

CONOCIMIENTO DIDACTICO-MATEMÁTICO SOBRE LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA DERIVADA

Luis Pino-Fan, Juan D. Godino y Vicenç Font

Universidad de Granada, Universidad de Granada, Universidad de Barcelona
lrpino@ugr.es, jgodino@ugr.es, vfont@d5.ub.es

Resumen

Las cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje del cálculo infinitesimal han sido intensamente investigadas en educación matemática. En particular la derivada, considerada como noción clave del Cálculo, ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos y tipos de errores) e instruccionales. La gran cantidad de resultados de la investigación didáctica sobre la derivada plantea un reto a los formadores de profesores, que sintetizamos en la siguiente pregunta, ¿Qué debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible? El objetivo de nuestra investigación es avanzar en la reconstrucción del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada utilizando algunas herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática.

Palabras clave: *derivada, enfoque ontosemiótico, Cálculo*

Antecedentes

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituye un campo de investigación que reclama atención por parte de la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática y de las administraciones educativas. La principal razón es que el desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos depende de manera esencial de la formación de sus respectivos profesores. Como señala Moreno (2005), el profesor es clave para el éxito y necesario para implementar cualquier cambio o propuesta didáctica que tenga su origen en la investigación. De acuerdo con Ponte y Chapman (2006), las investigaciones realizadas dentro del campo de formación de profesores de matemáticas, se han centrado en diversos aspectos del conocimiento y la práctica del profesor, mismos que pueden ser agrupados en cuatro grandes categorías: a) conocimiento matemático de los profesores, b) conocimiento de los profesores para la enseñanza de las matemáticas, c) creencias y concepciones de los profesores, y d) la práctica del profesor. Las investigaciones sobre la práctica del profesor en la enseñanza de la derivada se pueden clasificar en dos grupos: aquellas relativas al uso de las nuevas tecnologías (ordenadores, calculadoras gráficas) y aquellas que señalan el uso de problemas de aplicación a ciencias del cálculo, introduciéndolo a través de problemas, por ejemplo, de la física. Dichas investigaciones relativas a la práctica del profesor cuando enseñan cálculo, ponen de manifiesto la búsqueda de formas de modelar o caracterizar dicha práctica a través del uso de herramientas tecnológicas, presencia de diferentes representaciones o uso de situaciones en las que se aplica el cálculo (Gavilán, 2005). En lo que se refiere a los conocimientos del profesor de matemáticas existen diversas propuestas de modelos con los que se trata de determinar los elementos que componen el conocimiento que los profesores de matemáticas deberían tener para desarrollarse eficazmente en su práctica y facilitar el aprendizaje de sus estudiantes.

Uno de los pioneros en esta área fue Shulman quien, en su trabajo de 1986, propuso tres categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento

pedagógico del contenido (PCK⁸) y conocimiento curricular. El PCK es descrito por Shulman como “la forma particular del conocimiento del contenido que incorpora el aspecto del contenido que guarda más relación con la enseñanza” (p. 9). Posteriormente, en otro trabajo, Shulman (1987) amplía sus ideas y propone siete categorías para el conocimiento del profesor: conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico general, conocimiento curricular, conocimiento pedagógico del contenido (PCK), conocimiento de los estudiantes y sus características, conocimiento de los contextos educativos, y conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación. Otro de los trabajos importantes en el campo, es el desarrollado, en diversas investigaciones, por Deborah Ball y colaboradores (Ball, 2000; Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008), quienes apoyándose en las ideas de Shulman (concretamente en las nociones del conocimiento del contenido y conocimiento pedagógico del contenido), han propuesto la noción de “conocimiento matemático para la enseñanza (MKT⁹)” definido como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 374). Este conocimiento (MKT) está conformado por dos grandes categorías, cada una de las cuales, a su vez, están conformadas por otras categorías de conocimiento: el conocimiento del contenido (que incluye el conocimiento común del contenido, conocimiento especializado del contenido y conocimiento en el horizonte matemático) y el conocimiento pedagógico del contenido (conformado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo). Esto se puede ver de manera más clara en la Figura 1.

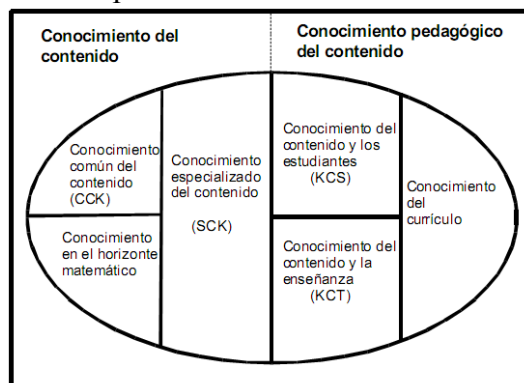


Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill, Ball y Schilling, 2008, p. 377)

Sin embargo, como señala Godino (2009), los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, si se quiere seguir avanzando en aspectos tales como profundizar en la trama de conocimientos que requiere el profesor para enseñar matemáticas, es necesario centrarse en tópicos concretos, por ejemplo, el conocimiento que requiere el profesorado de bachillerato para enseñar el objeto derivada.

Por esta razón, nos hemos interesado en investigar cuáles son los conocimientos didácticos y matemáticos que debe tener un profesor de matemáticas de bachillerato, con relación a la

⁸ Pedagogical Content Knowledge

⁹ Mathematical Knowledge for Teaching

enseñanza de la noción de derivada. Así, en el presente trabajo pretendemos dar a conocer los avances que, al respecto, se tienen del desarrollo en curso de un proyecto de investigación de posgrado.

Problemática

La enseñanza de las nociones del Cálculo es conocida por ser una fuente de serios problemas, tanto para los alumnos como para los profesores (Hitt, 2003), de cara a la comprensión de sus ideas fundamentales. El objeto derivada, es uno de los conceptos fundamentales para el estudio del Cálculo, pero frecuentemente el tratamiento que se le da en las instituciones educativas, se enfoca al manejo y la aplicación de fórmulas y recursos algebraicos, lo que provoca en los estudiantes dificultades para la comprensión de este concepto. Artigue (1995) señala que aunque se puede enseñar a los alumnos a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas, se encuentran grandes dificultades para que los estudiantes logren alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento de esta rama de las matemáticas. Si bien es cierto que los múltiples problemas a los que se enfrentan los alumnos se deben, en cierto modo, a la naturaleza compleja de la noción de derivada, esta problemática, en gran parte, se debe a cómo el profesor enseña los conocimientos sobre dicho concepto a los alumnos. Y es que en algunas ocasiones, el profesor no tiene un buen dominio de las matemáticas que enseña (clara comprensión del concepto, diversas formas de representación, distintos significados del concepto, etc.) (Badillo, 2003), o bien, domina los conceptos matemáticos, pero no tienen herramientas suficientes para enseñar eficazmente esos saberes a sus estudiantes (unidades didácticas, discurso, etc.) (Cantoral y Farfán, 2004). Tal es el caso de la problemática que se ha reflejado en diversas investigaciones sobre cómo presentan los libros de texto la noción de la derivada (ver por ejemplo, Contreras, Font, Luque y Ordóñez, 2005). En general, la derivada ha sido objeto de especial atención desde distintas aproximaciones teóricas, particularmente las cuestiones de índole cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos y tipos de errores) e instruccionales (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada). Sin embargo, como bien señala Gavilán (2005), existen muy pocas investigaciones centradas en los profesores con relación a la noción de derivada. Y es que el profesor es clave para el éxito y necesario para implementar cualquier cambio o propuesta didáctica que tenga su origen en la investigación (Moreno, 2005). El desarrollo del pensamiento y de las competencias matemáticas de los alumnos de una institución, depende de manera esencial de la formación de sus respectivos profesores. Esta gran cantidad de resultados de la investigación didáctica sobre la derivada plantea un reto a los formadores de profesores, que sintetizamos con la pregunta: *¿Qué debería conocer un profesor para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible?* En este sentido, en nuestro proyecto de investigación, nos hemos interesado por los conocimientos que el profesor de bachillerato debe de tener para la enseñanza de la derivada, planteándonos las siguientes cuestiones: *¿Cuál es el conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado de bachillerato para enseñar temas sobre las nociones básicas del cálculo diferencial?, ¿Qué nos dicen las investigaciones realizadas en el ámbito de didáctica de la matemática, acerca de los conocimientos que debe tener el profesor de bachillerato, para la enseñanza de la noción de derivada? y ¿Qué tipo de formación inicial y permanente es necesaria para lograr que el profesor desarrolle los conocimientos didáctico-matemáticos para una enseñanza idónea de la derivada?*

Dada la amplitud y complejidad del problema esbozado en las líneas anteriores, en nuestro proyecto de investigación abordaremos dos estudios orientados hacia la caracterización del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. El primer estudio se centra en la dimensión epistémica, esto es, la descripción del significado global de la derivada, distinguiendo

los significados parciales de la misma y su articulación. En el segundo estudio abordamos el análisis y síntesis de las investigaciones didácticas sobre la derivada, sistematizando los conocimientos aportados en las diferentes facetas de la enseñanza y aprendizaje de este concepto.

Conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada

Una de las problemáticas que más ha interesado, dentro del campo de formación de profesores de matemáticas, es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático del profesorado requerido para enseñar matemáticas. Sin embargo, como bien señala Gavilán (2005), existen muy pocas investigaciones centradas en los profesores en relación a la noción de derivada, y menos aún, sobre los conocimientos que debe de tener un profesor sobre esta noción. La cuestión es, cómo determinar dicho conocimiento didáctico-matemático con modelos que incluyen categorías demasiado “globales”. Godino (2009) sugiere que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, esto permitiría orientar el diseño de acciones formativas y la elaboración de instrumentos de evaluación de los conocimientos de profesor de matemáticas. En este sentido Godino (2009) propone un modelo de “*Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM)*” que permite categorizar y analizar los conocimientos didácticos-matemáticos del profesor, mediante la aplicación del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS). Dicho marco teórico viene desarrollándose, desde 1994, en diversos trabajos por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, Batanero y Font, 2007), e incluye un modelo epistemológico sobre las matemáticas, sobre bases antropológicas y socioculturales, un modelo cognitivo, sobre bases semióticas de índole pragmatista, y un modelo instruccional coherente con los anteriores. Antes de continuar, debemos señalar qué es lo que estamos entendiendo por conocimiento didáctico-matemático. Nosotros usaremos la expresión “*conocimiento didáctico-matemático (CDM)*” del profesor, para referir a la fusión de las nociones MKT (Mathematical Knowledge for Teaching) y PCK (Pedagogical Content Knowledge), al considerar que la expresión “Conocimiento matemático para la enseñanza” no refleja adecuadamente los diversos componentes o facetas que se deben tener en cuenta, al igual que ocurre con la expresión “Conocimiento pedagógico del contenido”. Entendemos que la “Didáctica de la Matemática” es la disciplina académica y el área de conocimiento cuyo objetivo específico es la articulación coherente de las distintas facetas o dimensiones que se ponen en juego en el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Debemos destacar que el término “conocimiento” lo usamos en el sentido de constructo epistémico–cognitivo–afectivo general que incluye comprensión, competencia y disposición.

Así, para nosotros, el CDM viene a ser la trama de **relaciones** que se establecen entre los objetos que se ponen en juego en las prácticas operativas y discursivas realizadas con el fin de resolver un determinado campo de situaciones - problemas matemáticos para implementar procesos de instrucción eficaces (idóneos) que faciliten el aprendizaje de los estudiantes.

Dicho modelo de “conocimiento didáctico-matemático”, propuesto por Godino (2009), tiene en cuenta las siguientes facetas para analizar los procesos de instrucción matemática, constituyendo, así mismo, categorías para analizar y clasificar los conocimientos didácticos sobre la enseñanza y aprendizaje de contenidos específicos:

1. *Epistémica*: Distribución, a lo largo del tiempo de enseñanza, de los componentes del significado institucional implementado (problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, propiedades, argumentos).
2. *Cognitiva*: Desarrollo de los significados personales (aprendizajes).

3. *Afectiva*: Distribución temporal de los estados afectivos (actitudes, emociones, afectos, motivaciones) de cada alumno con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.

4. *Interaccional*: Secuencia de interacciones entre el profesor y los estudiantes orientadas a la fijación y negociación de significados.

5. *Mediacional*: Distribución de los recursos tecnológicos utilizados y asignación del tiempo a las distintas acciones y procesos.

6. *Ecológica*: Sistema de relaciones con el entorno social, político, económico,... que soporta y condiciona el proceso de estudio.

Para cada una de estas facetas se contemplan, a su vez, diversos niveles que permiten el análisis del CDM del profesor de acuerdo con el tipo de información requerida para la toma de decisiones instruccionales. Estos niveles son:

1. *Prácticas matemáticas y didácticas*. Descripción de las acciones realizadas para resolver las tareas matemáticas propuestas para contextualizar los contenidos y promover el aprendizaje. También se describen las líneas generales de actuación del docente y discentes.

2. *Configuraciones de objetos y procesos* (matemáticos y didácticos). Descripción de objetos y procesos matemáticos que intervienen en la realización de las prácticas, así como los que emergen de ellas. La finalidad de este nivel es describir la complejidad de objetos y significados de las prácticas matemáticas y didácticas como factor explicativo de los conflictos en su realización y de la progresión del aprendizaje.

3. *Normas y metanormas*. Identificación de la trama de reglas, hábitos, normas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio, y que afectan a cada faceta y sus interacciones.

4. *Idoneidad*. Identificación de potenciales mejoras del proceso de estudio que incrementen la idoneidad didáctica

En la Figura 2 se puede observar cómo interactúan las facetas y los niveles del conocimiento del profesor que acabamos de describir.



Figura 2. Facetas y niveles del conocimiento del profesor (Godino, 2009, p.21)

Estas facetas y niveles, proporcionadas desde el marco teórico del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS), nos permitirán analizar y categorizar el conocimiento didáctico-matemático que debe tener el profesorado de matemáticas de secundaria/bachillerato para diseñar e implementar procesos de instrucción idóneos sobre el concepto de derivada. Nuestro planteamiento es que la determinación del CDM de los profesores, para la enseñanza de la derivada, nos dará pautas para la construcción de instrumentos de evaluación de los conocimientos didácticos-matemáticos de los profesores en formación inicial y, posteriormente, diseñar, implementar y evaluar situaciones didácticas y procesos de estudio que promuevan la

reflexión de los futuros profesores acerca de sus propias concepciones sobre las matemáticas, su didáctica y la evolución de las mismas hacia una visión sociocultural y constructivista.

Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada

Tanto si se quiere avanzar en la determinación del conocimiento didáctico-matemático que requiere el profesor para desarrollar procesos idóneos sobre la derivada, como diseñar e implementar instrumentos que permitan evaluar y desarrollar dichos conocimientos, se hace necesario, primeramente, reconstruir un significado global que sirva de referencia, para determinar aspectos esenciales del CDM del profesor.

De esta forma, como hemos mencionado, una primera fase de nuestro proyecto de investigación consistió en realizar una **reconstrucción del significado epistémico global de la derivada**, para lo cual nos hemos apoyado en la noción de configuración epistémica (CE) que nos proporciona el EOS. Dicha noción nos permitió reconstruir el *significado global de referencia* mediante la identificación de los significados parciales de la noción de derivada, a partir de los informes de investigación y documentos históricos del cálculo infinitesimal. Esto consistió en identificar y describir de manera sistemática, los objetos primarios (situaciones, lenguajes, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos) intervinientes en los sistemas de prácticas de los cuales emerge el objeto derivada (figura 3).



Figura 3. Objetos intervinientes en las prácticas de las cuales emerge la derivada

Además, en el análisis de las configuraciones epistémicas, cada uno de los objetos intervinientes puede verse desde las distintas facetas duales que propone el EOS, razón por la cual estuvieron presentes en nuestro análisis. La figura 4 resume dichas facetas duales.



Figura 4. Facetas duales desde la que se pueden ver los elementos de cada configuración

Concretamente nos centramos en el aspecto intensivo-extensivo (o general-particular), de los objetos primarios que componen cada configuración, puesto que esta dualidad nos ayudó a determinar los distintos niveles de generalización entre las configuraciones.

A partir del estudio histórico desarrollado, sobre la evolución de la derivada desde la matemática griega hasta nuestros días, y el análisis de los objetos primarios de los distintos problemas que fueron abordados por matemáticos de distintas épocas y que dieron paso al surgimiento de la derivada, se pudieron identificar nueve configuraciones epistémicas asociadas a los distintos

problemas. Dichas configuraciones las denominamos: 1) *la tangente en la matemática griega* (CE_1); 2) *sobre la variación en la edad media* (CE_2); 3) *métodos algebraicos para hallar tangentes* (CE_3); 4) *concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes* (CE_4); 5) *las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos* (CE_5); 6) *métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes* (CE_6); 7) *el cálculo de fluxiones* (CE_7); 8) *el cálculo de diferencias* (CE_8) y, 9) *la derivada como límite* (CE_9). Estas nueve configuraciones identificadas, dan pautas que nos permiten apreciar cómo la derivada emerge de nueve sistemas de prácticas, cada uno de los cuales dota a dicho objeto de un significado distinto (o significado parcial).

Además de estas configuraciones epistémicas se deben considerar las distintas generalizaciones que se tienen sobre la noción derivada, tales como la derivada parcial, la derivada direccional, la derivada a la *Carathéodory*, la derivada *de Fréchet*, la derivada *de Gâteaux*, entre otras. Estas generalizaciones de la derivada constituyen el *conocimiento matemático avanzado* sobre el objeto derivada; de manera que, la consideración conjunta de los significados parciales, y las relaciones entre sus respectivas configuraciones, y de las generalizaciones de la derivada, constituyen el *significado epistémico global* o lo que es igual, la *faceta epistémica* del conocimiento didáctico-matemático sobre esta noción.

Conclusiones

El determinar el conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y el aprendizaje de la derivada, mediante la revisión y análisis de las investigaciones que se han llevado a cabo dentro del campo de didáctica de la matemática referentes a esta noción, es un aspecto que se hace necesario debido al amplio bagaje de investigaciones realizadas desde distintas aproximaciones teóricas, lo cual obstaculiza en muchas ocasiones el entendimiento de los formadores de profesores, sobre aquello que debe conocer el profesorado para la enseñanza de la derivada.

De esta forma, en una primera etapa de nuestro proyecto de investigación, nos hemos propuesto avanzar en la determinación del conocimiento didáctico-matemático que necesita el profesorado de bachillerato con relación a la enseñanza de la noción de derivada teniendo en cuenta el estado actual de las investigaciones en Didáctica del Cálculo, mediante la reconstrucción de un significado epistémico global de la derivada que sirva de referencia para determinar aspectos esenciales del CDM del profesorado de secundaria/bachillerato respecto a dicha noción.

La reconstrucción de un significado global de la derivada resulta especialmente importante puesto que el diseño, implementación y evaluación de planes de formación matemática y de procesos instruccionales sobre un contenido matemático específico, requieren un estudio en profundidad sobre el significado de los objetos matemáticos que componen dicho contenido. Tal estudio debe aportar criterios para seleccionar los problemas y prácticas matemáticas a incluir en los planes y procesos de formación, según las necesidades sociales y profesionales del grupo de personas a quien se dirigen. Además, como señala Sierpinska (1990), “La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos” (p. 35). Sin embargo, sabemos que la reconstrucción del significado epistémico global de la derivada tan sólo es el primer paso en la determinación de los CDM del profesor sobre esa noción, por lo que es necesario seguir avanzando en direcciones tales como el diseño y elaboración de instrumentos que permitan evaluar los CDM de los profesores en formación inicial y permanente sobre la noción derivada, el diseño, implementación y evaluación de situaciones didácticas y procesos de estudio que promuevan la reflexión de los profesores y futuros profesores acerca de sus propias concepciones sobre el objeto derivada y su didáctica, y estudiar el tipo de formación inicial y permanente que sería necesaria para lograr que el profesor desarrolle el CDM necesario para una enseñanza idónea de la derivada.

Referencias

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*. (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia*. Tesis Doctoral no publicada, Universitat Autònoma de Barcelona, España.
- Ball, D. L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51, 241-247.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456).
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. Australia: Thomson.
- Contreras, A., Font, V., Luque, L. y Ordóñez, L. (2005). Algunas aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas a la didáctica del análisis infinitesimal. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(2), 151-186.
- Gavilán, J. (2005). *El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. Análisis desde una perspectiva cognitiva*. Tesis Doctoral no publicada, Universidad de Sevilla, España.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127-135.
- Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39, 372-400.
- Hitt, F. (2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Décimo Primer Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*, Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo. Morelia, México. Descargado el 8 de mayo de 2010 de <http://www.matedu.cinvestav.mx/librosfernandohitt/Doc-6.doc>.
- Moreno, M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: Evolución, estado actual y retos futuros. *IX Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, Universidad de Córdoba, España. 81-96.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Ponte, J. P., y Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of reaserch on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Sierpinka, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 24-36.