ESTRATEGIAS EMPLEADAS POR ALUMNOS DE SECUNDARIA, AL HACER USO DE SUCESIONES FIGURATIVAS PARA DEFINIR EL TÉRMINO ENÉSIMO

Juan Carlos Osorio Paulino
DME, Cinvestav, Méxio D.F
josorio@cinvestav.mx, thinkingmathematics@live.com

Resumen

El avance que aquí se reporta hace referencia a los resultados parciales que se tienen sobre las estrategias que los alumnos de edades entre 14 y 15 años de edad de nivel básico emplean cuando tratan una situación que refiere al contenido de sucesiones figurativas de tipo lineal. Para ello, el fundamento está mediado por las aportaciones de Ferrini y Lapan, sólo por mencionar algunos, que hacen alusión de cómo el uso de patrones permiten al alumno desarrollar el pensamiento algebraico. Asimismo, como parte de la investigación, se analiza la relevancia que está teniendo éste contenido en los diferentes currículos. La visualización como una ayuda para que el alumno haga generalización, así como también, el sustento teórico fijado por el Modelo Teórico Local que del cual sólo trataremos dos componentes: Modelo de Enseñanza y Procesos Cognitivos, forman parte de la perspectiva teórica para el desarrollo de la investigación.
Palabras Clave: *Sucesiones; patrones figurativos; enésimo término*

Introducción

El proceso de transición de la aritmética al álgebra es un tema de rigor que ha sido tratado en muchas investigaciones, unas muy apegadas a errores que comenten los alumnos, cuando por ejemplo hacen uso de símbolos (Kieran, 1981) y otras, que ponen en evidencia el problema que implica para los alumnos enfrentarse con situaciones en donde se debe buscar una solución a una ecuación (Filloy & Rojano, 1989).

Por otra parte, por el hecho de que los alumnos estén tratando contenido matemático referente al álgebra, implica que cuando se presentan situaciones en donde hay que hacer uso de símbolos o determinar valores los alumnos tienen una tendencia a utilizar el tanteo o heurística de ensayo y error. Filloy (1999) afirma que con cierto perfil de desempeño, el alumno logra centrarse en la utilización de un método: el tanteo. Los aprendices se afianzan a un concepto, lo cual crea esquemas que perduran y conlleva a cometer errores conforme su educación en matemática avanza, por tal razón, el alumno cuando se enfrenta a una situación en donde hay que tratar números complejos, las habilidades con las que se cuenta, son tan pobres que imposibilitan dar una respuesta sin cometer error.

Muchas de estas dificultades intrínsecas que el aprendizaje presenta están ligados a:

> Los errores usuales de sintaxis cuando se trabaja operatoriamente con las expresiones algebraicas, los errores de traducción cuando se utiliza álgebra para resolver problemas escritos en el lenguaje usual, las interpretaciones erróneas del significado de las expresiones algebraicas, dados los diferentes contextos en que ellas aparecen, las dificultades para encontrarles algún significado, la imposibilidad de la utilización del álgebra para resolver problemas usuales (Filloy, 1999).

El contenido matemático que se está tratando en la presente, está siendo considerado en los diferentes currículos, como es el caso de la propuesta institucional de México (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2006). En ella se pueden encontrar actividades referentes al contenido matemático que aquí se investiga, con objetivos muy particulares, que buscan mediante la inducción establecer una generalización. Por otro lado, identificar patrones y relaciones entre la figura y número son unas de las consideraciones para la evaluación en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (Real Decreto 1345, 1991)

Muchas investigaciones referentes al uso de patrones para conciliar la generalización, están siendo relevantes en el ámbito de Matemática Educativa, esto teniendo como antecedente y consecuencia, de que el tratar con este contenido matemático permite que se construya el foco o centro del álgebra formal (National Council of Teacher of Mathematis [NCTM], 1989). Generalizar el comportamiento de un patrón o establecer una fórmula matemática implica que el alumno a partir de una situación particular, perciba un patrón, observe como los valores asociados al incremento o decremento tienen una regularidad; es decir, que a partir del trato de este concepto matemático, se busca sintetizar una sucesión mediante una expresión algebraica para más adelante determinar por ejemplo, otros valores o términos conectados a una sucesión.

En lo que respecta a la importancia de los procesos de generalización que los alumnos llevan a cabo; mediante la utilización de patrones, ha sido tema de discusión en varias investigaciones como las de Stacey (1989) y Fou-Lai y Kai Lin (2004).

Reconocer y describir patrones es una importante aportación para el ámbito matemático educativo pues surge como una viabilidad para generalizar en matemáticas: construir fórmulas.

El estudio de patrones es una forma productiva para desarrollar el pensamiento algebraico en grados elementales o básicos (Ferrini, Lappan & Phillips, 1997) esto conlleva a que el alumno al entrar en contacto con situaciones como estas, le permite entablar una relación entre el comportamiento matemático de los patrones, conduciéndolo a formar o construir una expresión algebraica para definir el término enésimo.

La percepción de esas pautas por los alumnos, su utilización para resolver problemas no triviales y su ulterior generalización se consideran tareas relevantes en la educación secundaria (García & Martinón, 1999).

Cuando los alumnos tratan con sucesiones figurativas, están observando cómo los valores respecto a la figura, cambian según la posición que tenga ésta, entonces hacen uso de esa representación para verificar como los valores se modifican. Según Zimmerman & Cunningham (1991) la visualización que se produce a través de una representación ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos. Lo anterior, refleja la importancia de la visualización, pues permite que el alumno relacione las figuras, con el patrón matemático.

Para desarrollar estrategias de enseñanza en los inicios de la adquisición de competencias de un Sistema Matemático de Signos (SMS) es importante distinguir entre los "modelajes concreto y sintáctico" pues son en cierta manera, un punto relevante para generar estrategias en situaciones posteriores, el modelar en términos concretos es tomar en ese contexto las nuevas operaciones y los nuevos objetos para dar a éstos un significado pertinente.

El propósito de este artículo, es dar a conocer algunas estrategias que emplean los alumnos, al hacer uso de sucesiones figurativas, esto con el objeto de responder a la pregunta ¿qué estrategias convencionales o no, utilizan los alumnos para definir el enésimo término de una sucesión?

Método

La investigación es de tipo cualitativo, se revisa en una primera fase, la propuesta institucional (SEP, 2006) para educación secundaria, con el objeto de identificar las orientaciones respecto a conceptos relacionados con álgebra y actividades vinculadas con el contenido tratado en la investigación. Para observar como proceden los alumnos que se encuentran en educación secundaria de edades 14-15 años, respecto al contenido matemático aquí expuesto, se consideran elementos que forman parte del esquema del desarrollo de la experimentación (Figura1). Se aplica un cuestionario, para determinar la eficiencia del estado del conocimiento de los alumnos en relación al SMS. Posteriormente, se clasifica a la población según el desempeño que se obtiene en el cuestionario, luego, se elige un subgrupo en las que estén presentes diferentes clases o estratos de desempeño y se realiza un estudio de casos mediante entrevista clínica individual videograbada.

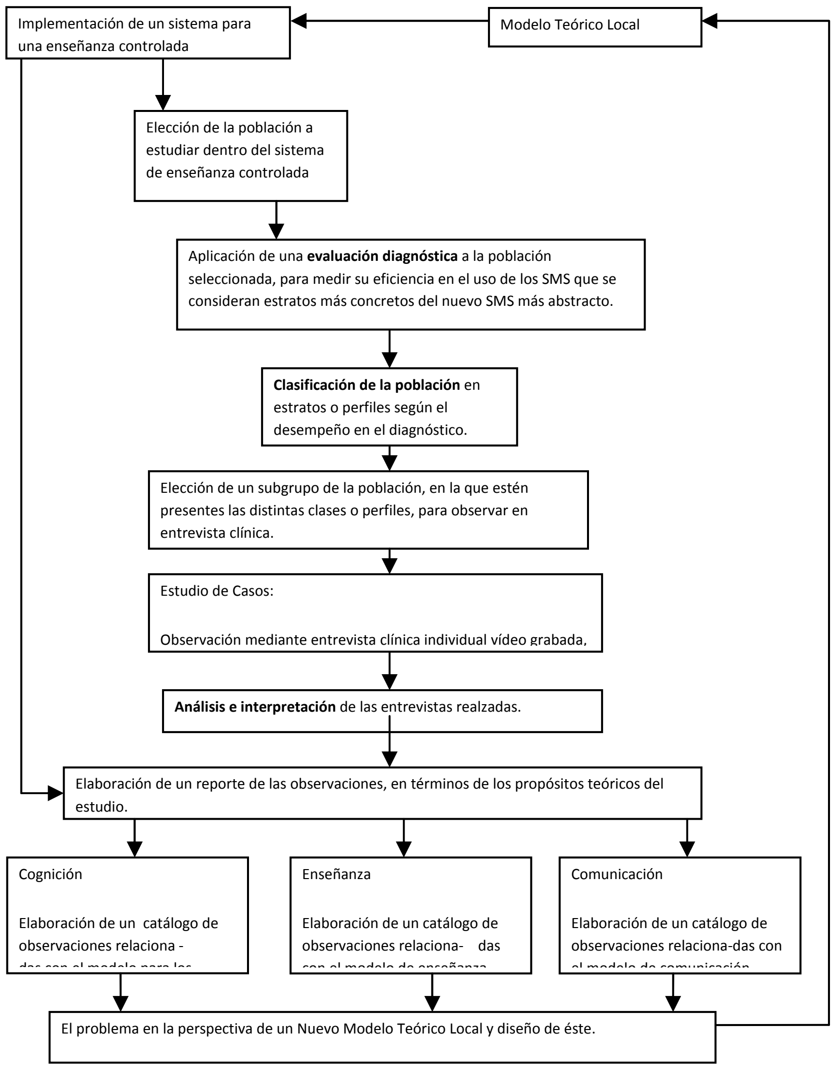

Figura 1. Esquema del desarrollo de la experimentación.

Resultados e interpretación

Como se hizo mención, los resultados aquí expuestos son preliminares, pero pertinentes durante y después de la investigación. La propuesta institucional (SEP, 2006) correspondiente a la modalidad de educación secundaria hace referencia, específicamente en el apartado que corresponde al eje temático sentido numérico y pensamiento algebraico, que los alumnos deben profundizar en el estudio del álgebra con los tres usos de las literales conceptualmente distintas: como número general, como incógnita y como relación funcional (véase pág. 9), esto implica que el alumno debe reconocer y generalizar propiedades aritméticas y geométricas haciendo uso del álgebra. Además, el programa de estudio es muy enfático al mencionar de que el conocimiento de reglas, algoritmos y otros elementos fundamentales para la adquisición formal de un concepto matemático requiere que se dé un tratamiento informal para evitar el proceso de la memorización y así dar posibilidad al alumno de: conjeturar, reflexionar interpretar y generalizar sobre una situación que se le esté planteando. La Tabla 1 muestra en breve el análisis de los componentes de la propuesta institucional.

Análisis	*Resultado*
Propuesta institucional	Tres ejes: Sentido numérico y pensamiento algebraico; Forma, espacio y medida y Manejo de la información.
Contenido tratado respecto a la presente	Eje: Sentido numérico y pensamiento algebraico. Primer y segundo grado: Sucesiones de grado uno. Tercer grado: Sucesiones de segundo orden; método de diferencias.
Fichero de actividades	Actividades que de igual forma, se encuentran en los planes de clase. Sucesiones de segundo grado.
Libro del Maestro.	No hay actividades referentes al contenido
Literatura	Existencia relevante. Sigue en proceso

Tabla 1: Análisis respecto a la Plan de Estudios (SEP, 2006) Fichero de Actividades (2004), Libro para el Maestro (2004), literatura relevante asociado al contenido

En un primer acercamiento, se pudo observar como los alumnos de educación secundaria procedían para determinar el número total de cuadrados faltantes en cada una de las posiciones correspondientes. Se debe aclarar que para esta actividad (Figura 2), solamente se dio la indicación de completar los espacios vacios, esto es, completar con el respectivo número de cuadrados los términos: Fig 4, Fig 6 y Fig 7.

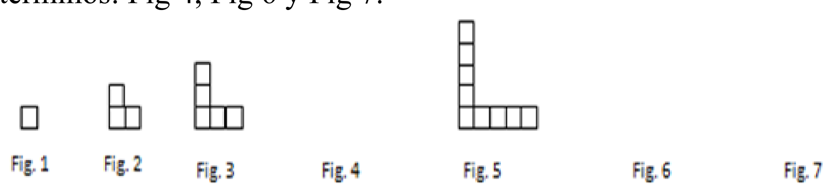

Figura 2. Sucesión figurativa de primer orden

Para determinar esta sucesión una alumna observó que los incrementos variaban según el número de la figura. Además, contempló que la figura uno; tenía un cuadrado, la figura dos; tres cuadrados y la figura tres; cinco cuadrados. Ella explicó que el ver la diferencia numérica en relación a los cuadrados y entre los términos (posición) le ayudaría a completar los espacios vacios, como por ejemplo: la diferencia entre el número de cuadrados de la figura dos (Fig. 2) y la figura uno (Fig. 1). Dado que B (Fig. 2) contiene tres cuadrados y A (Fig. 1) un cuadrado, la

diferencia entre B y A es de dos cuadrados; lo cual quiere decir que el incremento fue de dos. Luego, se efectúa dicho procedimiento para observar el incremento entre la figuras (Fig. 2) y (Fig. 3), esto es C (Fig. 3) menos B (Fig. 2) lo cual concluye en que también existe un incremento de dos. Y respecto a completar la figura cuatro, la forma en la que se lleva a cabo dicho procedimiento es de la siguiente manera: se cuenta el número de cuadrados que corresponden a la figura (Fig. 5), que son nueve cuadrados, posterior le resta numéricamente o quita dos cuadrados para obtener el número de componentes que forman a la figura (Fig. 4), esto es 7. La alumna como ya había descubierto que en cada figura se aumentaban dos cuadrados, sumo dos más al número que corresponde al término tres (Fig. 3) y obtuvo la cantidad de 7. Ella concluyó que para cada término el incremento o patrón, era dos.
Otro alumno, estableció una ley de correspondencia (Tabla 2).

Número de figura (Posición o Término)	*Base de la figura*	*Altura de la figura*	*Número total de cuadrados en cada figura*
1	1	1	1
2	2	2	3
3	3	3	5
4	4	4	7
5	5	5	9
6	6	6	11
7	7	7	13

Tabla 2. Correspondencia de valores

Es imprescindible decir, que el alumno no utilizó una tabla como la anterior, pero, sí es de suma importancia mencionar que estableció una relación entre la posición de la figura y el número de cuadrados que están contenidas en cada uno de los términos, al afirmarnos que “porque todas las figuras depende del número de cuadrados si es fig. 1 va a tener un cuadrado, figura 2 voy a tener dos cuadrados de base y dos de altura y así sucesivamente que hacen tres”. Aunque los procesos que emplea son catalogados de manera inusual en matemáticas, lo que está efectuando y mostrando este aprendiz es que hay una relación que le permite determinar el número de cuadrados. Primero establece que hay una base y una altura. Por ejemplo: se tienen una base de tres cuadritos y una altura de tres cuadritos, pero visualmente se observa que estos valores son alterados, pues la base en términos numéricos se conserva tres de base y tres de altura; suponiendo que la figura no está divida. Sin embargo, no sucede esto en la imagen, pues en la base (zona vertical) se tienes tres cuadrados y la altura (zona horizontal) son dos más que hacen cinco (Figura 3) lo cual es el número de cuadrados que representa.

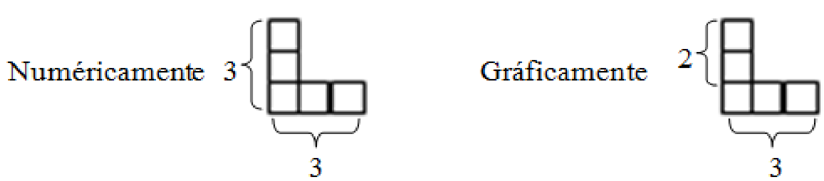

Figura 3. Representación para determinar el número total de cuadrados en relación a la base y altura

Por otro parte, hay alumnos que optan por contabilizar el número de cuadrados, de cada una de las figuras y así dibujar las que faltan, identifican el patrón numérico y geométrico; es decir; la constante.
A diferencia de la actividad anterior (Figura 2), que sólo se pedía completar los espacios mediante un dibujo, ahora la consiga consistió en que alumno mediante el uso de los datos de la tabla (Tabla 3) encontrara dos valores numéricos faltantes y determinara la expresión algebraica.

nº de triángulos	1	2	3	4	5
Figura					
nº de lados	3	5	7	?	?

Tabla 3. Representación referente a sucesiones de tipo lineal

En esta consigna, como ya se hizo mención, uno de los objetivos es que el alumno llegue a determinar una expresión que permita simplificar todo un proceso: generalizar. El objetivo para nosotros fue ver que estrategias empleo el alumno al tratar con este tipo de situaciones y que dificultades se tuvieron al respecto para expresar en términos matemáticos el comportamiento de un patrón.
En entrevista con una alumna (días después de la aplicación) se pudo rescatar lo que a continuación se describe:

Entrevistador: … ¿cómo determinas que la figura cuatro va a tener nueve lados, y la figura cinco va a tener once lados?
Entrevistada: porque el aumento entre cada figura es de dos y, me base en las figuras para determinar cuál era el número de lados que necesita poner yo en el cuatro y también poner en el cinco.
Entrevistador: ese dos que tú me acabas de platicar ¿es para todos los casos? Es decir, si yo quiero saber cuántos elementos tiene mi figura seis, ¿también ese dos lo tengo que conservar?
Entrevistada: sí, porque es este, es para todas las figuras, porque hay una, igual es como una, es una constante entre cada figura y para eso yo me baso para determinar cual figura, este, para determinar cuál figura tiene el número de lados que me piden.

Una de las preguntas que se plantearon en esta actividad, fue: ¿cuántos lados necesitas para formar la figura 13? La alumna nos dijo:

Entrevistada: bueno, aquí traté de hacer una expresión algebraica y para figurar que era, cuál era el número dos que necesitaba el tres, entonces tengo mi constante dos y esa la multiplico por el numero de mi figura, más uno que sería lo que me faltaría para llegar al resultado que me están dando; el número de lados.

En lo referente a llenar espacios y completar mediante un dibujo las sucesiones descritas, se observa que la alumna no tiene dificultades para llevar a cabo dicha tarea, identifica el patrón tanto numérico, como geométrico.
Si bien es cierto en los tres casos expuesto podemos observar como el alumno haciendo uso de la imagen le permite concluir cuál será su procedimiento para encontrar los términos faltantes, además, como un recurso, la figura sirvió para que de cierta manera pudiera construir una expresión algebraica que determinará el enésimo término y asimismo llenar los espacios vacíos (poner grafica y numéricamente, el sucesor de la sucesión).

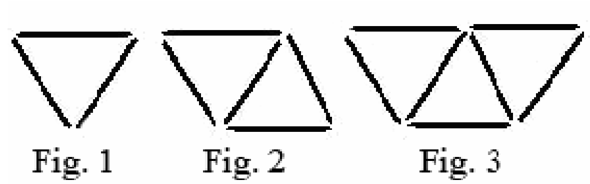

Figura 4. Actividad "Patrones figurativos"

Para la siguiente transcripción de la entrevista, se tomo en cuenta una actividad (Figura 4) que forma parte del diseño del Modelo de Enseñanza que pretendemos llevar a cabo. En ésta se pide que el alumno dibuje los dos términos siguientes, complete una tabla y determine la expresión algebraica, es importante decir que al alumno se le hace saber que cada figura está formada por palillos (lados).

Entrevistador: Ok, pero ahora pasamos a la siguiente hoja, y ahora vamos a observar está siguiente sucesión, nos da una serie de triángulos, pero, específicamente la actividad no consiste en sacar cuantos triángulos va tener dicha figura sino más bien cuantos lados, entonces, una de las consignas es que dibujes la cuarta y quinta figura, ¿cómo hiciste o que tomaste como referencia para poder dibujar esas figuras?
Entrevistada: porque, como van yendo como esta la primera va para abajo, luego a la segunda el triángulo va de un lado pero va al revés, luego vuelve aumentar un triángulo pero de lado contrario
Entrevistador: En esta (se señala) llenaste la tabla, el número de lados… Que es lo que me habías comentado, como es que va aumentando, pero, ahora ¿Cuál es la expresión algebraica que corresponde al comportamiento de ésta sucesión? ¿Recuerdas cómo le hiciste o cuál expresión encontraste?
Entrevistada: Esta1n+2 (Escribió)
Entrevistado: … ¿Qué representa uno?
Entrevistada: El número de lados más que se va aumentando

La entrevista aquí descrita, muestra que la alumna hace uso de símbolos, aunque no generalizó respecto a las condiciones del problema de forma correcta, pero llegó a una expresión que determina el incremento respecto al perímetro de la figura.

Conclusiones
El aprendiz al intentar construir las figuras subsecuentes o figuras faltantes, lo que realiza es un análisis de la figura; es decir, descompone en partes a esa figura, por así decirlo, contabiliza cada de uno de los elementos que pertenecen al conjunto (figura) y se da cuenta que existe un incremento y que además, es constante. Además, también se emplea la operación de sustracción, esto para averiguar cuántos cuadrados aumentaron respecto a la figura y determinar el patrón de

dicha sucesión. Aunque es una forma informal de observar y encontrar patrones, las figuras forman parte fundamental para llegar a determinar el patrón matemático. Cuando el alumno, considera que cada de una de las figuras, tiene una base y una altura, pareciera ser que su afirmación es errónea, pero, sucede todo lo contrario, ya que emplea cálculo mental, esto es, si tengo como base X y como altura X, suma la base y la altura y después resta uno para determinar el total de cuadrados (Tabla 1). Cuando se pide que se determine una expresión algebraica, se procede de la siguiente manera: se encuentra el patrón de dicha sucesión, multiplican el patrón por el número de la figura o posición y después suman. La última acción (sumar) que se lleva a cabo, lo que muestra es que se hace uso del método del tanteo, ya que se prueba, si el aumentarle tal cantidad, satisface la condición establecida de dicha sucesión. En general, se observa que cuando se trata de determinar valores faltantes o dibujarlos el alumno se apoya en el esquema, para llevar a cabo su tarea, esto mismo pasa con pocos casos cuando se trata de expresar en forma algebraica la situación dada ya que varios alumnos no llegan a sintetizar tal expresión.

Referencias

Ferrini, J. Lappan G. & Phillips E. (1997) Experiencies with Patterning. *Teaching Children Mathematics 3 (6)* 282-289.

Fou-Lai, L. & Kai-Li, Y. (2004) Differentiation of students' reasoning on linear and quadratic geometric number pattern. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 457-464). Bergen: Bergen University College.)

Filloy, E. (1999) *Aspectos Teóricos de Algebra Educativa*. México: Iberoamérica.

Filloy, E. & Rojano T. (1989) Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

García, C & Martinón C. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas 17*(1), 31-44.

Kieran, C. (1981) Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics, 12*(3), 317-326.

Nacional Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, Virginia: Council.

Real Decreto 1345 (1991) *Curriculum de la Enseñanza Obligatoria.* B.O.E 220. Madrid.

Secretaría de Educación Pública (2004). *Fichero de actividades 2004*. *Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. México: SEP

Secretaría de Educación Pública (2004). *Libro para el maestro 2004*. *Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. México: SEP

Secretaría de Educación Pública (2006). *Programa de estudios 2006. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. Dirección General de Desarrollo Curricular. México: SEP.

Stacey K. (1989) Finding and Using Patterns in Linear Generalising Problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2)*,* 147-164.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.