

CONFLICTOS SEMIÓTICOS EN EL APRENDIZAJE DE LOS INTERVALOS DE CONFIANZA EN ESTUDIANTES UNIVERSITARIOS

Eusebio Olivo, Carmen Batanero

Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey. Universidad de Granada, España.

eusebio.olivo@itesm.mx, batanero@ugr.es

Resumen

En este trabajo nuestro objeto de atención son los intervalos de confianza, tema donde la investigación didáctica es todavía incipiente. Presentamos los resultados de un estudio semiótico de las respuestas, a un cuestionario formado por seis ítems abiertos, de 252 estudiantes universitarios de ingeniería que recién habían estudiado los intervalos de confianza. Los resultados, en la identificación de algunos conflictos semióticos en su aprendizaje, indican que los estudiantes de esta población tienen dificultades con la interpretación a partir de una salida de la computadora, no comprenden el carácter aleatorio de los extremos de los intervalos, confunden entre media poblacional y media muestral o no comprenden el efecto de factores como la varianza sobre la anchura del intervalo. Finalizamos nuestro trabajo con unas conclusiones para mejorar la enseñanza del tema.

Palabras Clave: *Intervalo de confianza, evaluación, conflictos semióticos, estudiantes universitarios*

Introducción

Proporcionar intervalos de confianza es un método que está siendo cada vez más apreciado para realizar inferencias estadísticas y al que muchos investigadores le añaden ventajas pedagógicas en la enseñanza, en comparación a las hipótesis nulas de las pruebas de significación. Por otro lado, diferentes asociaciones profesionales, como la American Psychological Association (APA) o la American Educational Research Association (AERA) han denunciado errores frecuentes en el uso de la inferencia estadística por parte de los investigadores (Vallecillos, 1994; Harlow, Mulaik y Steiger, 1997; Batanero, 2000; Clark, 2004; Fidler y Cumming, 2005; Lecoutre, 2006). Estos mismos autores sugieren que los intervalos de confianza podrían sustituir o complementar los contrastes de hipótesis para disminuir los problemas citados.

Para llevar a cabo este cambio metodológico en el análisis y reporte de los datos experimentales es necesario asegurar que las dificultades descritas en la interpretación de los tests de hipótesis no se repiten –o al menos no con tanta intensidad– en los intervalos de confianza. Es por ello relevante llevar a cabo estudios de evaluación sobre esta comprensión, que pudiera no ser inmediata, puesto que el intervalo de confianza se apoya en otros conocimientos previos y es un objeto matemático complejo al involucrar diferentes conceptos, procedimientos y propiedades. Especialmente importante es iniciar la identificación de algunos conflictos semióticos en el aprendizaje de los intervalos de confianza, porque estamos convencidos que la idoneidad semiótica de un proceso instruccional debe atender a evitar conflictos semióticos y la idoneidad didáctica⁵ debe procurar que estos conflictos afloren y el profesor sea capaz de resolverlos

⁵ Godino, Wilhelmi y Bencomo (2005) señalan a la idoneidad didáctica como un criterio sistémico de adecuación y pertinencia respecto al proyecto educativo global, interpretada como relativa a unas circunstancias temporales y contextuales cambiantes.

(Godino, Contreras y Font, 2006). Un primer paso para lograrlo será identificar los conflictos que cabe esperar ante determinadas tareas en una proporción importante de los estudiantes.

En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas) y que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso mediante gestos (Godino, 2002). Además en el trabajo matemático los símbolos (significantes) remiten a entidades conceptuales (significados) y un punto crucial de la enseñanza es lograr que los alumnos dominen la semántica (además de la sintaxis) de estos símbolos. La investigación en didáctica de las matemáticas ha mostrado la importancia que tienen las representaciones en la enseñanza y el aprendizaje, pero una cuestión todavía no suficientemente analizada es la variedad de objetos que desempeñan el papel de representación y de los objetos representados (Godino, Contreras y Font, 2006).

Godino en sus trabajos analiza esta cuestión y asume la noción de función semiótica, idea tomada de Eco (1995/1976), como una "correspondencia entre conjuntos", que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial, considerado frecuentemente como el signo);
- Un plano de contenido (objeto final, considerado como el significado del signo, esto es, lo representado, lo que se quiere decir, a lo que se refiere un interlocutor);
- Un criterio o regla de correspondencia, esto es un código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido.

El modelo teórico denominado enfoque onto-semiótico para la cognición e instrucción matemática, (Godino y Batanero, 1998; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Batanero y Roa, 2005), que sirve de marco teórico de nuestra investigación, destaca la diversidad de objetos puestos en juego en la actividad matemática, para referirse a los elementos de significado (situaciones-problemas, lenguaje, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos), cada uno de los cuales puede aparecer como parte de la función semiótica tanto en el plano de la expresión como en el del contenido.

En ocasiones el significado que el profesor o investigador quiere atribuir a una expresión no es interpretado correctamente por el alumno y se produce el *conflicto semiótico*. En estos casos, el error se produce no por una falta de conocimientos, sino por no relacionar adecuadamente los dos términos de una función semiótica.

Metodología del trabajo

Utilizando las ideas del enfoque onto-semiótico clasificamos las respuestas a seis reactivos abiertos en correctas, parcialmente correctas e incorrectas; describimos los conflictos semióticos detectados y evaluamos la comprensión⁶ de los estudiantes sobre los intervalos de confianza. En el análisis semiótico realizado, dividimos en unidades de análisis las respuestas, destacando para cada unidad las principales funciones semióticas establecidas por el alumno así como sus conflictos semióticos. Presentamos finalmente una tabla de frecuencias de respuestas diferentes en el reactivo.

Los seis reactivos abiertos los hemos seleccionado de un instrumento de evaluación de la

⁶ En el enfoque onto-semiótico la comprensión se entiende como competencia y no tanto como proceso mental. Se considera que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas (Font, 2001; Godino, Batanero y Font, 2007).

comprensión de los intervalos de confianza que consta de 12 reactivos de opción múltiple y seis problemas abiertos. Dicho instrumento fue elaborado siguiendo un enfoque sistemático riguroso (Osterlind, 1989) que inició con la tarea de la definición semántica de la variable objeto de medición y que se apoyó en un estudio previo de los libros de estadística usados en la enseñanza en ingeniería (Olivo, 2006).

Los resultados de aplicar el cuestionario, formado por los seis reactivos abiertos, a una muestra de 252 estudiantes del tercer semestre de las carreras de ingeniería en el Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, nos ha permitido analizar los conflictos semióticos que surgen en la comprensión y aplicación de los intervalos de confianza.

Los estudiantes seleccionados para la muestra estaban siguiendo un curso de probabilidad y estadística y recién habían estudiado los intervalos de confianza durante dos semanas. Asimismo conocían las distribuciones de probabilidad, distribuciones muestrales y el resto de los temas incluidos en el cuestionario, que les habían sido enseñados con anterioridad. La calificación media, en su semestre anterior, de estos alumnos que participaron en el estudio fue de 84 (sobre 100). Presentamos a continuación los resultados de uno de los problemas abiertos que componen el cuestionario. Los resultados completos se recogen en Olivo (2008).

Problema abierto

Enseguida presentamos el problema: *interpretación de intervalo de confianza para diferencia de medias obtenido a partir de una salida de computadora* y las soluciones aportadas por los estudiantes con el propósito de analizar y evaluar sus estrategias de resolución y su argumentación.

Problema 1. La siguiente salida de computadora presenta dos muestras simuladas de dos poblaciones normales. La población 1 con $\mu=90$ y $\sigma=10$ y la población 2 con $\mu=92$ y $\sigma=10$:

Muestra 1:

83.3195 87.6793 86.7831 95.0518 92.9781 86.6457 85.1305 97.5013 83.1112 82.2751 82.7831
90.2786 89.5876 71.2591 82.0282 90.6264

Muestra 2:

82.312 95.098 92.598 85.959 91.319 108.130 90.392 90.074 78.789 100.923 85.601 89.861
78.685 100.354 81.267 101.432 85.601

	N	Media	D. Típica	Error típico
C1	16	86.69	6.25	1.6
C2	16	90.80	8.70	2.2

95% IC para $mC1 - mC2$: (-9.6; 1.4)

Escriba el intervalo de confianza que se obtuvo para la diferencia de medias e interprete el resultado.

La respuesta correcta esperada del estudiante incluye: a) escribir la ecuación correcta del intervalo de confianza para la diferencia de medias a partir de la salida de computadora y b) la interpretación correcta del intervalo que puede ser dada en términos de un tanto por ciento de muestreos repetidos en las mismas condiciones cuyo intervalo calculado cubre al parámetro diferencia de medias poblacionales o bien a través de la comparación de las medias en dos

poblaciones de la forma $\mu_1 - \mu_2$, a partir de observar el comportamiento del intervalo de confianza. Si el intervalo va de valores negativos a valores positivos, es decir pasa por el cero, el alumno deberá concluir que las medias de las poblaciones pueden ser iguales. Si el intervalo está formado solamente por valores positivos entonces deberá concluir que la media poblacional 1 es superior a la media poblacional 2. Si el intervalo está formado solamente por valores negativos, entonces deberá concluir que la media poblacional 2 es superior a la media poblacional 1. Un ejemplo se reproduce a continuación y se analiza en la Tabla 1.

Esperamos el siguiente razonamiento de los estudiantes:

“La última línea de la salida del ordenador en que se lee: 95% IC para $mC1-mC2$:(-9.6; 1.4) nos indica que los extremos del intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales son -9.6 y 1.4 a un nivel de confianza de 95%. Simbólicamente podemos escribirlo: $-9.6 < \mu_1 - \mu_2 < 1.4$. Interpretando que en el 95% de muestreos ejecutados en estas mismas condiciones estará contenido el verdadero valor de la diferencia de medias para estas poblaciones. O bien que no es posible suponer que uno de los grupos tenga una media poblacional superior al otro, debido a que el intervalo incluye valores tanto positivos como negativos” (Alumno RV).

Tabla 1. Análisis de la solución correcta al problema 1

Unidad	Contenido	Funciones semióticas
U1	La última línea de la salida del ordenador en que se lee: 95% IC para $mC1-mC2$:(-9.6; 1.4) indica que los extremos del intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales son -9.6 y 1.4 a un nivel de confianza de 95%.	<i>La última línea de la salida del ordenador en que se lee:</i> <i>95% IC para $mC1-mC2$: (-9.6; 1.4):</i> concepto y lenguaje. <i>Extremos del intervalo de confianza, medias poblacionales, nivel de confianza:</i> el alumno nombra distintos conceptos. <i>Diferencia:</i> describe una operación.
U2	Simbólicamente podemos escribirlo: $-9.6 < \mu_1 - \mu_2 < 1.4$ Interpretando que en el 95% de muestreos ejecutados en estas mismas condiciones estará contenido el verdadero valor de la diferencia de medias para estas poblaciones.	<i>Simbólicamente podemos escribirlo</i> <i>$-9.6 < \mu_1 - \mu_2 < 1.4$: (lenguaje)</i> <i>En el 95% de muestreos ejecutados en estas mismas condiciones estará contenido el verdadero valor de la diferencia de medias para estas poblaciones :</i> razonamiento del significado del nivel de confianza
U3	O bien que no es posible suponer que uno de los grupos tenga una media	<i>Media poblacional, valores positivos, valores negativos:</i> el estudiante evoca diferentes conceptos

poblacional superior al otro, debido a que el intervalo incluye valores tanto positivos como negativos.	<i>No es posible suponer que uno de los grupos tenga una media superior al otro, debido a que el intervalo incluye valores tanto positivos como negativos: razonamiento deductivo.</i>
---	--

Otras variantes de respuesta que hemos encontrado son:

Interpretación incompleta. El alumno escribe correctamente el intervalo de confianza para la diferencia de medias y su interpretación, aunque no es completa, se toma como aceptable, como se puede apreciar en el siguiente caso.

“ $-9.6 < \mu_1 - \mu_2 < 1.4$ Hay evidencia de que las medias puedan ser iguales” (Alumno ES).

Interpretación incorrecta y confusión entre media y una medida de variabilidad. El estudiante escribe correctamente el intervalo de confianza para la diferencia de medias, pero da una interpretación incorrecta. Su respuesta, aunque breve, nos permite suponer que tiene un conflicto conceptual relativo a la distinción entre media y una medida de variabilidad. En el caso siguiente se puede observar este conflicto.

“ $-9.6 < \mu_1 - \mu_2 < 1.4$ CI es menos variable” (Alumno JLO).

Error en la interpretación con uso de terminología inexacta. El alumno no escribe el intervalo de confianza y además se presenta un conflicto relativo al procedimiento. El estudiante evoca algunos conceptos, pero su interpretación se llena de errores por el uso de una terminología inexacta que no llega a especificar los parámetros que son estimados por el intervalo en cuestión, como se muestra en el siguiente caso.

“Existe un 95% de confianza de que la salida de computadoras de 2 poblaciones varíe entre -9.6 y 1.4. Tomando en cuenta que la CI es más confiable” (Alumno NM).

Error al copiar la misma salida de computadora y error de interpretación. El alumno escribe el intervalo, copiando la misma salida de computadora y además tiene un conflicto procedimental al dar una interpretación con errores por el uso de términos incorrectamente articulados, que no describen la operación ni los parámetros que intervienen en el intervalo.

“(-9.6; 1.4), (mc1; mc2). El intervalo de confianza obtenido con un 95 % de confianza al tener a muestras simuladas, salidas de una compu en poblaciones normales es entre -9.6 y 1.4” (Alumno JMC).

Otros. En esta categoría están las respuestas de dos alumnos que escribieron un intervalo de confianza para una diferencia de medias muestrales, en lugar de medias poblacionales y que luego no dan alguna interpretación. En estas respuestas surge la confusión entre estadísticos y parámetros. En la Tabla 2 presentamos los resultados del problema 1.

Tabla 2. Frecuencias (y porcentajes) de respuestas en el problema 1 (n=252)

	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Respuestas correctas	39	15.5	15.5
Confusión media y una medida de variabilidad	61	24.2	39.7
Interpretación con uso de terminología inexacta	101	40.1	79.8
Error al copiar la misma salida de computadora y error de interpretación	34	13.5	92.3
Otros	2	.8	94.1
Blanco	15	6.0	100.0
Total	252	100.0	

Observamos que este ítem, el cuál es una adaptación usando Minitab de problema de Johnson y Kuby (2004, pg.363), no resultó sencillo para los alumnos, puesto que un 54.4% de los alumnos interpretaron en forma incorrecta el intervalo, de ellos un 40.1% no escriben el intervalo de confianza y además dan una interpretación incorrecta con el uso de términos completamente ajenos al lenguaje requerido, otro porcentaje (13.5%) escribe el intervalo copiando la misma salida de computadora y dan una interpretación incorrecta con el uso de una terminología que no tiene relación alguna con los parámetros en cuestión.

De los que respondieron en forma parcialmente correcta, 24.2% escriben correctamente el intervalo de confianza para la diferencia de medias, pero dan una interpretación incorrecta cuando señalan que la población 1 es la menos variable. Además observamos un número alto de alumnos con respuestas en blanco para este ítem. Una posible explicación es que algunos grupos de alumnos que participaron en la muestra no recibieron instrucciones de cómo hacer una interpretación a partir de una salida de computadora, que adicionada a la dificultad, per se, de interpretar el intervalo de confianza para diferencia de medias, da por resultado un alto porcentaje de respuestas incorrectas.

Los enunciados de los problemas abiertos: 2, 3, 4, 5 y 6 se presentan en el Anexo 1.

Discusión

A través del análisis realizado de las soluciones correctas e incorrectas a los seis problemas abiertos, se pone de manifiesto la complejidad de la construcción del intervalo de confianza y la multitud de objetos matemáticos que el estudiante ha de poner en relación. Esta variedad y complejidad de elementos explica en parte los conflictos semióticos que surgen en la comprensión y aplicación de este objeto matemático en la resolución de los problemas.

En resumen, en nuestro estudio hemos encontrado los siguientes conflictos semióticos que clasificamos en relación a los elementos de significado de nuestro marco teórico:

1. *Conflictos relativos a las definiciones*: Una parte de los alumnos (24.2%) confunden entre media y una medida de variabilidad y otros alumnos confunden los conceptos de estadístico y parámetro (problema 1), confusión descrita por Vallecillos y Batanero (1997). Tampoco se comprende la definición de grados de libertad, lo que causa errores en la construcción de los intervalos de confianza en los problemas 2, 5 y 6. Podríamos suponer que el exceso de variedad de símbolos utilizados en la obtención de intervalos de confianza, provocan que se pierda el alumno y ni siquiera alcanza a rescatarse el concepto de grados de libertad como un procedimiento sencillo en su cálculo por algunos estudiantes.

2. *Conflictos relativos a las propiedades*: Una cuarta parte de los alumnos (25.8%) mostraron errores de interpretación de la manera como se relaciona la varianza poblacional con el ancho del intervalo (problema 3). Tampoco son capaces de interpretar que los intervalos de confianza representan el porcentaje de intervalos de muestras, tomadas todas bajo las mismas condiciones, que capturan el verdadero valor del parámetro (problema 1), corroborando este resultado las investigaciones de Behar (2001) y Cumming, William y Fidler (2004).

3. *Conflictos procedimentales*: Algunos estudiantes no son capaces de seleccionar una distribución de muestreo apropiada (problemas: 4, 5 y 6) o hacen un uso inadecuado de las tablas para determinación de valores críticos (problemas: 2, 4, 5 y 6). Confirmando los resultados obtenidos en otros trabajos en relación a la comprensión de las distribuciones muestrales (Schuyten, 1991; Vallecillos y Batanero, 1997; delMas, Garfield, Ooms y Chance, 2007).

4. *Conflictos representacionales*: Una parte de los alumnos tienen confusión con las expresiones o símbolos para la media y varianza y además los símbolos de los coeficientes de confianza $t_{\alpha/2}$,

$Z_{\alpha/2}$ y $\chi^2_{\alpha/2}$.

5. Conflictos *argumentativos*: Algunos alumnos argumentan débilmente el proceso y otra fracción importante de alumnos no son capaces de justificar un procedimiento debido, en buena medida, al olvido total o parcial de las fórmulas del intervalo de confianza.

En nuestra revisión de investigaciones relacionadas (problema 4) encontramos algunos trabajos (Newcombe, 1998; Newcombe y Merino, 2006) que estudian la construcción del intervalo de confianza para una proporción, pero no exploran conflictos semióticos en el aprendizaje de los estudiantes. No hemos encontrado estudios relacionados con la construcción de intervalos para la varianza (problema 2), por lo cual nuestros resultados recogidos en Olivo (2008) son una aportación a la investigación empírica de las dificultades en la comprensión y construcción de los mismos a través de este enfoque.

Conclusiones

Todos los conflictos detectados así como las recientes sugerencias de la necesidad de usar intervalos de confianza en la investigación enfatizan tener en cuenta la dificultad de este objeto de estudio y tratar de mejorar su enseñanza. Una posibilidad de mejorar esta enseñanza sería apoyarse en las computadoras, donde a través de uso de software (Statiscope⁷, WebStat, etc.), acompañado de guías didácticas elaboradas, los estudiantes pueden simular y explorar en forma más activa el significado de los intervalos y el efecto que tiene sobre los mismos el tamaño de muestra, varianza y coeficiente de confianza. Otra posibilidad es que la enseñanza del tópico debiera ser organizada de tal manera que el estudiante se haga consciente de la interpretación correcta de dicho coeficiente, de la diferencia entre estadístico y parámetro, y que mismos objetos asociados aparecen a diferentes niveles. Por ejemplo, la idea de distribución relacionada con la población (distribución de la variable aleatoria), y con el muestreo (distribución muestral del estadístico); cuando nos referimos a uno de estos niveles el estudiante podría interpretar otro. Asimismo resaltar a los estudiantes la importancia de elegir una adecuada distribución muestral y el procedimiento computacional apropiado en el cálculo de los intervalos de confianza.

Agradecimientos

Se agradece a la fundación Carolina y al Tec de Monterrey.

Referencias

- Batanero, C. (2000). Controversies around significance tests. *Journal of Mathematics Thinking and Learning*, 2(1-2), 75-98.
- Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña.
- Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication, and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics*, 3, 299-311
- delMas, R.C., Garfield, J.B., Ooms, A. y Chance, B.L. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 28-58. On line: www.stat.auckland.ac.nz/serj.
- Eco, U. (1995). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen. (Trabajo original publicado en 1976)

⁷ Este applet de Bonnier M. (Varpinge, Lund, Scania, Sweden), Statiscope, se localiza en internet en <http://www.df.lth.se/~mikaelb/statiscope/statiscope-enu.shtml>

- Fidler, F. y Cumming, G. (2005). Teaching confidence intervals: Problems and potential solutions. *Proceedings of the 55th International Statistics Institute Session CD-ROM*. Sidney, Australia: International Statistical Institute
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22 (2 y 3), 237-284.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. En A. Sierpinska y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Roa, R. (2005). An onto-semiotic analysis of combinatorial problems and the solving processes by university students. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 3-36
- Godino, J. D., Contreras A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de introducción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 26 (1), 39-88.
- Harlow, L., Mulaik, S. A. y Steiger, J. H. (1997). *What if there were no significance tests?* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Lecoutre, B. (2006). Training Students and Researchers in Bayesian Methods. *Journal of Data Science*, 4, 207 – 232.
- Newcombe, R.G. (1998). Two-sided confidence intervals for the single proportion: Comparison of seven methods. *Statistics in Medicine*, 17, 857-872.
- Newcombe, R.G. y Merino, C. (2006). Intervalos de confianza para las estimaciones de proporciones y sus diferencias entre ellas. *Interdisciplinaria*, 23(2), 141-154.
- Olivo, E. (2006). *Análisis de la presentación de intervalos de confianza en textos de estadística para ingenieros*. Trabajo de Investigación Tutelada. Universidad de Granada.
- Olivo, E. (2008). *Significados de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Osterlind, S.J. (1989). *Constructing test items*. Boston: Kluwer.
- Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. Vere-Jones (Ed.). *Proceeding of the Third International Conference on Teaching Statistics* (pp. 486-490). Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute.
- Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico - experimental de errores y concepciones sobre el contraste de hipótesis en estudiantes universitarios*. Tesis doctoral Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.
- Vallecillos, A. y Batanero, C. (1997). Conceptos activados en el contraste de hipótesis estadísticas y su comprensión por estudiantes universitarios. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17 (1), 29-48.
- Wilhelmi, M. R., Godino, J. D. y Lacasta, E. (2007). Configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 27 (1), 77 - 120.