

DIFICULTADES Y ERRORES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS EN LOS ALUMNOS DE PRIMER AÑO DE NIVEL BACHILLERATO

Martha Iris Rivera López, Flor M. Rodríguez Vásquez

Universidad Autónoma de Guerrero

caneiris_037@hotmail.com, flor_r@cimateuagro.org

Resumen

Este trabajo es fruto de la experiencia de un año como profesor así como de la observación de los comportamientos de los alumnos de primer año de Bachillerato ante ciertas situaciones educativas con el objetivo de describir y analizar algunos de los errores y dificultades más comunes en sus conocimientos matemáticos básicos y elementales, principalmente de tipo aritmético y el algebraico. La investigación es fundamentalmente descriptiva y se ha utilizado como instrumento de metodología un cuestionario, complementándolo con lo obtenido en sus exámenes y la observación dentro del aula.

Palabras clave: *Dificultad, errores*

Introducción

La detección a tiempo de los problemas de enseñanza-aprendizaje podría evitar los fracasos escolares de los estudiantes, y si no se les da tratamiento adecuado los efectos pueden ir aumentando, por ejemplo, si un niño no aprende a sumar en la escuela primaria no podrá aprender álgebra en la escuela secundaria y precisarla en sus estudios posteriores, conllevando a presentar dificultades¹¹ y a cometer errores¹², siendo estos una preocupación para los docentes. Engler y otros (s.f.), menciona que en el proceso de construcción de los conocimientos matemáticos¹³ aparecen sistemáticamente errores, los cuales evidentemente influyen en el aprendizaje de las matemáticas por lo que es imprescindible reconocerlos y asumir la necesidad de superarlos a fin de obtener logros de aprendizaje. Por ello el análisis de los errores es importante para el profesor, por que provee información y datos necesarios e imprescindibles para la mejora de la enseñanza-aprendizaje, permitiéndole que organice estrategias, insistiendo en aquellos aspectos que generan más dificultades, y contribuyen a una mejor preparación de instancias de corrección, ya que en ocasiones el profesor es consciente que el alumno comete errores, pero no hace el esfuerzo, o no dispone del tiempo (o formación) para atacar esa deficiencia con la celeridad apropiada.

Esta preocupación por el aprendizaje del álgebra, surge de la propia experiencia en la *práctica docente*¹⁴ con grupos de primer año de bachillerato, ya que en este nivel los estudiantes deben

¹¹El término dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio. (Godino, Batanero y Font (2003). Tomado de Astorga, 2007).

¹² Conocimiento deficiente o incompleto que conlleva a una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la matemática escolar. (Godino, Batanero y Font (2003). Tomado de Astorga, 2007).

¹³ Entendiéndose por conocimiento matemático el conjunto de todos los conceptos que están dentro de la matemática, así como una herramienta básica para la comprensión y la construcción del saber matemático de los estudiantes.

¹⁴ Práctica docente en el sentido de que adopte el papel de un profesor, es decir estuvo a cargo de impartir el curso de Matemáticas I y II de nivel bachillerato.

construirla significativamente para poder hacer uso de ella y así poder continuar con su aprendizaje matemático. Durante la labor docente, una de las dificultades más significativas que se notaron, es precisamente en el aprendizaje del álgebra, llevándonos a la necesidad de describir y analizar los errores y las dificultades con las que los alumnos se encontraron (quizás aun se encuentren) en las producciones de los alumnos.

El análisis de las dificultades específicas con las que el alumno se encuentra, así como los errores más frecuentes en el aprendizaje del álgebra, pueden orientarnos acerca de la problemática existente. De aquí emerge el problema de investigación el cual tiene que ver con los errores y dificultades más comunes en los alumnos de primer año de bachillerato, en el tránsito de la aritmética al álgebra, mejor conocido como preálgebra, lo cual no les permite comprender el álgebra en su totalidad, y a consecuencia de esto, agrandando más el rechazo de las matemáticas. Por ello el objetivo particular fue investigar y describir errores y dificultades en el aprendizaje del álgebra de los alumnos de primer año de Bachillerato al interpretar y operar con expresiones algebraicas¹⁵. Encontrando que el tipo de error más común se debe al aprendizaje deficiente de conocimientos previos y al escaso manejo de destrezas matemáticas elementales.

De acuerdo a las investigaciones relacionadas con el aprendizaje del álgebra (Esquinas, 2008; Olfos, 2004; Del Puerto, Minnaard y Seminara, 2004), los estudiantes han evidenciado dificultades en su aprendizaje y casi siempre han sentido animadversión o aburrimiento por su estudio. Muchos no han logrado construir significados de los conocimientos adquiridos y por lo general no han encontrado relación alguna del álgebra y su estudio, con la realidad.

Brousseau comenta que un error es un concepto equivocado, producto de las combinaciones de los conocimientos previos que poseen los alumnos, es decir, “el error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, de la casualidad, si no que es un resultado de un conocimiento anterior, que ha tenido su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadecuado” (Tomado de Del Puerto, Minnaard y Seminara, 2004))

La categorización de los errores que presenta Booth (1984) (Tomado de Engler, et al (s.f.)) es la siguiente:

1. La naturaleza y el significado de los símbolos y las letras.

Los símbolos son un recurso que permite denotar y manipular abstracciones. El reconocimiento de la naturaleza y el significado de los símbolos permiten comprender de cómo operar con ellos y cómo interpretar los resultados que les permitirán la transferencia de conocimiento aritmético hasta el álgebra.

2. El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra.

Muchos estudiantes no se dan cuenta y suponen que en las cuestiones algebraicas se les exige siempre una solución única y numérica.

3. La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes.

4. El uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimiento”.

Algunos errores se deben a que los alumnos usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida que han extraído de un prototipo o libro de texto y que usan tal cual la conocen o la adaptan incorrectamente a una situación nueva.

En el ámbito de la educación matemática los errores aparecen continuamente en las producciones de los alumnos: las dificultades de distinta naturaleza que se generan en el proceso de aprendizaje se conectan y refuerzan en redes complejas que obstaculizan el aprendizaje, y estos obstáculos se manifiestan en la práctica en forma de respuestas equivocadas (Del Puerto, et al ,2004).

¹⁵ Solo se presentará la operación: suma de términos semejantes

Alumno: "Por que en.... $-5m^2n$ (lo señala con su dedo) hay un 2 arribita de la m y el otro no lo tiene"

Se percibe que el estudiante presenta dificultades en cuanto al uso del lenguaje algebraico, ya que al justificar sus respuestas lo hace mediante el lenguaje común.

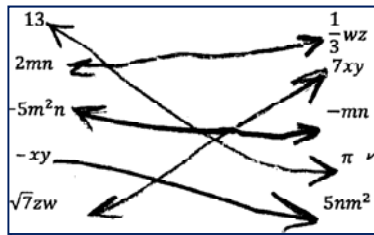


Figura 3

Mientras que en la figura 3 es destacable que en algunos estudiantes se presenta la ausencia de significado respecto a términos semejantes.

Entrevistador: ¿Cuándo dos términos son semejantes?

Alumno: pues... semejante significa casi iguales, por ejemplo podemos tener dos monedas, una de diez pesos y otra de un peso,

aquí tendríamos que tienen la misma forma pero sus tamaños son diferentes... pero con letras y números... ¡no sé!

Entrevistador: Entonces ¿Cómo contestaste la pregunta?

Alumno: La verdad yo solo quise contestar, pero... no se ni lo que hice.

C) Simplifica las siguientes operaciones

A) $b + b + b + b =$

B) $7ru + 8s + 9u =$

C) $3a + 2b - a + b =$

D) $k + y - 5y - 8k =$

El objetivo de la pregunta es mirar los errores y dificultades que están presentes al operar con expresiones algebraicas, encontrando que el 90% de los estudiantes no logra hacerlo correctamente, lo que atestigua que hay severas dificultades. Pero antes veamos que errores cometen los estudiantes, por ejemplo, en la figura 4 en el inciso (a) el estudiante aplica la ley de los exponentes ($a^m a^n = a^{m+n}$, vista en aritmética), error cometido a causa de la naturaleza y el significado de los símbolos y las letras ya que el estudiante al trabajar con términos semejantes se quedó con la idea de que el signo + es un componente de un término algebraico, conllevando a que separe la expresión $b + b + b + b$ como cuatro términos de $+b$ lo que causa que el estudiante no identifique el signo + como un operador, además al trabajar con literales el operador para el producto se omite, y es aquí donde se introduce que el producto se puede expresar sin ninguna notación, por ejemplo ab , ideas que la mayoría de los estudiantes utilizo.

a) $b + b + b + b = b^4$
 b) $3a + 2b - a + b = 3 + 2ab$
 c) $7ru + 8s + 9u = 7 + 9u^2$
 d) $k + y - 5y - 8k = 5 + 8xy$

a) $b + b + b + b = 4b$
 b) $3a + 2b - a + b = 3a^2 + 2b^2$
 c) $7ru + 8s + 9u = 7 + 8s - 8s$
 d) $k + y - 5y - 8k = (k + 8k) (y + 5y)$

Figura 5

En los incisos siguientes no se logra identificar el patrón que se siguió para dar como respuestas las respectivas soluciones, lo que si se puede mirar es que cuando se introducen más literales, son mayores los errores que comete el estudiante, y además presenta mas dificultades por no comprender el significado de cada expresión. Cabe mencionar que la mayoría de los estudiantes dejan en blanco las actividades, por lo que se optó por entrevistar algunos de los estudiantes

Entrevistador: ¿Por qué no realizaste las operaciones indicadas?

Alumno1: Por que no se sumar ni restar con letras, me confundo mucho... es que a veces nos dicen que si es la misma letra se suman exponentes, o que se suman coeficientes, pero no supe que debí aplicar...

Alumno2: La verdad a mi se me olvido como se hacia... no sabia que fórmulas aplicar...

Alumno3: mmm...es que con letras no se sumar...

La mayoría de las respuestas por parte de los alumnos se referían a que no recordaban las fórmulas, lo cual se percibe que para ellos el tránsito de la aritmética al álgebra no ha sido el adecuado, pues los que lograron escribir expresiones en sus respuestas hacían referencia a las leyes de los exponentes utilizados en aritmética.

En la figura 5 en los incisos (b) y (c) multiplican todos aquellos términos que al menos tengan una letra en común, omitiendo los signos, en el inciso (d) pareciera que el estudiante pretende factorizar, por lo que se le tuvo que entrevistar.

Entrevistador: ¿Cómo resolviste $k + y - 5y - 8k$?

Alumno: ah!... es que me equivoque...

Entrevistador: ¿En donde?

Alumno: Es que los quería acomodar... los que tengan k y los que tengan y, y restarlos pero ya no supe como... y después aplicar- misma base se suman exponentes-

Entrevistador: ¿Es necesario que los agrupes para que apliques esto?

Alumno: mmm... ah no, pero entonces ¿Cómo se hacen?

Así entonces los estos errores se deben al uso inapropiado de fórmulas, pero también debido a la naturaleza y significado de los símbolos y letras, ya que su estrategia que pretendía seguir es la misma que en sus ejercicios anteriores.

E) La expresión $5x$ es igual a:

- A) $x + x + x + x + x$ B) $5 \cdot x$ C) $2x + 3x$ D) Todas las anteriores

Hasta el momento la mayoría de los errores presentados se deben a la naturaleza y el significado de los símbolos y las letras. La falta de significado y la incomprensión de todo lo anterior los promueve la presencia de dificultades en la identificación de las distintas formas con las que se puede expresar un término algebraico, destacando que el único cambio aceptado del nuevo lenguaje es, que el signo que represente la multiplicación de dos letras se omita, caso contrario la expresamos por un punto.

En el tratamiento del lenguaje común al lenguaje algebraico y viceversa se encuentran los siguientes errores, por ejemplo se les pide traducir-Un número cualquiera- el 70% tiende a contestar de manera correcta, pero esto no es suficiente para decir que lo han comprendido, pues

la gran mayoría lo representa por “x” (Figura 6), algunos expresan un número en particular (Figura 7). Lo cual orilló a que se les entrevistara.

Entrevistador: ¿Por qué usas x para expresar un número cualquiera?

Alumno 1: Por que eso fue lo único de lo que me acorde.

Alumno 2. Por que mi maestro así lo escribió cuando nos lo enseñó.

Se puede estipular que en gran parte de los estudiantes, este enunciado quedo memorizado, ya que algunos solo están reproduciendo lo que enseñó el profesor, pero sin darle significado a cada una de estas representaciones, incluso cuando los alumnos interpretan letras que representan números, existe una tendencia a considerar las letras como valores únicos y específicos más que como números generalizados o como variables.

-
- a) Un número cualquiera. x
 - b) El producto de dos números iguales. $(x)(x)$
 - c) El cociente de dos números. $\frac{x}{y}$
 - d) Un número multiplicado por si mismo. $x \cdot x$
 - e) La suma de dos números es igual al producto de ellos. $x+y = (x \cdot y)$
 - f) El cociente de dos números menos la suma de ellos es 10. $\frac{x}{y} - (x+y) = 10$
 - g) El quintuplo de un número menos t unidades. $5x - t$
 - h) La edad de Juan es el doble de la de Pedro, expresa sus edades. $J = 2P$
 - i) El perímetro de un terreno rectangular de largo a y un ancho b. $P = ab$
 - j) El perímetro de un triángulo equilátero de lado l. $P = 3L$

Figura 6

-
- a) Un número cualquiera. 2
 - b) El producto de dos números iguales. 2
 - c) El cociente de dos números. 5
 - d) Un número multiplicado por si mismo. 2
 - e) La suma de dos números es igual al producto de ellos. $2 \times 1 = 2$
 - f) El cociente de dos números menos la suma de ellos es 10.
 - g) El quintuplo de un número menos t unidades.
 - h) La edad de Juan es el doble de la de Pedro, expresa sus edades.
 - i) El perímetro de un terreno rectangular de largo a y un ancho b.
 - j) El perímetro de un triángulo equilátero de lado l

Figura 7

Mientras que los alumnos que presentan un número en particular se resisten al abandono de la aritmética, pues expresan que:

Alumno 3. Como no me decía que número y ahí dice un número cualquiera pues a mi se me ocurrió el 2.

Alumno 4. Ah!, pues yo escribí cualquier número, es que ahí no me decían cual y solo puse el primero que se me ocurrió, pues de todas maneras no importaba el número que se escribiera y además por que el enunciado me lo pidió.

Además un 50% tienen muchas dificultades para seguir interpretando los enunciados dados en lenguaje común, pues el resto deja en blanco la pregunta.

En el proceso inverso un 80% de los estudiantes no lo contesta y esto es por que hay un escaso significado al álgebra, ya que los estudiantes tienden a leer tal y como esta la expresión (Figura 8), algunos estudiantes pretenden encontrar una analogía con la aritmética, otros definitivamente no logran darle ningún significado. Por ejemplo en la expresión $v + w$ algunos estudiantes la expresan como dos números consecutivos, por lo que se les entrevistó.

Entrevistador: ¿Por qué $v + w$ lo puedo traducir como dos números consecutivos?

Alumno 5: Oh pues si hago que v sea un número y sabemos que en el abecedario después de v sigue w, entonces después de ese número sigue el siguiente, por ejemplo si hacemos que v tenga el valor de 3 entonces la letra que sigue es w y pues con un número sería el 4.

Alumno 6: Pues por que las letras son consecutivas.

-
8. Expresa en lenguaje común los siguientes enunciados algebraicos.
- a) x^2 un número elevado al cuadrado
 - b) $v+w$ dos números consecutivos
 - c) $2ab$ el doble de dos números cualquiera
 - d) $(a+b)(a-b)$ el producto de dos números y su diferencia
 - e) $\frac{a}{2} + 2f$ el promedio de un número más dos etc

-
- a) x^2
 - b) $v+w$ el primer miembro más lo segundo
 - c) $2ab$
 - d) $(a+b)(a-b)$
 - e) $\frac{a}{2} + 2f$

Figura 8

En resumen, las dificultades encontradas en los estudiantes de Bachillerato son:

- A) Dificultades con las operaciones (suma o resta) con términos semejantes. Estas dificultades están relacionadas con el hecho de que desconocen el significado correcto de la representación de cada uno de los elementos de un término algebraico y el significado de tener términos semejantes, ya que al sumar con estos los alumnos intentan aplicar producto (cuando se trata de sumar) con aquellos que cuentan con al menos una letra en común.
- B) Dificultades en la introducción al lenguaje algebraico. (Traducción de lenguaje común a lenguaje algebraico y viceversa). Esta dificultad es más notable cuando se les pide resolver problemas que para su resolución implique el modelo de una ecuación o un sistema de ecuaciones, ya que teniendo el modelo solo se limitan a resolverlo y encontrar las soluciones para dicha(s) incógnita(s), esta dificultad se debe al error atribuido al objetivo de la actividad y la naturaleza de su respuesta en álgebra, pues no logran regresar al contexto del que partieron, es decir, es nula la relación de los resultados obtenidos con el problema o enunciado que modelaron, además otra dificultad aparece al resolver las ecuaciones o sistema de ecuaciones ya que hacen uso inapropiado de la reglas de procedimiento, por ejemplo; los despejes incorrectos, equivalencia de ecuaciones, sustituciones incorrectas, entre otras.

Conclusión

En conclusión, a partir de la práctica docente realizada, todas las dificultades y errores que se presentaron en los alumnos en álgebra, son precisamente por la naturaleza y el significado de los símbolos y letras, ya que por lo analizado todo se debe a que el estudiante no ha comprendido y por ello mismo tampoco ha logrado dar significado al álgebra, lo cual induce al alumno al desinterés y el rechazo hacia el álgebra, por el hecho de no encontrarle sentido al nuevo lenguaje que se les está enseñando. Al observar los comportamientos de los alumnos durante las clases y la aplicación del cuestionario, se puede decir que de manera general se manifestó un atraso de todo el proceso de aprendizaje, ya que se observó lentitud, desinterés, deficiencia en la atención y concentración, afectando el rendimiento global, y contribuyendo así a los problemas en el aprendizaje los cuales engloban todos los problemas cognitivos relacionados con la capacidad para adquirir las habilidades de la vida cotidiana, sociales, de lenguaje, comunicación y académicas.

Ciertamente cabe mencionar que los errores no son del todo perjudiciales ya que pueden contribuir positivamente en el proceso de aprendizaje, la superación o disminución de alguna parte de éstos nos ayuda a mirar el progreso de los estudiantes, por otro lado, también nos indicaría que los errores no se dan por que sí, pues son en base a los conocimientos previos que tienen los estudiantes. No podemos decir quién es el responsable de los errores, pero sí podemos asegurar que una parte de la responsabilidad recae en el sistema educativo, ya que en todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas.

Hay que admitir que a partir de los errores es como un estudiante puede aprender distintas propiedades de un concepto de las que no estaba previamente consciente, ya que al cometer un error, el alumno expresa el carácter incompleto de su conocimiento y permite a sus compañeros o incluso al propio profesor ayudarlo a completar el conocimiento adicional o de llevarlo a la comprensión (por sí mismo) de aquello en lo estaba mal. Claro que esto ocurriría si el profesor está consciente y atiende la mayor parte de los errores en los que se encuentran sus estudiantes.

Algunas recomendaciones son:

- A) Cuando se pueda, se enseñen las matemáticas de una manera eficaz mediante actividades constructivas del conocimiento por parte de los alumnos.

B) Estimular a los alumnos hacia la solución de problemas matemáticos (no rutinarios) en el aula, ya que esto constituye un aspecto fundamental para obtener una adecuada formación en esta disciplina.

C) El docente no debe dejar pasar por alto los errores que cometen los estudiantes argumentando que son “fallas que traen desde atrás”

D) El docente debe infórmale al alumno sobre las dificultades que fundamentaron la ejecución de un error ya que el tratamiento en conjunto entre docentes y alumnos es prioritario si se pretenden aprendizajes significativos.

Centrándonos en la educación a nivel Bachillerato, es necesario que se considere que antes de ingresar a dicho nivel se les impartiera un curso de matemáticas a los alumnos, en el cual se refuerce el dominio de la operatividad en aritmética y la habilidad para manipular objetos abstractos, ya que ahora con el nuevo plan de estudios se inicia desde el álgebra, no permitiendo mirarla como la generalización de la aritmética, en donde la mayor parte de las expresiones y manipulaciones algebraicas puedan ser explicadas a partir de las expresiones y manipulaciones aritméticas, evitando así un poco las discontinuidades entre la aritmética y el álgebra que dan origen a una gama de dificultades en el aprendizaje de los alumnos.

Referencias

Astorga, A. (2007). Errores de los estudiantes en la construcción del conocimiento matemático a nivel de secundaria. Recuperado el 2 de mayo de 2010 de <http://www.cidse.itcr.ac.cr/ciemac/5toCIEMAC/Ponencias/Errores%20de%20los%20estudiantes.pdf>.

Booth L.R. (1984). Algebra: children's strategies and errors. Windsor: NFER-Nelson.

Del Puerto, S., Minnaard, C., Seminara, S. (2004). Análisis de los errores: Una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperado en <http://www.rieoei.org/deloslectores/1285Puerto.pdf>

Garrote, M., Hidalgo, M., Blanco, L. (2004). Dificultades en el aprendizaje de las desigualdades e inequaciones. Recuperado el 10 de mayo de 2010 de <http://www.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/2004%20Garrote,%20Hidalgo,%20Blanco%20Inecuaciones%20Suma.pdf>

Godino, J., Batanero C., Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática para maestros*. Universidad de Granada. Distribución en Internet: <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/>

Olfos R. (2004). Aportes de la Investigación a la Enseñanza del Álgebra Elemental. Recuperado en www.sochiem.cl/sochiem/documentos/XII/Especiales/ces08.pdf.

Esquinas A (2008). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica: aplicación a la práctica docente*. Memoria para optar al grado de Doctor. Universidad Complutense de Madrid.

Engler, A., Gregorini, M., Müller, D., Vrancken, S., Hecklein, M. (s.f). Los errores en el aprendizaje de matemática. Recuperado el 15 de Mayo de 2010 de <http://soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf>