

JUSTIFICACIONES Y PRUEBAS EN EL CONTEXTO ESCOLAR

Víctor Larios Osorio, Claudia Acuña Soto, Juan de Dios Viramontes Miranda

Univ. Autónoma de Querétaro, Cinvestav-DME, Univ. Autónoma de Ciudad Juárez
vil@uaq.mx, claudiamargarita_as@hotmail.com, juan.viramontes@uacj.mx

Introducción

Partiendo de la premisa de que el aprendizaje de las Matemáticas en el contexto escolar es un proceso social ligado a las prácticas de los individuos y de los grupos, se busca dar explicaciones a los problemas que se derivan de la consideración del proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas. En nuestro caso el interés gira en torno a los procesos de argumentación y demostración en el aula de Matemáticas.

Se reconoce que la demostración es una parte fundamental del desarrollo matemático y aunque su significado ha estado determinado por el desarrollo histórico y filosófico de la Matemática, la complejidad mayor que presenta se debe al tipo de abstracción necesario para su funcionamiento, que la distingue de los métodos de validación de otras ciencias (experimentales).

En este grupo de trabajo nos interesa abordar el problema del aprendizaje de la demostración y del desarrollo de argumentos considerando una aproximación pragmática del significado del término «demostración» apoyándonos en la noción de *institución* (en el sentido de Godino y Batanero, 1994) y así considerar el nivel cognitivo del alumno y su contexto escolar, pero sin desatender el significado y caracterización desde la institución matemática. Ello necesita de una caracterización de la demostración en el contexto escolar que se ha ido trabajando en trabajos previos (Larios y Acuña, 2009; Larios y González, aceptado) como sigue, aunque se reconoce que todavía se requiere de un trabajo de sistematización:

1. “Es una justificación implícitamente rigurosa de un hecho matemático.
2. “Está basado en argumentos que tienen como principal función convencer (al interlocutor y a los que le rodean).
3. “Explica dicho hecho rigurosa y explícitamente.
4. “Y su estructura se organiza con base en inferencias de argumentos deductivos.” (Larios y Acuña, 2009, pág. 60)

La demostración puede convertirse en un recurso didáctico para la enseñanza de la Matemática en la escuela, de una manera transversal y diacrónica, considerando la evolución cognitiva del individuo que involucra procesos como la exploración, la experimentación, la observación, la argumentación, el planteamiento de conjeturas, el razonamiento deductivo, entre otros (ver, por ejemplo, Mariotti, 2006).

Dado que el reto del profesor es tomar este recurso de validación de la Matemática desde sus dimensiones estructural y significativa e introducirlo en el aula con la intención de que el alumno comprenda a las Matemáticas como ciencia, el interés de este grupo de trabajo es discutir sobre la naturaleza de la demostración en la clase de Matemáticas y las posibles aproximaciones para su enseñanza en los diferentes niveles y bajo diversos contextos.

Sobre la investigación del aprendizaje de la demostración

Si bien la Didáctica de las Matemáticas es una disciplina científica relativamente “joven”, un área de interés desde por lo menos desde la década de los 1980’s (Hanna, 2009) ha sido el de la demostración y todos los elementos relacionados con ésta. Este tema se ha tratado desde diferentes perspectivas tanto dentro como fuera de la disciplina.

Por ejemplo, en las consideraciones finales de la tesis doctoral de Cecilia Crespo (2007) se comenta el hecho de que se debería poner atención a las argumentaciones que se construyen fuera de la escuela ya que esto daría claves para identificar conocimientos que se construyen en otros espacios en donde el alumno vive y construye las Matemáticas.

La autora establece una peculiar organización de las investigaciones la cual toma como marco organizativo las etapas de la evolución de la matemática educativa como se presentan en Cantoral y Farfán (2003). La lección de las investigaciones que ahí se comentan tiene como finalidad enmarcar el trabajo de la autora y de alguna manera mostrar que son pocas las investigaciones en torno a la demostración que toman en cuenta los escenarios socioculturales de los actores del sistema didáctico.

Por su parte Balacheff (1999) que afirma que la argumentación es un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la demostración, propone sin embargo que se reconozca la existencia de una relación compleja y constitutiva de cada una de ellas, alejándose así tanto de la tesis de la continuidad como de la ruptura. Siguiendo este mismo tenor se tiene la posición de Paolo Boero (1999) que hace una crítica a la tesis de Balacheff, puntualizando que dos son los problemas principales al tratar con el aprendizaje de la demostración en la escuela:

1. “La naturaleza de los argumentos tomados bajo consideración por los estudiantes como argumentos confiables para la validación”, y
2. “la naturaleza de los razonamientos producidos por los estudiantes.”

El papel de la argumentación y de la demostración

Existen investigaciones como la de Wood (1999) que muestran resultados que apoyan la tesis de que la discusión en el salón de clases ayuda al desarrollo de las concepciones de los estudiantes y es a través de la argumentación que se establece la relación entre los procesos sociales involucrados y las oportunidades creadas en el ambiente de la clase de Matemáticas.

También se sabe que las concepciones que los profesores tienen acerca de la demostración son limitadas (Knuth, 2002) y están ligadas a las experiencias de aprendizaje en donde la han utilizado.

Por otro lado, también se ha observado que no existe una función única para la demostración, sino una variedad que son (de Villiers, 1996):

1. Para verificar la veracidad de una proposición,
2. para explicar porque es cierta una proposición,
3. para comunicar conocimiento matemático,
4. para descubrir o crear nuevas matemáticas y

5. para sistematizar proposiciones en un sistema axiomático.

Maria Alessandra Mariotti en el «Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education» (2006) presenta una visión sintetizada del estado de la cuestión la cual organiza alrededor de tres categorías de preguntas de investigación: la prueba en la escuela, dificultades de los estudiantes y la intervención de la enseñanza. Comienza haciendo una aportación relacionada con una perspectiva epistemológica de la demostración, a saber, que se deben considerar dos aspectos básicos: la función de explicación y la necesidad de aceptabilidad. Continúa con una descripción de los diferentes acercamientos para investigar las concepciones de los estudiantes para después abordar la confrontación entre la argumentación y la demostración, la cual queda resuelta a través de la tesis de la unidad cognitiva (Boero, Garuti y Mariotti, 1996). En esta posición no se niega la diferencia y la distancia entre la argumentación y la demostración pero se centra en la idea de una posible continuidad entre ambas. La reseña termina con consideraciones de índole didáctico, especialmente comentando el papel que desempeñan los ambientes de geometría dinámica en la construcción de conjeturas y en el proceso de argumentación y demostración en particular.

Precisamente en Larios (2006) se retoma esta hipótesis de la unidad cognitiva durante la construcción de la demostración utilizando argumentaciones y se afirma que se puede tender un puente desde éstas últimas hacia aquella, y que la función y sentido de la demostración no son únicos ya que dependen del desarrollo cognitivo de los estudiantes, mostrándose la existencia de un ciclo continuo.

El ICMI Study 19: Proof and proving in Mathematics Education

En 2009 se llevó a cabo en Taipei, Taiwán, el 19° ICMI Study cuya temática versó sobre la demostración y el proceso de construir la demostración en la Matemática Educativa. Los temas de estudio propuestos en el documento de discusión fueron los siguientes (Hanna y otros, 2009):

Desarrollo cognitivo. Este aspecto considera el desarrollo completo de la noción de demostración y del proceso de validación para el individuo a lo largo de su historia personal. En esta historia personal cambia sus estrategias para convencerse a sí mismo y a otros sobre los hechos matemáticos a los que se enfrenta.

Argumentación. La argumentación, como un discurso no necesariamente deductivo pero que es plausible y está adecuadamente fundamentado, y la demostración, como cadena organizada de argumentos deductivos, están estrechamente vinculadas.

Experimentación. Es decir, aquel proceso en el que se conjeturan y detectan propiedades y luego se justifican y cuyo proceso afecta el valor epistémico sobre el que se apoyan las creencias de los usuarios. No obstante, en el contexto escolar frecuentemente se elimina al proporcionar un resultado ya obtenido y presentar en su lugar la reconstrucción de la demostración sin el proceso de búsqueda de propiedades que podría darle sentido.

Software dinámico y otros mediadores semióticos. La construcción mental de los conceptos matemáticos está determinada en gran medida por la herramienta usada que cumple un papel de mediador semiótico, lo cual incluye tanto a los objetos en sí como las demostraciones de sus propiedades. En particular el software dinámico (para Geometría por ejemplo) permite

diseñar ambientes que proporcionan la oportunidad de explorar situaciones y generar justificaciones con rasgos particulares.

Los tipos de justificaciones en la escuela. Los alumnos de cualquier nivel tienen capacidad de justificar utilizando argumentos con diversas estructuras o esquemas (ver, por ejemplo, González, 2010; Harel, 2007). Estos tipos de justificaciones están influenciados también por el contexto escolar, los instrumentos utilizados (el uso de software, por ejemplo), el discurso, etc.

La demostración en el nivel superior. En el nivel superior, especialmente en la carrera de Licenciado en Matemática, la demostración debe acercarse cada vez más al significado establecido por la ciencia matemática. En estos niveles se requiere de una comprensión más profunda de la Matemática que requiere de estudios específicos.

Estos temas no agotan la problemática en torno a la demostración pero sí nos dejan ver los puntos de vista que la comunidad internacional de investigadores está considerando. Para el caso de este grupo de trabajo estos temas, aunque no son los únicos pero tampoco ajenos, son los más pertinentes para este el grupo de trabajo.

Actividades del grupo de trabajo

El grupo de trabajo cuenta con tres sesiones de hora y media cada una (cuatro horas y media en total), por lo que se prevé que se presenten participaciones por parte de personas interesadas en el tema de acuerdo con los aspectos mencionados antes organizadas de la siguiente manera:

En las dos primeras sesiones se llevarán a cabo tres presentaciones (de temática relacionada) de 20 minutos cada una y se reservará la última media hora para preguntas a los expositores, la discusión al respecto y el intercambio de ideas. Es importante mencionar que los tres responsables del grupo de trabajo presentarán sus respectivas aportaciones en la primera sesión.

En la última sesión se llevarán a cabo dos presentaciones, también de 20 minutos cada una, y los siguientes 20 minutos se dedicarán para preguntas a los expositores y la discusión al respecto.

La última media hora estará dedicada a la obtención de conclusiones del grupo.

Resultados esperados

Con este grupo de trabajo se pretende consolidar líneas de trabajo y de investigación sobre la construcción de la demostración en ambientes escolares en contextos pertenecientes a la sociedad mexicana. Con ello se promoverá la colaboración de investigadores de diversas instituciones por medio de proyectos que vayan más allá de los límites temporal y espacial del evento.

Referencias

- Balacheff, N. (1999). ¿Es la argumentación un obstáculo? Invitación a un debate. *Preuve, International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 99(05/06).
- Boero, P. (1999). *Argumentación y demostración: Una relación compleja, productiva, e inevitable en las matemáticas en la educación matemática. Preuve, International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof*, 99(07/08).

- Boero, P., Garuti, R. y Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. En Á. Gutiérrez y L. Puig (Edits.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, págs. 121-128). Valencia, España.
- Cantoral, R. A. y Farfán, R. M. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Relime. Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.
- Crespo C., C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología*. México: CICATA, IPN. (Tesis doctoral no publicada.)
- De Villiers, M. (1996). The future of secondary school geometry. *Geometry Imperfect*. Universidad de Sudáfrica, Pretoria, Sudáfrica.
- Godino, J. D. y Batanero B., C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- González G., N. (2010). *Conceptualización de propiedades de las figuras geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio*. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro. (Tesis de maestría no publicada.)
- Hanna, G. (2009). *Gila Hanna personal webpage*. Recuperado el 3 de mayo de 2009 de <http://fcis.oise.utoronto.ca/~ghanna/home.html>
- Hanna, G., de Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H. N. y otros. (2009). ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education: Discussion Document. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Edits.), *ICMI Study 19 Conference Proceedings. Proof and Proving in Mathematics Education* (vol. 1, págs. xix-xxx). Taipei, Taiwán: National Taiwan Normal University.
- Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school* (págs. 65-78). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Knuth, E. (2002). Secondary School mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Larios O., V. (2006). *Demostrar es un problema o el problema es demostrar*. Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro.
- Larios O., V. y Acuña S., C. M. (2009). Geometrical proof in the institutional classroom environment. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna y M. De Villiers (Edits.), *Proceedings of the ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education* (vol. 2, págs. 59-63). Taipei, Taiwán: National Taiwan Normal University.
- Larios O., V. y González G., N. (aceptado). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, Núm. especial.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En Á. Gutiérrez y P. Boero (Edits.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education. Past, present and future* (págs. 173-204). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30(2), 171-191.