CONSTRUCCIÓN DE RAZONES TRIGONOMÉTRICAS EN UN MICROESPACIO DE TRABAJO

Bertha Ivonne Sánchez Luján, Alberto Camacho Ríos, Guadalupe Amado Moreno
Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez, I.T. de Chihuahua II, I.T. de Mexicali. México
ivonne_mx_2000@yahoo.com, camachoalberto@hotmail.com, lupitaamado@yahoo.com.mx

Resumen
Con el objetivo de que los alumnos mejoraran su comprensión sobre las razones trigonométricas, mediante un proceso de construcción variacional se creó un microespacio de trabajo al que se incorporaron una serie de instrucciones didácticas con las que fue posible que estudiantes del nivel de ingeniería diseñaran las razones trigonométricas seno, coseno y tangente. Los referentes matemáticos contenidos en las instrucciones son argumentos elementales contenidos en los Elementos de Euclides: razones y proporciones entre los lados de triángulos rectángulos, ángulos, líneas rectas, círculos, etc.
Palabras clave: *microespacio de trabajo, práctica social, razones trigonométricas*

Introducción

Se incorpora el diseño y recreación en el aula de elementos de una *práctica* con la que se busca dotar de significado a las actividades de la clase de cálculo diferencial a fin de hacerlas más dinámicas. La parte dinámica se sugiere al simular la práctica topográfica con acciones semejantes a las que se desarrollaron en ambientes reales de ciencias de la tierra y de la observación, como es el caso de la astronomía ptolemaica en el diseño de las primeras *tablas de cuerdas,* conocidas durante el siglo XX como *tablas trigonométricas*. Con la actividad se pretende que estudiantes del nivel de ingeniería establezcan y practiquen con las razones trigonométricas a través de *reconocerlas* durante el desarrollo de la recreación, debido a que estos temas ya fueron cursados en el nivel de preparatoria.

Las prácticas sociales son actividades poseídas por los sujetos, de las que se siguen influencias, externas o internas, que intervienen en las matemáticas, y que para diferentes épocas dieron avance a la ciencia en general y a las matemáticas en particular. El conocimiento es regulado por prácticas sociales que modulan su desarrollo y construcción.

Las actividades matemáticas relacionadas con las prácticas de referencia, son reguladas, por prácticas sociales de las que se han reconocido la *anticipación, predicción* y *formalización* (Montiel, 2008: 6).

Se busca colocar a los alumnos en la parte inicial del proceso de construcción social del concepto de función trigonométrica con la cual se tendrían argumentos para llevar a los alumnos al estado variacional de la misma. Para lograr una mejor comprensión del tema y formar una concepción acerca del significado de las funciones trigonométricas, permitiendo comprobar, aunque de manera aproximada, la exactitud de los resultados obtenidos es necesario que las gráficas se realicen con un transportador y una regla graduada. La misma idea se usa para el diseño de un círculo trigonométrico unitario que lleve a los alumnos a la construcción de una tabla trigonométrica. Ambos diseños, el círculo y la tabla, permiten estudiar la *variación* de los valores de las razones trigonométricas, a la vez que sirven para establecer las gráficas correspondientes, lo cual es fundamental en la definición de las funciones trigonométricas.

Con la *recreación* en el aula de las actividades para la construcción de la tabla trigonométrica al estilo de Ptolomeo y las respectivas gráficas, se pretende:

1. La búsqueda en la historia del *espacio real* de la ingeniería donde se ubica la práctica de referencia en la que se gestó el seno trigonométrico como una razón entre cuerdas.

2. El establecimiento de un *micro-espacio* de la práctica que respondiera a las expectativas de los grupos de estudiantes.

El microespacio de trabajo representa un modelo a escala del espacio real en el cual tuvo lugar una *práctica de referencia*. Esta última fue desarrollada por Ptolomeo en el *Almagesto* en la búsqueda de precisión, tanto en las observaciones astronómicas como en los cálculos respectivos. En sí misma la práctica ptolemaica consistió en establecer unas *tablas de cuerdas* al dividir la circunferencia en 360 partes tomando los arcos de medio grado en medio grado y dando para cada arco el valor de la *longitud* sexagesimal de la cuerda respectiva, suponiendo dividido el diámetro en 120 partes o *líneas.*

Metodología

Las instrucciones dadas a los estudiantes en el microespacio consisten en *recrear* la práctica social asociada a la práctica ptolemaica, es decir, diseñar una tabla trigonométrica a partir del dibujo de un círculo de radio igual a 10 cm. El círculo es dividido de 20 en 20 grados (o los valores correspondientes en radianes) formando con ello triángulos rectángulos cuyos catetos llevan a establecer la forma proporcional de las razones trigonométricas. Con los valores de la tabla se pide a los estudiantes dibujar en una planta de *x* (*radianes*) contra *y* (*cateto opuesto*) las graficas que de ello resultan (en este caso el seno). Esto último para los casos del cateto opuesto, cateto adyacente y cateto opuesto entre cateto adyacente.
De aquí se destacan tres actividades:
a) La búsqueda de significados asociados cercanos a los conceptos de la matemática,
b) La recuperación de las prácticas de referencia y prácticas sociales de uso en cuyas actividades estuvo inmerso el conocimiento en juego, y
c) El diseño y recreación de prácticas de enseñanza que incorporen el propio concepto, los nuevos significados asociados y sus acciones procedimentales (Camacho y Sánchez, 2010).

Construcción del microespacio

Es recomendable que los alumnos posean los conocimientos de *número* y *escala*, ángulo y radián en el sistema sexagesimal, y la noción del segundo como número real, de la relación entre pares ordenados, así como aquellas de arco, círculo, cuerda, radio, diámetro, etc. Se deben conocer el uso de los símbolos: de grado (º), minuto (´) y radián (*rad*) para los valores angulares. Si estas nociones no se encuentran apropiadamente en los estudiantes, el profesor deberá *repasarles* en clase antes de iniciar la recreación de la práctica.
El objetivo final de la práctica es que los estudiantes *vivan* por sí mismos la experiencia de dibujar el seno trigonométrico a partir de establecerlo como una razón entre catetos, con lo cual es posible pasar a la etapa covariacional de la función.
A lo largo de la práctica, la actuación cotidiana del profesor se deja de lado pasando a ser solamente un orientador de las actividades, dirigiéndolas hacia el objetivo que se desea.

a) *Instrucciones para el diseño del círculo trigonométrico y llenado de la tabla* (etapa de trabajo extra clase)

Materiales necesarios: Cartoncillo de 25 x 25 cm., compás, regla graduada, transportador, lápiz, goma y calculadora.

1. En el cartoncillo dibuje un círculo de diez centímetros de radio. El gráfico debe incluir: los ejes rectangulares, la letra *O* del origen y el vértice donde inicia la descripción del círculo.

2. Haga variar el valor angular θ desde 0^{o} a 360º, tomando valores angulares con el transportador de 20º en 20º, incluyendo los valores múltiplos de π: 0^{o}, 45º, 90º, 135º, 180º, 225º, 270º, 315º y 360º, o bien en radianes en la forma: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$.
3. Para cada intersección del círculo con los radios que se asocian a cada valor angular, trace los segmentos que corresponden al cateto opuesto CO y cateto adyacente CA, para los triángulos rectángulos que resultan.
4. Mida con la regla graduada directamente los valores de ambos catetos, calculando además la división $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CA}}$.
5. Anote los valores llenando así la tabla que se adjunta y dividiendo previamente cada cateto entre los 10 centímetros del radio (Véase la tabla 1).

θ, en grados	θ, en radianes	CO	CA	$\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CA}}$	θ, en grados	θ, en radianes	CO	CA	$\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CA}}$
0									
20					200				
40					220				
45					225				
60					240				
80					260				
90					270				
100					280				
120					300				
135					315				
140					320				
160					340				
180					360				

Tabla 1.

Tabla que deben llenar los estudiantes a partir del círculo trigonométrico

b) *Gráfica de las razones trigonométricas* (etapa para el salón de clases)

Elabore las gráficas para el CO, CA y $\frac{\mathrm{CO}}{\mathrm{CA}}$ (estos valores se deben colocar en el eje de las ordenadas y deberá obtenerse una gráfica por expresión) en los ejes rectangulares que se dan enseguida (Figura 1). Los valores que se colocan en el eje de las abscisas son los ángulos calculados en radianes ubicados en la tabla.

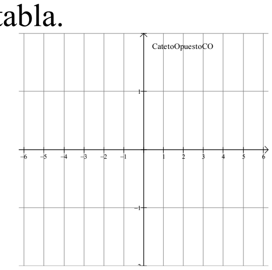

Figura 1. Ejes rectangulares sobre los que hay que dibujar las relaciones trigonométricas cuyos valores son contenidos en la Tabla 1.

Al finalizar la etapa de graficación, el profesor debe a su vez dibujar paso a paso en el pizarrón las gráficas de las relaciones involucradas en la Tabla 1, de manera que los estudiantes corrijan aquellos errores que pudieron haber cometido durante el desarrollo de la actividad.

c) Preguntas y problemas relacionados con las gráficas

Al final se hace a los alumnos una serie de preguntas y cuestiones de cálculo numérico con las que se busca que reconozcan y den nombre a las gráficas así dibujadas:

1) ¿Reconocen las gráficas obtenidas?,

2) Den una definición, a partir de la actividad anterior y en términos del cateto opuesto CO y adyacente CA, de las expresiones anteriores.

3) ¿A qué razón trigonométrica se asocia la gráfica de la expresión CO? ¿A cuál la del CA? y ¿A cuál la del $\frac{CO}{CA}$?,

4) ¿En qué valores se asemejan y en qué valores se intersecan las gráficas del seno y coseno?,

5) ¿En qué valores de los radianes inicia y termina la gráfica de la expresión seno? ¿En qué valor inicia la expresión coseno? ¿Lo mismo para la tangente?,

6) ¿Qué sucede con las gráficas de estas expresiones si los valores tomados para los radianes son negativos?

7) ¿En qué valor de los radianes se coloca la parte más alta de la gráfica del seno y coseno? ¿En qué valor la parte más baja? ¿Lo mismo para la tangente?,

8) ¿Cuál es el valor del CO, CA y $\frac{CO}{CA}$, en: $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}, 2\pi$?,

9) Qué sucede con la gráfica de la tangente en $\frac{\pi}{2}$?.

Resultados y discusión

El objetivo final de la práctica es que los estudiantes *vivan* por sí mismos la experiencia de dibujar el seno trigonométrico a partir de establecerlo como una razón entre catetos, con lo cual es posible pasar a la etapa covariacional de la función. Después de establecer las relaciones trigonométricas, es necesario realizar otro tipo de actividades que ayuden a reforzar los conocimientos adquiridos. La propuesta se basa no sólo en el diseño y aplicación, sino en el control de las interacciones de los estudiantes durante su desarrollo.

La práctica ha sido recreada en diferentes etapas: En el año 2004 al grupo de arquitectura en el Instituto Tecnológico de Chihuahua II, en el 2007 a un grupo de ingeniería, tanto de Sistemas Computacionales como de Industrial y al iniciar el segundo semestre del año 2009 a tres grupos de las especialidades antes citadas (alrededor de 115 estudiantes). Además, fue consignada en el apéndice de un libro de cálculo diferencial publicado en Camacho (2009), cuyo uso en su última aplicación ayudó dinamizando aún más las actividades.

En nuestro caso, reproducimos las instrucciones dadas en el microespacio en un grupo de 26 estudiantes de Cálculo Diferencial (durante el primer semestre del 2010) del I.T. de Cd. Jiménez.

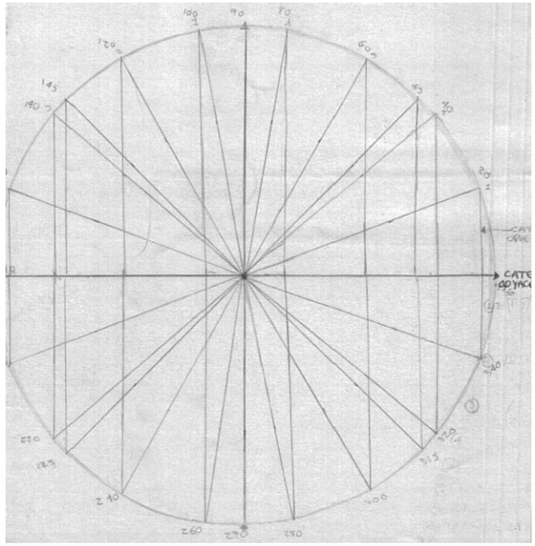

Figura 2. Ejemplo de un círculo trigonométrico

Los estudiantes mostraron un poco de dificultad al trabajar con radianes en el llenado de la tabla, los confunde el hecho de utilizar π, por lo que hubo que repasar el concepto y realizar algunos cálculos, también se presentaron dudas al utilizar valores negativos.

Para las cuatro primeras preguntas no presentaron gran dificultad, la mayoría dio respuestas acertadas y realizaron el bosquejo de las gráficas del cateto opuesto y el adyacente sin contratiempos, no así para la del cateto opuesto entre el adyacente, ya que unieron todos los puntos, sin embargo, mediante un análisis y explicación de las gráficas se logró un consenso en el grupo.

5. Anote los valores, llenando así la tabla que se adjunta:

θ en grados	θ en radianes	C.O	C.A	$\frac{CO}{CA}$	θ en grados	θ en radianes	C.O	C.A	$\frac{CO}{CA}$
0	0	0	0	0	200	10π/9	-3.5	-9.5	0.3684
20	π/9	3.5	9.5	0.3684	220	11π/9	-6.5	-7.4	0.8333
40	2π/9	6.5	7.4	0.8[illegible]	225	5π/4	-7.[illegible]	-7.0	1.[illegible]
45	π/4	7	7	1	240	4π/3	-8.7	-4.8	1.8125
60	π/3	8.7	4.8	1.8125	260	13π/9	-9.8	-1.5	6.5333
80	4π/9	9.8	1.6	6.5333	270	3π/2	-10	0	-∞
90	π/2	10	0	∞	280	14π/9	-9.8	+1.5	-6.5333
100	5π/9	+9.8	-1.5	-6.5333	300	5π/3	-8.7	+4.8	-1.8125
120	2π/3	+8.7	-4.8	-1.8125	315	7π/4	-7.0	+7	-1.[illegible]
135	3π/4	+7.0	-7	-1.[illegible]	320	16π/9	-6.5	+7.4	-0.8333
140	7π/9	+6.5	-7.4	-0.8[illegible]	340	17π/9	-3.5	+9.5	0.3684
160	8π/9	+3.5	-9.5	-0.3684	360	2π	0	+10	0
180	π	0	-10	0					

Figura 3. Llenado de tabla por un estudiante

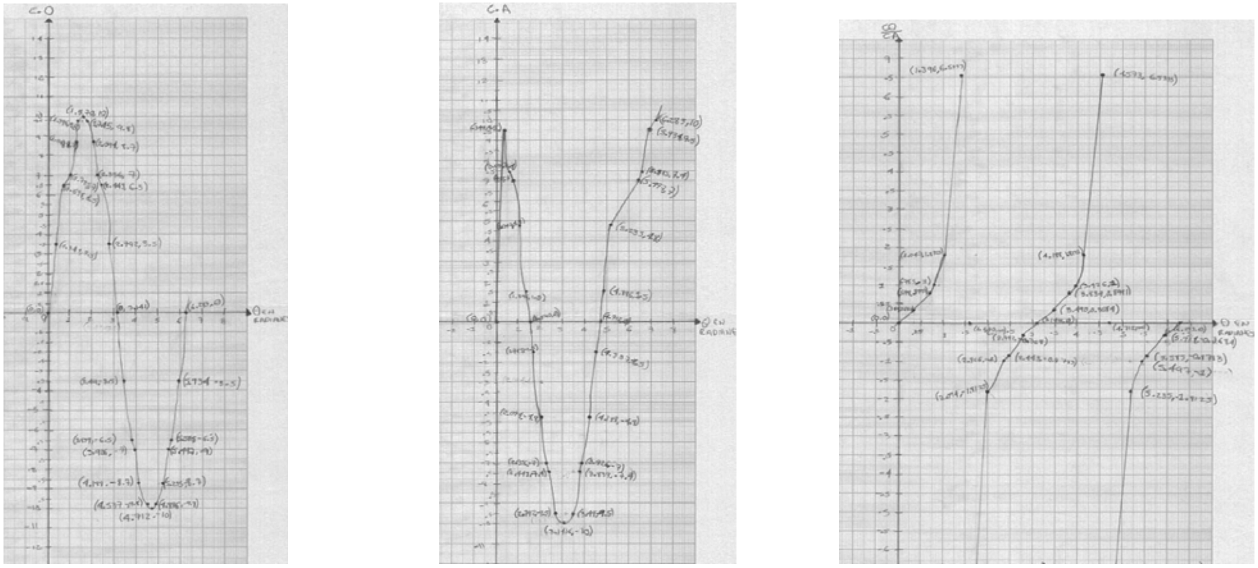

Figura 4. Diseño de las gráficas de la función seno, coseno y tangente.

Conclusiones

La propuesta rompe con la forma tradicional de mostrar las funciones trigonométricas, muestra un sentido más dinámico en la enseñanza, permite al estudiante interactuar con los datos, recrear experiencias y obtener conocimientos y permite al profesor controlar las interacciones de los estudiantes durante el desarrollo de la práctica. Reconocemos que es necesario el repaso o reforzamiento de algunos conceptos, pero también estamos convencidos de la importancia de presentar nuevos diseños en la enseñanza que involucren mayor actividad por parte del estudiante.

Referencias

Camacho, A (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. México, *Revista de Educación Matemática* 18(1), Santillana Editores, pp.133 a 160.

Camacho, A (2009), *Cálculo Diferencial*. Madrid: Díaz de Santos Editores.

Camacho, A y Sánchez, B. I. (2010), «Análisis sociocultural de la noción de variabilidad». *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* Número especial, México, Relime (aceptado para su publicación).

Montiel, G. (2008). «Una construcción social de la función trigonométrica. Implicaciones didácticas de un modelo socioepistemológico». En Hernández, H. y Buendía, G. (Eds), *Investigaciones en Matemática Educativa*, 105–119. Universidad Autónoma de Chiapas.