática como actividad humana así como la dialéctica entre la acción situada y el discurso que la describe y justifica (Godino, 2010).

Duval (1999) en cambio, reflexiona sobre lo indispensable que son las representaciones semióticas para fines de comunicación en matemáticas, además de que le son necesarias para su desarrollo mismo. Plantea así, la posibilidad de efectuar transformaciones sobre objetos matemáticos con fines de aprendizaje. En este sentido, son dos hipótesis fundamentales en su trabajo, la primera consiste en que: *si se llama semiosis la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y noesis los actos cognitivos como la aprehensión conceptual de un objeto, la discriminación de una diferencia o la comprensión de una interferencia, parecería entonces evidente admitir que la noesis es independiente de la semiosis, o por lo menos, que la antecede* (p.14). Por tanto, considerando la necesidad de las representaciones semióticas para algunas funciones cognitivas fundamentales y la implicación recíproca de las representaciones mentales de las representaciones semióticas, menciona la hipótesis contraria: *no hay semiosis sin noesis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis* (p.15). Es en la evidencia de dichas hipótesis de donde se realizan algunos trabajos didácticos que fundamentalmente analizan los problemas en el aprendizaje de las matemáticas y de los obstáculos a los cuales se enfrentan regularmente los alumnos.

Podemos mencionar también a la escuela alemana que ha dado interesantes constructos teóricos, siendo algunos de sus referentes el interaccionismo simbólico. Efectivamente, por los noventas se genera la idea de "*negociación de significados matemáticos*" con lo cual Voigt (1998) asegura que interacción y aprendizaje están conceptualmente ligados, siendo la negociación de significados lo que genera un "conocimiento compartido" (Radford, 2000). En tanto que Krummheuer (2007) reporta sobre "*argumentación colectiva*" basando su estudio en el trabajo de Toulmin *et al.* (1984), fundamentalmente en el esquema: conclusión, dato, justificación y refuerzo considerando que analizar la naturaleza de la actividad en el aula de matemáticas implica caracterizarlas con la resolución colaborativa de problemas y la discusión de toda la clase. En Inglaterra en cambio, emerge uno de los primeros acercamientos teóricos netamente cognitivo, en una época donde entender lo que significa aprender era lo primordial, hablamos de "*concept image-concept definition*" que Tall y Vinner (1981) generan para explicar la compleja apropiación respecto a algunos conceptos matemáticos en estudiantes de nivel superior, donde consideran que se debe realizar una distinción entre el modo en el que un sujeto piensa sobre un concepto y la definición formal del mismo, es decir, distinguir entre matemáticas como una actividad mental y matemáticas como un sistema formal.

Si giramos la mirada a América, encontramos desarrollos teóricos interesantes donde cada uno pone acento en ciertos aspectos distinguiéndose entonces de los otros. Por ejemplo, en Canadá se está desarrollando desde hace varios años el acercamiento teórico de *la objetividad* de la mano de Radford donde se plantea el problema de la cognición como reflexión de la práctica social. La actividad cognitiva es considerada como una actividad social, mediatizada, de interiorización reflexiva de prácticas sociales históricamente constituidas. Se plantea la cognición humana desde el punto de vista antropológico donde se reposiciona al individuo, se lo mira como un individuo que vive, piensa y actúa en el marco de su cultura; basándose la cognición en la praxis social (Radford, 2006) y por tanto el aprender tiene que ver con "adquirir" conocimiento, es decir, ir en búsqueda del mismo, distinguiendo aquí como referente teórico a las ideas vigotskianas.

En el Sur en cambio, encontramos en Brasil un desarrollo importante alrededor de la *Etnomatemática* que para D'Ambrosio (1997), es el arte o técnica desarrollada por diferentes culturas para explicar y comprender el entorno, aceptar diferentes formas de matemática que son propias de grupos culturales (D'Ambrosio, 2001) Este movimiento se inicia con la observación de los saberes matemáticos de ciertos grupos culturales y su alejamiento de la matemática escolar, constituyéndose así, como una de las reacciones a considerar las prácticas matemáticas "*ad hoc*", fuera del ámbito escolar, como no-sistemática y no-teórica. (Skosmose y Vithal, 1997).

En Estados Unidos, entre otros acercamientos teóricos, podemos mencionar uno de corte netamente cognitivo "*APOE*" de Dubinsky (2000), contrastando por ejemplo con el Aprendizaje situado y comunidades de prácticas desarrollado por Lave y Wenger (1991). Reflexionar sobre ideas piagetianas y extenderlas hacia matemática educativa buscando un lenguaje para explicar la apropiación de conocimientos confluye en los 90's en la teoría conocida como APOE (Acción, proceso, objeto y esquema) generada por Dubinsky donde propone además, generar una descomposición genética o modelo de cognición, es decir, una descripción de las construcciones mentales específicas que un principiante podría hacer para desarrollar su comprensión de un concepto. Utilizan el ciclo ACE (Actividades - Tareas en clase - Ejercicios) como tratamiento instruccional para ayudar a los alumnos a desarrollar sus construcciones mentales generando un grupo de aprendizaje cooperativo en torno de actividades (computacionales o no) y discusiones de los resultados obtenidos (Dubinsky y MacDonald, 2003). Jane Lave (1992) y Etienne Wenger por su parte, dar forma a la idea de *aprendizaje situado* donde el conocimiento es parte y producto de la actividad, el contexto y la cultura en que se desarrolla y utiliza. Es decir, cambios en las formas de comprensión y participación en una actividad conjunta es un proceso multidimencional de apropiación cultural. La actividad situada implica siempre cambios en el conocimiento y la acción y ellos son centrales para lo que se entiende como aprendizaje (Chaiklin y Lave, 2001).

En México, un grupo de investigadores desarrollan la que se ha dado en llamar *socioepistemología*, donde se plantea el examen del conocimiento social, histórica y culturalmente situado, problematizándolo a la luz de las circunstancias de su construcción y difusión. El conocimiento se asume como el fruto de la interacción entre epistemología y factores sociales, siendo una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2004).

Para Cordero (2001) la actividad humana es la nueva plataforma que brinda epistemologías que amplían la problemática, obliga a incorporar la dimensión social, reconocer categorías de conocimiento matemático con relación a las reconstrucciones de significados de la matemática que *a priori* no están en el currículo, romper el carácter universal de la construcción a través de considerar otras, formular nuevas acciones didácticas en las que el diseño de situaciones esté sustentado por la actividad humana. Se propone así, la reorganización de la matemática escolar desde la generación de epistemologías que modelen prácticas sociales (Buendía, 2004) ya que los humanos construyen conocimiento en el ejercicio de prácticas sociales como herramientas para intervenir en sus comunidades (Arrieta, 2003).

Generalmente este acercamiento teórico utiliza la *Ingeniería Didáctica* como metodología de investigación desarrollada en los 80's por investigadores franceses, debiendo su nombre a una analogía con el trabajo del ingeniero. Según Douady (1995) es un conjunto de secuencias de clase, diseñadas, organizadas y articuladas coherentemente por un "profesor- ingeniero", para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo de alumnos específico. Por tanto, considera que la ingeniería didáctica es, por un lado, un "producto" que resulta de un análisis preliminar y un análisis *a priori*, y por otro lado, un "proceso" en el cual el profesor implementa el producto y realiza los ajustes y adaptaciones necesarias según la dinámica de la clase lo exija. Efectivamente son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en ella:

- **Análisis preliminar:** se realiza luego de establecer los objetivos específicos de la investigación, donde se analizan y determinan, desde una aproximación sistémica, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos. Es decir, lo relativo a la componente epistemológica, a la componente cognitiva y a la componente didáctica.

- **Diseño de la situación didáctica y su análisis *a priori:*** donde se eligen las variables didácticas que se controlarán y se define la forma en que se gestionarán. También se establecen las hipótesis de trabajo, es decir, qué se espera de la interacción de los alumnos con la situación diseñada, qué avances se consideran dentro de las expectativas, qué errores se perciben persistentes, qué mecanismos se prevé serán utilizados. Es, en consecuencia, una fase tanto prescriptiva como predictiva.

- **Experimentación** de la situación diseñada, es decir, se la implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador. Es importante el control de las actividades y el registro de los sucesos, pues el conocimiento y caracterización de los mismos redundará en la calidad y fidelidad de la siguiente etapa.

- **Análisis *a posteriori* y validación:** requiere de una exhaustiva revisión de los sucesos acaecidos durante la experimentación. Se confrontan aquí las hipótesis definidas en el análisis *a priori* y se determina en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuanto se desvían los resultados de lo que se esperaba. De esta confrontación surge la fase que caracteriza a esta metodología, esto es, la validación del diseño.

Otro acercamiento interesante para reflexionar sobre fenómenos didácticos en matemáticas y donde se entremezclan constructos teóricos y metodológicos es en *Epistemología e Historia de la Matemática*. Para ambos, generalmente se considera una problemática relacionada con el fenómeno de transposición didáctica de una pieza de conocimiento matemático, y es que, como se menciona en Cantoral *et al.* (2000), la matemática no se ha construido en ámbitos escolares sino en ámbitos sociales y en consecuencia al introducirla al sistema de enseñanza se deben hacer modificaciones que afectan tanto su estructura como su funcionamiento y por ende se deben considerar acercamientos teóricos y metodológicos adecuados en el proceso de incorporación de los saberes en el sistema didáctico.

Como toda investigación en didáctica de la matemática, el fin último de utilizar el enfoque histórico es resolver problemas educativos abordándolos de una manera científica, en este sentido el realizar estudios desde la perspectiva histórica, ha demostrado ser una vía factible para la problematización de la matemática misma. Algunos ejemplos de investigación como los de

Fauvel (1991), Sierra (2000), Vicario (2007), Rodríguez-Vásquez (2010), enfatizan las funciones que promueve la investigación histórica como: el auxilio en el desarrollo curricular, conocimiento de la multiculturización de las matemáticas, motivación tanto a profesores como de estudiantes de conocer mejor el objeto de la actividad profesional, proveer la colaboración y cooperación en trabajos interdisciplinarios, mostrar el aspecto humano de las matemáticas, mostrar el orden de la naturaleza del conocimiento ayudando a su adecuada comprensión, etc.

Al respecto de la consideración epistemológica en los trabajos de didáctica de la matemática, es bien sabido que el conocimiento matemático sufre un cambio del saber erudito al saber enseñado, y es objeto de estudio de la disciplina estudiar los procesos que sufre dicho conocimiento en aras de mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje mismo. La importancia de este enfoque consiste en colocar al saber en su forma más genuina, proporcionando al investigador un abanico de constructos que bien podrían ser implementados en la situación de aula; además de que el enfoque permite reflexionar sobre la naturaleza misma del conocimiento matemático en sí. Algunos trabajos en esta dirección son el de Cadoche y Galván (2000), Albert (1998), Artigue (1990), Sierpinska y Lerman (1996), entre otros.

A manera de conclusión, podemos decir que un marco teórico es aquella literatura con fundamento que nos nutre de elementos para explicar los hallazgos en la investigación desarrollada. En consecuencia es el enfoque que se adopta para leer la realidad estudiada, por tanto se usa para sustentar y explicar lo que ha acontecido en un trabajo de investigación de una manera científica y que permite definir su hilo conductor en conjunción con una metodología adecuada**.** Como mencionábamos con anterioridad, dependiendo del tipo de investigación que se desarrolla, el marco teórico puede ya estar establecido desde el inicio, tal el caso de Ferrari (2008) o que se vaya conformando a medida que se avanza en la investigación considerando algunas definiciones específicas en otros marcos que se consideran pertinentes a la propia pudiéndose incorporarla siempre y cuando no exista la contradicción en lo que se use de ellas, tal el caso del trabajo de Rodríguez-Vásquez (2010).

En definitiva, un marco teórico permite sistematizar los conocimientos dentro de una disciplina, lo que constituye un primer paso para conseguir una visión clara de la unidad que pueda existir en nuestras percepciones. La teorización es un requisito para que un área de conocimiento alcance la categoría de científica y pueda desempeñar su papel explicativo y predictivo de fenómenos; puede decirse que la investigación científica significativa está siempre guiada por una teoría, aunque a veces lo sea de un modo implícito.

Dos ejemplos de investigación en matemática educativa

Ahora bien, luego de este acercamiento a una perspectiva general sobre "qué", "por qué" y "para qué" matemática educativa, indagaremos sobre "cómo", a partir de dos ejemplos concretos de investigaciones realizadas al seno de la matemática educativa. Explicitaremos grosso modo, los elementos de construcción de las tesis de Ferrari (2008) y Rodríguez-Vásquez (2010).

En Ferrari (2008), se aborda una de las problemáticas más trabajadas en nuestra disciplina, aquella alrededor de "función", eje centrar de todo curso de Cálculo donde el estudio de variaciones en el ámbito escolar se ha ido distanciando con el tiempo de sus argumentos primigenios, de las prácticas sociales y de referencia donde emerge. Se evidencia y cuestiona una dicotomía, entre aquellos investigadores que buscan un único mecanismo de apropiación de función (Dubinsky y MacDonald, 2003 o Carlson y Rasmussen, 2008) y, aquellos como Buendía y Ordóñez (2009) o Ferrari (2008), entre otros, que reconocen la importancia de dar cuenta de las características específicas como emergentes de prácticas sociales y de referencia, centrando la atención en funciones periódicas en el primer caso y la función logaritmo en el segundo.

Para organizar y reportar la investigación, se decidió utilizar las fases de la Ingeniería Didáctica, metodología central del trabajo. La estructura general de la tesis puede percibirse al observar que son cuatro los escenarios en los que se desarrolló la investigación sin descuidar el entrelazamiento inherente a ellos. El *primer escenario*: la comunidad de matemáticos educativos, donde intentamos posicionar nuestro trabajo mediante un estado de arte alrededor de "función", "función logarítmica" como ejes centrales sin demeritar temas como "covariación", "función inversa", "función exponencial" e "integración", elementos que se van entrelazando en los análisis *a priori* de cada etapa. En el *segundo escenario*, estudiamos el discurso matemático escolar que se percibe en México, a través de las voces de profesores, de alumnos y de textos utilizados, evidenciando la no apropiación de saberes así como volver a revisar la dislexia evidente al definir a los logaritmos como "el exponente al que…", "la función inversa de…" y "la primitiva de…", argumentos que pareciera no entrelazarse en el ámbito escolar.

En el *tercero escenario,* el epistemológico, partimos de lo trabajado en Ferrari (2001) fortaleciendo la mirada hacia las prácticas sociales y de referencia más allá de las generadas en Europa, sino también incursionar en otras épocas y continentes determinando en este estudio que las prácticas de *facilitar cálculos* y *modelar* propiciaron la emergencia de los logaritmos, ambas entremezclándose con la práctica de *predecir*. En el *cuarto escenario*, en cambio, se estableció el intercambio con estudiantes de sexto semestre de bachillerato, donde creemos haber sensibilizado a los estudiantes hacia la covariación logarítmica donde el trabajo en grupo, la libertad de expresarse en búsqueda de un discurso común, dio frutos.

Concluimos así, que regresarnos a los argumentos originales que propiciaron la constitución de los logaritmos nos permite organizar un discurso institucionalizado a transmitir escolarmente desde otros supuestos que lo resquebrajan y lo rearman desde la covariación logarítmica como eje integrador.

En Rodríguez-Vásquez (2010), el eje principal fue mirar sobre el desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, la estructura de la tesis consistió de los siguientes cinco capítulos, a saber: Marco Teórico; Diseño de la investigación; Libros históricos; Libros de texto. Ecuaciones no lineales de una variable en la enseñanza contemporánea; Conclusiones. Esta investigación centra su atención en la problemática de los saberes, al considerarlos como objetos constituidos sin precedente histórico. Por lo que el trabajo se realizó en el enfoque histórico-epistemológico y en la transposición didáctica. Por lo que se recurrió al análisis de libros antiguos y contemporáneos que mostraron una perspectiva didáctica del desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales, tema matemático objeto de estudio. Para el desarrollo del trabajo, se consideraron dos sugerencias metodológicas: para el análisis de libros históricos, se siguió la método histórico de la investigación histórica de Ruiz Berrio (1976) y para el análisis de libros de texto se utilizó la metodología propuesta para análisis de libros modernos de Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999, 2003).

Como pregunta científica se planteó el: ¿Cómo evoluciona un saber didáctico del análisis matemático desde el punto de vista de su tratamiento escolar: de los libros a la perspectiva con recursos tecnológicos?

Para lo que particularmente se plantearon los siguientes objetivos de investigación:

- Identificar y clasificar, a lo largo de la historia, los diferentes tratamientos de los métodos iterativos para encontrar raíces de ecuaciones no lineales.
- Analizar cómo han variado los métodos iterativos para la resolución de ecuaciones al introducirlos como objeto de estudio en la enseñanza.

En conclusión, el interés de la investigación fue mostrar el tratamiento de dichos métodos, a partir del estudio de su desarrollo conceptual, con el objetivo de profundizar sobre su epistemología y de esta forma proporcionar una visión más amplia de su introducción en la enseñanza, tanto teórica como metodológica.

Comentarios finales

Reflexionar sobre matemática educativa como disciplina científica, siempre es un desafío interesante de abordar, por la heterogeneidad que parecería emerger al intentar reflejar el crecimiento de la misma de la mano de una cierta diversidad de escuelas de pensamiento, aceptando lo situado de toda actividad. Sin embargo, debemos reconocer que todos los acercamientos actuales, algunos mencionados brevemente en este trabajo con el objetivo de dar a conocer un ramillete de perspectivas, comparten esencias, temas comunes, interconexiones, y principalmente un mismo objeto de estudio, y por ende, presupuestos comunes: la matemática y su inserción escolar, bajo la preocupación de lograr explicaciones científicas de los fenómenos didácticos, de esa tensión entre la matemática escolar y la de uso cotidiano.

Referencias

Albert, A. (1998). Introducción a la epistemología. En R. Farfán (Coord. y Ed.), *Antologías Número II* (pp. 1–28). México: Cinvestav.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de la modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de Doctorado. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 10* (2–3), 241–286.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. Dordrecht, USA: Kluwer.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado. DME. Cinvestav-IPN, México.

Buendía, G. & Ordóñez, A. (2009). El comportamiento periódico en relación de una función y sus derivadas: significados a partir de su variación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(1), 7-28.

Cadoche, L., & Galván, SM. (2000). Epistemología de la didáctica. Una lectura de la didáctica de la matemática. *Temas de Ciencia y Tecnología,* 4(12). 27-34.
Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2003). Matemática educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativ*a, 6 (1), 27-40.
Cantoral, R. & Farfán, R. M. (2004). La sensibilité á la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24*(2-3), 137-168.
Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J.A., Rodríguez, R. A. & Garza, A. (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.
Carlson, MP. & Rasmussen, C (2008) (Eds.) *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathemati*cs. USA: MAA Bookstore
Chaiklin, S. & Lave, J. (Comps.) (2001). *Estudiar prácticas. Perspectivas sobre actividad y contexto*. Bs. As., Argentina: Amorrortu editores.
Chevallard, Y. (1995). *La Transposición didáctica*. Buenos Aires, Argentina: Aique.
Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. México: SEP.
Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa 4*(2), 103-128
D'Ambrosio, U. (1997). Where does ethnomathematics stand nowadays? *For de learning of Mathematics 17*(2), 13-17.
D'Ambrosio, U. (2001). General remarks on ethnomathematics, *ZDM: Zentralbaltt für didaktik der mathematic 33*(3), 85-87.
Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En Pedro Gómez (Ed.)*, Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.* México: Una empresa docente, Grupo Editorial Iberoamérica.
Dubinsky, E. (2000). De la investigación en matemática teórica a la investigación en matemática educativa: un viaje personal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(1), 47-70.
Dubinsky, E. & McDonald, M.A. (2003). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En: D. Holton *et al.* (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, (pp.275-282). USA: Kluwer Academic Publishers.
Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Colombia: Grupo de Educación Matemática.
Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics 61*(1), 103-131.
Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education*. For the learning of mathematics 11*(2), 3-6.
Ferrari, M. (2001). *Una visión socioepistemológica. Estudio de la función logaritmo*. Tesis de maestría. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN. México.
Ferrari, M. (2008). *Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: de multiplicar sumando a una primitiva.* Tesis de Doctorado. DME. Cinvestav-IPN, México.
Godino, J. (2010). Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina tecnocientífica. Documento del curso de doctorado "*Teoría de la educación matemática*". Recuperable en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/ consultado en septiembre de 2010.

Imaz, J, (1987). ¿Qué es la matemática educativa? *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de profesores e investigación en matemática educativa.* (pp. 267-272). México: Cinvestav.
Krummheuer, G. (2007). Argumentation and participation in the primary mathematics classroom. Two episodes and related theoretical abductions. *Journal of Mathematical Behavior 26*, 60-82.
Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. NY, USA: Cambridge University Press.
Lave, J. (1992). La *cognición en la práctica.* España: Ediciones Paidós.
Moreno, L. (2007). Matemática y Educación: Matemática Educativa. En L. Santos y E. Sánchez (Eds.): *Perspectivas en educación matemática* (pp.45-57). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática 12*(1), 51-69.
Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativ*a, 6 (Número especial), 103-119.
Rodríguez-Vásquez, F. (2010). *Desarrollo conceptual de los métodos iterativos en la resolución de ecuaciones no lineales: un enfoque didáctico*. Universidad de Salamanca. España.
Rodríguez-Vásquez, F. & Aparicio, E. (2007). Una visión introductoria a la matemática educativa. En G. Buendía y G. Montiel (Eds.): *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática educativa* (pp.7-20). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa / Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C.
Ruiz Berrio, J. (1976). El método histórico en la investigación histórica de la educación. *Revista española de pedagogía 134*, 449-475.
Sfard, A. (1998). The many faces of mathematics: Do mathematicians and researchers in mathematics education speak about the same thing? En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.): *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp.491-511). UK: Kluwer.
Sierpinska, A. & Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En: A. J. Bishop *et al*. (Eds.): *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer.
Sierra, M. (2000). El papel de la historia de las matemáticas en la enseñanza. *Números 43-44*, 93-96.
Sierra, M., González, M. T. & López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias 17*(3), 463-476.
Sierra, M., González, M. T. & López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles del siglo XX. *Educación matemática 15*, 21-51.
Steiner, H.G. (1985). Theory of mathematics education (TME): an introduction. *For the Learning of Mathematics 5*(2), 11-17.
Steiner, H.G. (1990). Needed cooperation between science education and mathematics education. *Zentralblatt fur didaktik der mathematic 6*, 194-197.
Skovsmose, O & Vithal, R. (1997). The End of Innocence: A Critique of 'Ethnomathematics'. *Educational Studies in Mathematics 34*(2), 131-157.
Skovsmose, O. (1998). *Linking Mathematics Education and Democracy: Citizenship, Mathematical Archaeology, Mathemacy and Deliberative Interaction*. Copenhagen, Dinamarca: Center for Forskining I Matematiklaerinng, Skriftserie.
Tall, D. & Vinner, S. (1981). The Psychology of Adcanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed). *Advanced mathematical thinking* (pp, 3-21). NY, EE.UU.: Kluwer Academic Publishers.
Tamayo, M. (1993). *El proceso de la investigación científica.* 9ª reimp. México: Noriega.

Toulmin, S. Rike, R. & Janik, A. (1984). *An introduction to reasoning*. New York, USA: Macmillan Publishing.

Vicario, M. (2007). *Coordenadas polares: un acercamiento epistemológico y didáctico*. Tesis maestría no publicada. Universidad Autónoma de Guerrero: México.

Voigt, J. (1998). The culture of the mathematics classroom: negotiating the mathematical meaning of empirical phenomena. En: F. Seeger, J. Voigt y U. Waschescio (Eds.): *The culture of the mathematics classroom* (pp. 191-220). Cambridge: Cambridge University Press.