REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
www.fisem.org/web/union

ISSN: 1815-0640
Número 40. Diciembre 2014
páginas 121-146
Coordinado por
Agustín Carrillo de Albornoz

Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC):

El estudio de ángulos inscriptos en circunferencias y cuadriláteros cíclicos: una propuesta con el empleo de GeoGebra

Ana Rosa Corica, Yésica Muruaga

Resumen	En este trabajo presentamos el diseño de una Actividad de Estudio e Investigación que involucra nociones de ángulos inscriptos en una circunferencia y cuadriláteros cíclicos. La propuesta implica el estudio de tareas de lápiz y papel y con el empleo de Geogebra®. Con este dispositivo didáctico se procura dar sentido al estudio de ángulos inscriptos en una circunferencia en la escuela secundaria. **Palabras clave**: Enseñanza, Geometría, Geogebra®, Teoría Antropológica de lo Didáctico.
Abstract	We presented the design of a Study and Research Activity that involved notions of inscribed angles in a circumference and cyclic quadrilateral. The proposal involves the study of pen and paper tasks and the use of Geogebra®. This didactic device seeks to give sense the study of inscribed angles in a circumference at high school. **Keywords**: Teaching, Geometry, Geogebra®, Anthropological Theory of Didactics.
Resumo	Neste trabalho apresentamos o desenho de uma Atividade de Estudo e Investigação que envolve noções de ângulos inscritos numa circunferência e quadriláteros cíclicos. A proposta implica o estudo de tarefas de lápis e papel e com o emprego de Geogebra®. Com este dispositivo didático tenta-se dar sentido ao estudo de ângulos inscritos numa circunferência na escola secundária. **Palavras-chave:** Ensino, Geometria, Geogebra®, Teoria Antropológica do Didático.

1. Introducción

La geometría contribuye al desarrollo de habilidades para resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración (Jones, 2002). Sin embargo, diversos estudios indican las dificultades de los estudiantes en la comprensión de nociones geométricas (Andrade, Nacarato, 2004). La relevancia que tiene demostrar en geometría y las dificultades detectadas en los estudiantes en comprender y elaborar tales demostraciones condujeron a diversos investigadores a elaborar dispositivos didácticos con software de geometría dinámica (Corrales, 2011; García, Arriero, 2000; González, Lupiáñez, 2001; Hoyos, 2006; Iaranzo, Fortuny, 2009; Pérez, 2000; Pichel, 2000; Richard, 2010, entre otros). En este trabajo presentamos el diseño de un dispositivo didáctico para el estudio de nociones de geometría, que contempla tareas de lápiz y papel, y con Geogebra®. Nuestros objetivos es posibilitar a los alumnos analizar datos con los que se debe construir una figura, determinar si la construcción es posible o no, establecer relaciones entre los datos conocidos y el dibujo a obtener. Pues esto, según Itzcovich (2005) resultan útil en el camino hacia comprender a una figura como el conjunto de relaciones que la caracterizan y que pueden ser enunciadas en un texto.

En particular, las tareas que aquí proponemos involucran el empleo del software Geogebra®. El software para geometría dinámica (SGD), es una herramienta que proporciona un medio para la manipulación directa de las representaciones de los objetos geométricos a través de su principal rasgo es que el arrastre. Permite construir significado de los objetos geométricos a través de la posibilidad de transformación continua de los dibujos, y que son diferentes a los construidos al utilizar papel y lápiz (Acosta, 2005, Larios, González, 2004). El dinamismo proporcionado por el SGD permite la exploración de situaciones geométricas permitiendo generalizar situaciones y buscar propiedades invariantes a partir de casos particulares. Esto involucra un trabajo exploratorio que implica realizar ensayos, equivocarse, reajustar, intentos de explicar lo que sucede, establecer si se puede armar o no un dibujo. Así la comprensión y la explicación de las resoluciones demandan del uso de propiedades, y se pone de manifiesto que en geometría ver y dibujar son insuficientes (Itzcovich, 2005).

El SGD facilita destacar la diferencia entre dibujo y figura, pues en este ambiente las construcciones geométricas se encuentran realizadas con base en las relaciones lógicas entre los objetos y no solo sobre los aspectos figurales de las mismas, permitiendo que al momento de hacer una construcción por medio del arrastre, las propiedades geométricas se mantengan invariantes (Larios, González, 2004). Esta característica viabiliza trabajar con las demostraciones en ambientes dinámicos, en los que los estudiantes pueden investigar y conjeturar más de lo que pueden realizar con actividades en lápiz y papel (Paulek, Dias, 2013).

En este trabajo se presenta el diseño de Actividades de Estudio e Investigación (Chevallard, 2007) para el estudio de ángulos inscriptos en circunferencias y cuadriláteros cíclicos con el empleo de Geogebra®. En particular, el estudio de ángulos inscriptos en circunferencias gesta un entorno tecnológico que justifica, en parte, el estudio de las propiedades y relaciones de los cuadriláteros cíclicos. Dichas nociones se encuentran excluidas del diseño curricular de la escuela secundaria argentina, y son en ellas donde consideramos que cobra sentido el estudio de ángulos inscriptos en circunferencias (Marín, 2012; Corica, Marín, 2014).

2. Marco Teórico

Como referencial teórico adoptamos a la Teoría Antropológica de lo Didáctico y sus últimos desarrollos (Chevallard, 1999, 2004, 2006, 2007, 2009a, 2009b). El constructo teórico fundamental de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), es la noción de *praxeología* u *organización matemática* (OM). Estas emergen como respuesta a una cuestión o conjunto de cuestiones problemáticas que se denominan *cuestiones generatrices.* Las praxeologías constan de dos niveles:

- El nivel de la *praxis* o del *saber hacer*, que engloba un cierto *tipo de tareas*, así como las *técnicas* para resolverlos.

- El nivel del *logos* o del *saber*, en el que se sitúan los discursos que describen, explican y justifican las técnicas que se utilizan, los que reciben el nombre de tecnología. Dentro del saber se postula un segundo nivel de descripción-explicación-justificación (esto es, el nivel tecnología de la tecnología) que se denomina teoría.

Junto a las OM, se distinguen las formas de organizar la enseñanza escolar de la matemática, que se describen en términos de praxeologías didácticas. La consideración de los diversos procesos que conciernen a la construcción matemática permite identificar aspectos invariantes, es decir, momentos que estructuran cualquier proceso de elaboración matemática, independientemente de sus características culturales, sociales, individuales o de otra índole. Así, el proceso de estudio se sitúa en un espacio determinado por seis *momentos didácticos*: el momento del primer encuentro con un determinado tipo de tareas; el momento exploratorio del tipo de tareas; el momento de construcción de un entorno tecnológico-teórico, que explica y justifica las técnicas puestas en funcionamiento y permite la elaboración de nuevas técnicas; el momento de trabajo de la técnica, que provoca la evolución de las técnicas existentes y la construcción de nuevas; el momento de la institucionalización, que delimita y precisa aquellos elementos constituyentes de la organización matemática construida; el momento de la evaluación de la praxeología construida.

Siguiendo las líneas recientes de investigación que propone la TAD, se propone la necesidad de introducir en los sistemas de enseñanza procesos de estudio *funcionales*, donde los saberes no constituyan *monumentos* que el profesor *enseña* a los estudiantes, sino herramientas materiales y conceptuales, útiles para estudiar y resolver situaciones problemáticas. Las *Actividades de Estudio e Investigación* (AEI) emergen como *modelo didáctico* para abordar dicha problemática. De esta manera, se trata de superar la estructura binaria clásica de la enseñanza de la matemática, que se caracteriza por la presentación de elementos tecnológicos – teóricos y luego tareas como *medio* para la aplicación de los primeros.

Una AEI es, en principio, una organización didáctica donde la clase, bajo la dirección de un profesor, va a hacer estudiar, reconstruir y hacer accesible a los alumnos una cierta *Organización Matemática Local*[1] (OML). Para esto es necesario partir de una cuestión generatriz *Q* cuyo estudio produzca la elaboración de una respuesta *R*, y esta contenga los elementos esenciales de la OML inicial. De esta manera, las AEI constituyen un proceso de estudio praxeológicamente finalizado,

[1] Chevallard (1999) introdujo la distinción de diferentes tipos de OM, según el grado de complejidad de sus componentes:

- *Organizaciones Puntuales* (OMP): Están generadas por lo que se considera en la institución como un único *tipo de tarea* y está definida a partir del bloque práctico-técnico.
- *Organizaciones Locales* (OML): Es el resultado de integrar diversas praxeologías *puntuales*. Cada praxeología *local* se caracteriza por una *tecnología* que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las praxeologías *puntuales* que la integran.
- *Organizaciones Regionales* (OMR): Se obtienen mediante la coordinación, articulación y posterior integración de diversas praxeologías *locales* a una teoría matemática en común.
- *Organizaciones Globales* (OMG): Surgen al agregar varias praxeologías regionales a partir de la integración de diferentes teorías.

pues se impone la condición de que *R* contenga los principales componentes de una OML previamente determinada y conocida de antemano por la institución escolar.

Una enseñanza por AEI permite comenzar a enfrentar el problema de la monumentalización de los saberes. Supone un cuestionamiento fuerte del contrato didáctico tradicional de la secundaria y cambios a nivel de mesogénesis, topogénesis y cronogénsis (Chevallard, 1985, 2009b). Implica básicamente el estudio de cuestiones suficientemente ricas, vivas y fecundas que provoquen en los estudiantes la necesidad de seguir aprendiendo, y que facilite abrir un proceso de investigación, que permita explorar, conjeturar y validar.

3. Diseño de la Actividad de Estudio e investigación

Las actividades propuestas responden un esquema de preguntas, cuyo etapa primitiva corresponde al trabajo desarrollado por Corica y Marín (2014). Aquí el diseño sólo contempló el estudio de actividades vinculadas a ángulos inscriptos y centrales con lápiz y papel. La AEI que proponemos permite la reconstrucción de una OM, cuyo estudio permite a los alumnos vivir todos los momentos de estudio. La AEI se gesta a partir de la siguiente cuestión generatriz:

Q_0: *¿Cuáles son las relaciones que se establecen entre los diferentes ángulos que se tracen en una circunferencia y otros elementos de la misma?*

El estudio de Q_0 conduce a la formulación de *cuestiones derivaras* (q_i), que involucran el estudio de tipo de tareas (T_i). A partir de estos tipos de tareas establecimos las situaciones que realizarán los estudiantes. El estudio de dichas tareas proporcionan una respuesta (R_i) que en conjunto, contribuyen a la elaboración de la respuesta R a Q_0 En el siguiente esquema presentamos un conjunto reducido de cuestiones derivadas de Q_0, que se corresponden con los objetivos de nuestro trabajo. El siguiente esquema presenta las conexiones entre las respuestas R_i que emergen del estudio de cada T_i.

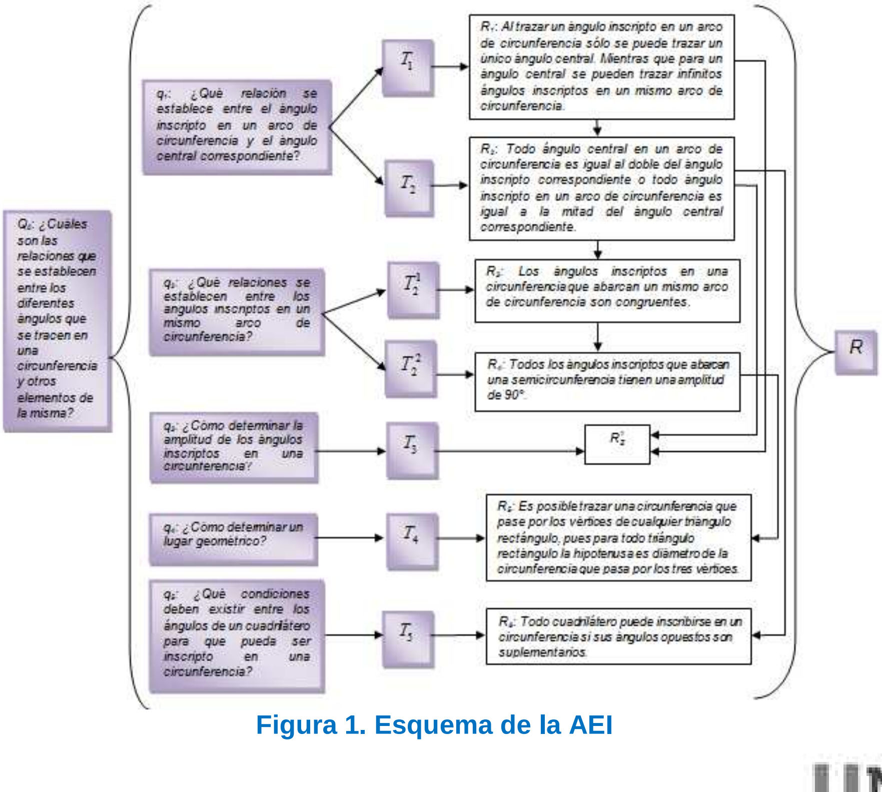


Figura 1. Esquema de la AEI

De la cuestión Q_0 derivamos cinco cuestiones fundamentales, que se detallan a continuación. La primera cuestión que se formula es:

q_1: *¿Qué relación se establece entre el ángulo inscripto en un arco de circunferencia y el ángulo central correspondiente*?

La cuestión q_1 conduce al estudio del tipo de tareas T_1: *Determinar ángulos inscritos y ángulos centrales en un mismo arco de circunferencia.* El estudio de T_1 conduce a la elaboración de la respuesta R_1: *Al trazar un ángulo inscripto en un arco de circunferencia sólo se puede trazar un único ángulo central. Mientras que para un ángulo central se pueden trazar infinitos ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia.*

La cuestión q_1 conduce también al estudio del tipo de tareas T_2: *Establecer la relación que existe entre los ángulos inscriptos y los ángulos centrales en un mismo arco de circunferencia.* El estudio de T_2 permite elaborar la respuesta R_2: *Todo ángulo central en un arco de circunferencia es igual al doble del ángulo inscripto correspondiente o todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente.* Aquí se establece la relación entre un ángulo inscripto y un ángulo central en un mismo arco de circunferencia considerando las conclusiones obtenidas en R_1 y otras relaciones y propiedades estudiadas por los alumnos en años anteriores.

Esta respuesta, constituye un teorema fundamental en la OM que se propone estudiar, pues es la tecnología primordial que justifica el hacer de los tipos de tareas que se indican a continuación.

La segunda cuestión que proponemos es:

q_2: *¿Qué relaciones se establecen entre los ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia?*

Esta cuestión conduce al estudio de dos tipos de tareas, vinculados a T_2:

T_2^1: *Determinar la relación entre ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia.*

T_2^2: *Determinar la amplitud de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia.*

Con estos tipos de tareas se pretende poner a prueba la potencia de las técnicas que se acaban por institucionalizar a partir del estudio de las tareas anteriores. De esta manera, también se procura obtener nuevas respuestas que favorezcan la construcción de una respuesta a Q_0.

El estudio de T_2^1 permite elaborar la respuesta R_3: *Los ángulos inscriptos en una circunferencia que abarcan un mismo arco de circunferencia son congruentes*. Las respuestas R_2 y R_3 aportan tecnologías para el estudio de T_2^2 y la elaboración de R_4: *Todos los ángulos inscriptos que abarcan una semicircunferencia tienen una amplitud de 90°.*

La tercera cuestión que proponemos es:

q_3: *¿Cómo determinar la amplitud de los ángulos inscriptos en una circunferencia*?

La cuestión q_3 conduce al estudio del tipo de tareas T_3: *Determinar la amplitud de ángulos inscriptos en una circunferencia.* El estudio de este tipo de tareas requiere del entorno tecnológico que se gesta con el estudio de T_1.

La elaboración de la respuesta a q_3 (R_2^1,) no aporta nuevos elementos tecnológicos. Para su obtención se requiere del empleo del entorno tecnológico gestado a partir del estudio de T_2, y trabajar sobre la técnica producida en R_2. Así se logra una rutinización y posterior naturalización de dicha técnica. De esta manera, se obtiene una respuesta R_2^1, es decir una respuesta que utiliza el entorno tecnológico de R_2.

La cuarta cuestión que proponemos es:

q_4: ¿Cómo determinar un lugar geométrico?

La cuestión q_4 conduce al estudio del tipo de tareas T_4: *Definir un lugar geométrico*. Para elaborar una respuesta a q_4, se requiere del empleo de técnicas institucionalizadas en el estudio de las tareas anteriores.

De esta manera, se obtiene una respuesta R_5: *Es posible trazar una circunferencia que pase por los vértices de cualquier triángulo rectángulo, pues para todo triángulo rectángulo la hipotenusa es diámetro de la circunferencia que pasa por los tres vértices.*

Esta respuesta es elaborada fundamentalmente a partir del empleo de la institucionalización indicada en R_4.

Finalmente, la quinta cuestión que proponemos es:

q_5: ¿Qué condiciones deben existir entre los ángulos de un cuadrilátero para que pueda ser inscripto en una circunferencia?

La cuestión q_5 conduce al estudio del siguiente tipo de tareas T_5: *Determinar las condiciones para que un cuadrilátero pueda ser inscripto en una circunferencia.*

Para el hacer de T_5 se requieren de elementos tecnológicos que emergen del hacer de T_2. Así se obtiene la respuesta R_6: *Todo cuadrilátero puede inscribirse en una circunferencia si sus ángulos opuestos son suplementarios.*

A continuación se presentan las situaciones que se derivan de los tipos de tareas descriptos.

3.1 Situación 1

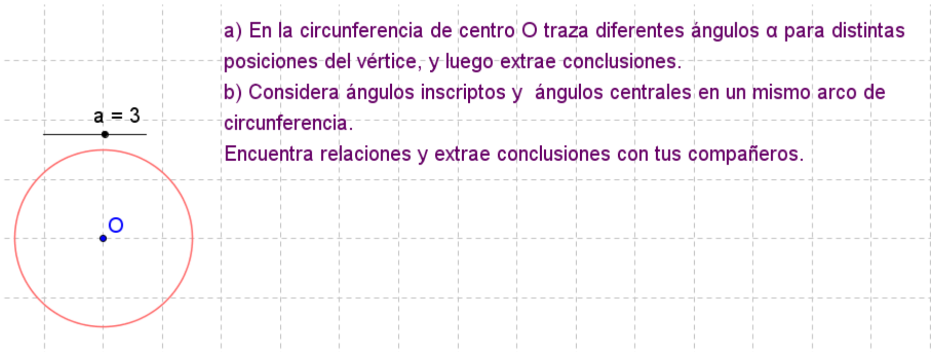
La primera situación que proponemos se encuentra vinculada a los siguientes tipos de tareas:

T_1: *Determinar ángulos inscritos y ángulos centrales en un mismo arco de circunferencia.*

T_2: *Establecer la relación que existe entre los ángulos inscriptos y los ángulos centrales en un mismo arco de circunferencia.*

T_2^1: *Determinar la relación entre ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia.*

Situación 1



El estudio de la situación se iniciar identificando ángulos centrales, inscriptos, semiinscriptos, interior y exterior en una circunferencia, utilizando las herramientas proporcionadas en Geogebra®.

Para la realización de este tipo de tareas es necesario que los alumnos calculen y tracen los diferentes tipos de ángulos en el programa Geogebra®, de acuerdo a las diferentes posiciones del vértice. La experiencia de la construcción, las decisiones del uso de tal o cual herramienta que brinda el programa, el reconocimiento de unicidad o no en las construcciones, preparan al terreno para el ingreso de los estudiantes en producciones argumentativas. La toma de decisión acerca de la ubicación de las distintas posiciones del vértice y los puntos por los cuales deben pasar los lados de los ángulos involucra razonamientos deductivos. Promueve la reflexión sobre ciertas condiciones que deben cumplir los ángulos construidos.

Si bien, el primer inciso a) permite involucrar a los estudiantes en la actividad de explorar diversos ángulos en circunferencias, en particular, en el inciso b) se centra a los estudiantes en el análisis de ángulos centrales e inscriptos en una circunferencia. Se pretende que los alumnos cuando tracen un ángulo en el centro de la circunferencia y en un punto perteneciente a la misma, identifiquen los ángulos inscriptos y centrales para luego poder establecer relaciones entre ellos en un mismo arco de circunferencia.

Así, se pretende que los alumnos exploren sobre las diferentes disposiciones del ángulo central e inscripto y que obtengan las siguientes conclusiones:

- Al trazar un ángulo inscripto en un arco de circunferencia sólo se puede trazar un ángulo central en relación al mismo.
- Al trazar un ángulo central en un arco de circunferencia se pueden trazar infinitos ángulos inscriptos en relación al mismo.
- Todos los ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia son congruentes.

En esta primera etapa, los estudiantes podrían realizar deducciones a partir de un trabajo experimental. A continuación se espera que los alumnos puedan establecer la relación entre un ángulo inscripto y un ángulo central en un mismo arco de circunferencia a través de argumentos deductivos, llegar al resultado de manera independiente a la experimentación. Pues, según Sadovsky, Parra, Itzcovich y Broitman (1998) el hecho de inferir a partir de datos y propiedades, relaciones que no están explicitadas, llevan a establecer los resultados de manera independiente a la experimentación y esto forma parte del trabajo en geometría.

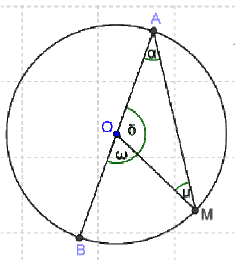
De esta manera, a partir del estudio de la situación se procura que el momento de la institucionalización sea vivido por toda la comunidad de estudio y no solo quedar en manos del profesor.

Para resolver, es necesario que los alumnos reconozcan ángulos inscriptos y ángulos centrales en un mismo arco de circunferencia e identifiquen los triángulos isósceles en un mismo arco de circunferencia. A partir de aquí, los estudiantes deberán establecer las relaciones y propiedades encontradas entre los diferentes esquemas. Se espera que los alumnos al trabajar con Geogebra®, obtengan distintas construcciones que se pueden clasificar en tres casos según la posición del centro de la circunferencia y el ángulo inscripto.

Dichas construcciones las analizamos a continuación:

1. El centro de la circunferencia se encuentra sobre un lado del ángulo inscripto

Se espera que los estudiantes realicen una construcción como la siguiente:



Esquema 1

Al trabajar con Geogebra® los estudiantes podrán trazar un segmento que pase por el centro O denominado $\overline{BA}$, un segmento $\overline{AM}$ siendo *M* un punto de la circunferencia *C*, y un segmento $\overline{MO}$. Así, podrán determinar los ángulos formados por los segmentos trazados.

Se espera que los alumnos identifiquen el triángulo MAO, que resulta ser isósceles pues, $\overline{OM} = \overline{OA}$ por ser ambos segmentos radio de la circunferencia.

Aquí los estudiantes podrán utilizar la siguiente propiedad: en todo triángulo isósceles, *los ángulos que se oponen a los lados congruentes son también congruentes*.

Por otro lado, dado que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo es de 180°, resulta que: $\hat{\alpha} + \hat{\mu} + \hat{\delta} = 180°$

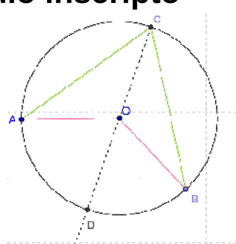
Por otro lado, $\hat{\delta}$ y $\hat{\omega}$ son ángulos adyacentes, por lo tanto: $\hat{\delta} + \hat{\omega} = 180°$

Entonces, resulta que: $\hat{\alpha} + \hat{\mu} + \hat{\delta} = \hat{\delta} + \hat{\omega}$ Operando, se tiene que: $\hat{\alpha} + \hat{\mu} = \hat{\omega}$ (1)

Como $\hat{\alpha} = \hat{\mu}$ reemplazando en (1), resulta: $2\hat{\alpha} = \hat{\omega}$. Por lo tanto: $\hat{\alpha} = \frac{1}{2}\hat{\omega}$

2. El centro de la circunferencia es interior al ángulo inscripto

Un posible esquema a obtener puede ser el siguiente:



Esquema 2

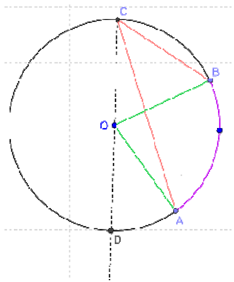
En una circunferencia de centro *O*, se identifican los puntos A, B y C. Se trazan los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$, resultando $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ radios de la circunferencia.

Como resulta ser O interior al ángulo inscripto $A\hat{C}B$, se puede trazar una semirrecta $\overrightarrow{CO}$ que corta a la circunferencia en el punto D. Así, el ángulo $A\hat{C}B$ queda dividido en dos ángulos, $A\hat{C}D$ y $D\hat{C}B$, los que cumplen las condiciones de la deducción anterior:

Siendo $A\hat{C}D = \frac{1}{2}A\hat{O}D$ y $D\hat{C}B = \frac{1}{2}D\hat{O}B.$ Sumando miembro a miembro las dos expresiones, resulta: $A\hat{C}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$

3. El centro de la circunferencia es exterior al ángulo inscripto

Para este caso, un posible esquema puede ser el siguiente:



Esquema 3

Aquí al trazar una semirrecta $\overrightarrow{CO}$ y determinar los ángulos $D\hat{C}B$ y $D\hat{C}A$, la situación se reduce al primer caso.

Siendo $D\hat{C}B = \frac{1}{2}D\hat{O}B$ y $D\hat{C}A = \frac{1}{2}D\hat{O}A.$ Restando miembro a miembro estas dos igualdades resulta: $A\hat{C}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$.

De esta manera, se pretende que la comunidad de estudio pueda enunciar el siguiente teorema:

> Todo ángulo central en un arco de circunferencia es igual al doble del ángulo inscripto correspondiente o todo ángulo inscripto en un arco de circunferencia es igual a la mitad del ángulo central correspondiente**.**

3.2. Situación 2 y situación 3

El objetivo de las situaciones es hacer vivir el momento del trabajo de la técnica. Se inicia un trabajo específico sobre las técnicas institucionalizadas para lograr su respectiva rutinización y posterior naturalización. También, el propósito es hacer vivir el momento de la evaluación. En toda la propuesta este momento es transversal, aquí en particular con la resolución de las situaciones, se procura analizar el dominio de los estudiantes sobre la OM en vías de construcción.

La situación 2 y 3 corresponden al siguiente tipo de tareas:

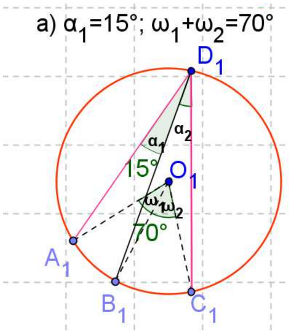
T_3: Determinar la amplitud de ángulos inscriptos en una circunferencia

En el hacer de las situaciones los alumnos podrán emplear el entorno tecnológico que emergió del hacer de la situación 1.

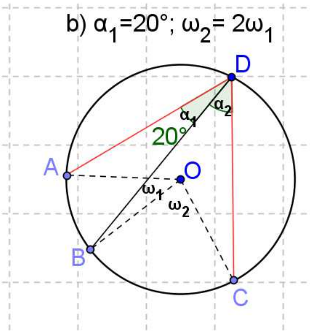
La situación 2 requiere del empleo de lápiz y papel. Aquí se presentan gráficos donde aparecen valores de algunos ángulos.

Situación 2

Halla la amplitud de α_2 en cada caso. Indica los procedimientos utilizados para hallar la solución.



Esquema 4



Esquema 5

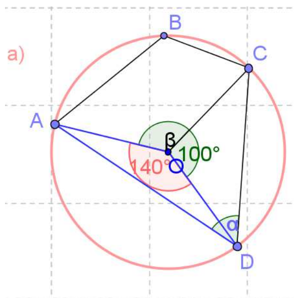
En la situación 2 a) se espera que los alumnos consideren el ángulo inscripto α_1, que se encuentra inscripto en el mismo arco de circunferencia que el ángulo ω_1. Considerando la relación entre un ángulo inscripto y un ángulo central en un mismo arco de circunferencia resulta $\omega_1 = 2 \cdot 15^\circ$, por lo tanto $\omega_1 = 30^\circ$. Como $\omega_1 + \omega_2 = 70^\circ$, resulta que $\omega_2 = 70^\circ - 30^\circ$, por lo tanto $\omega_2 = 40^\circ$ Luego, como el ángulo inscripto α_2 se encuentra en el mismo arco de circunferencia que ω_2, resulta que $\alpha_2 = \frac{40^\circ}{2}$, por lo tanto $\alpha_2 = 20^\circ$.

En la situación 2 b) se espera que los alumnos identifiquen que el ángulo α_1 se encuentra inscripto en el mismo arco de circunferencia que el ángulo ω_1. Considerando la relación entre un ángulo inscripto y un ángulo central en un mismo arco de circunferencia, resulta $\omega_1 = 2 \cdot 20^\circ$, por lo tanto $\omega_1 = 40^\circ$.Como $\omega_2 = 2 \cdot \omega_1$, resulta que $\omega_1 = 80^\circ$. Luego, como el ángulo inscripto α_2 se encuentra en el mismo arco de circunferencia que ω_2, resulta $\alpha_2 = 40^\circ$.

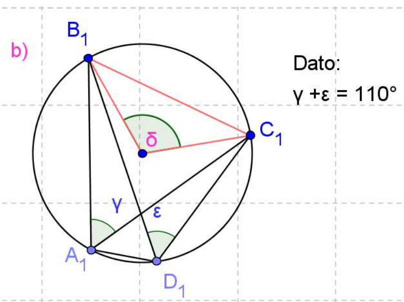
La situación 3 es una tarea de lápiz y papel. Aquí se indican valores de algunos ángulos en cuadriláteros inscriptos en circunferencias.

Situación 3

Hallar las medidas de los ángulos marcados en cada figura. Indicar los procedimientos empleados para hallar la solución.



Esquema 6



Esquema 7

En la situación 3 a) se espera que los alumnos determinen el ángulo central β, considerando que $\beta = 360^\circ - 140^\circ - 100^\circ$, por lo que resulta $\beta = 120^\circ$.

Como el ángulo inscripto α se encuentra en el mismo arco de circunferencia que β y considerando la relación entre un ángulo inscripto y un ángulo central, resulta $\alpha = \frac{120°}{2}$, es decir, $\alpha = 60°$.

En la situación 3 b) se espera que los alumnos identifiquen que los ángulos ε y γ son congruentes por estar inscriptos en un mismo arco de circunferencia, tal como se concluye del hacer de la situación 1. Así, resulta que $\varepsilon = 55°$ y $\gamma = 55°$. Como el ángulo central δ se encuentra en el mismo arco de circunferencia que ε y γ considerando la relación entre un ángulo inscripto y un ángulo central, resulta $\delta = 110°$.

3.3. Situación 4

La situación 4 constituye una tarea inversa en relación a las propuestas en la situación 2 y 3. Se entiende por tarea inversa aquella que se define, intercambiando datos e incógnitas, se cuestiona las condiciones de realización de la tarea y de aplicación de una determinada técnica (Bosch, Fonseca, Gascón, 2004).

La situación 4 corresponde al siguiente tipo de tareas:

T_2: Establecer la relación que existe entre los ángulos inscriptos y los ángulos centrales en un mismo arco de circunferencia.

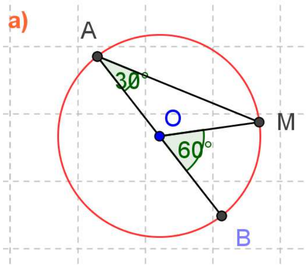
Situación 4

a) Construye una circunferencia de centro *O* y radio 3. Traza un diámetro de extremos A y B. Siendo M un punto perteneciente a la circunferencia, distintos de los extremos A y B. Traza el ángulo $B\hat{O}M$ que mida 60°, luego traza el ángulo $O\hat{A}M$ que mida 30°.

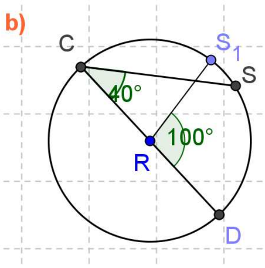
b) Construye una circunferencia de centro *R* y radio 3. Traza un diámetro de extremos C y D. Siendo S un punto perteneciente a la circunferencia, distinto de los extremos C y D. Traza el ángulo $D\hat{R}S$ que mida 100°, luego traza el ángulo $R\hat{C}S$ que mida 40°.

c) A partir de los resultados obtenidos en a) y b) extrae conclusiones.

Se pretende que los alumnos realicen la construcción en Geogebra® y obtengan construcciones como las que se indican a continuación:



Esquema 8



Esquema 9

Al realizar las construcciones, se espera que los estudiantes concluyan que a) se puede realizar, mientras que b) no es posible.

Los estudiantes, sumergidos en el momento del trabajo de la técnica, en particular en b) los llevará a concluir que al realizar la circunferencia no es posible determinar el ángulo central de 100^0. O bien, si determinaron en una primera instancia el ángulo central no podrán construir el inscripto de 40^0. En un bosquejo como el que se indica en el esquema 9 se puede constatar que el ángulo $R\hat{C}S$ no se puede manejar a *voluntad*. Al trazar el ángulo $D\hat{R}S$, se determinará el ángulo $R\hat{C}S$ con una amplitud de 40^0. Estos ángulos son dependientes entre sí, pues $D\hat{R}S$ y $R\hat{C}S$ se encuentran en el mismo arco de circunferencia. De esta manera, se espera que los alumnos pongan en juego el entorno tecnológico gestado en la situación 1.

3.4 Situación 5

Para la resolución de la situación 5 se puede emplear lápiz y papel o herramientas informáticas. Nuevamente el momento didáctico prioritario que permite vivir el estudio de la tarea es el momento del trabajo de la técnica.

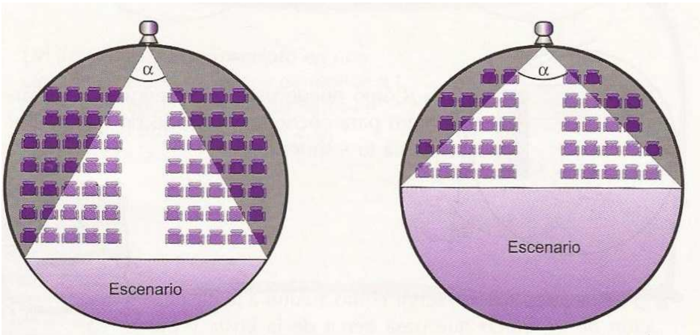
La situación 5 corresponde al siguiente tipo de tareas:

T_2^1: *Determinar la relación entre ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia.*

El hacer de la situación requiere del empleo del entorno tecnológico gestado en la situación 1.

Situación 5

Se quiere iluminar con un foco un escenario que ocupa una porción de un predio circular. ¿Cuál es la amplitud del ángulo α que forman los rayos de luz en cada uno de los siguientes escenarios?

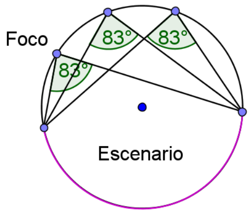


Esquema 10 Esquema 11

¿En cuántos lugares diferentes se puede ubicar el foco para que, con el mismo ángulo α, se ilumine cada escenario? Fundamenta tu respuesta.

Para resolver, los estudiantes deberán determinar que el foco en este caso el vértice del ángulo inscripto, se puede ubicar en cualquier lugar siempre que ocupe el mismo arco de circunferencia. Además el foco siempre debe estar fuera del arco de circunferencia que ocupa el escenario.

En el esquema 12 se propone una posible resolución que podrían realizar los estudiantes en Geogebra®. Utilizando la función arrastre que proporciona el software, podrán observar que el ángulo α se mantiene invariante siempre que ocupe el mismo arco que abarca el escenario:



Esquema 12

Mediante el empleo del entorno tecnológico que emerge de la situación 1, los estudiantes podrán argumentar los resultados que se obtienen con el software.

3.5. Situación 6

A continuación, se propone la situación 6, que corresponde al siguiente tipo de tareas:

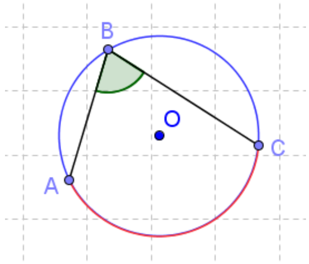
T_2^2: *Determinar la amplitud de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia.*

En particular, se pretende que los alumnos puedan determinar la amplitud de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia utilizando elementos tecnológicos que emergen del hacer de la situación 1.

Se pretende que los alumnos recuperen las técnicas que emergieron del hacer de las situaciones anteriores y así adquirir una mejor comprensión sobre el objeto de estudio. En particular, el entorno tecnológico-teórico empleado en esta situación permitiría construir nuevos entornos tecnológicos.

Situación 6

Con el software Geogebra® construye una circunferencia de centro *O*. Marca un segmento $\overline{AB}$ en la circunferencia, y luego determina el ángulo $A\hat{B}C$ de la medida que elijas.



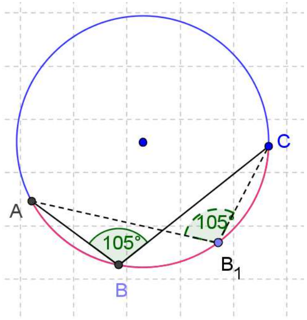
Esquema 13

a) Mueve el punto *B* por el arco $\widehat{AC}$ rojo. Analiza qué sucede con su medida.

b) Mueve el punto *B* por el arco azul. Analiza qué sucede con la medida del ángulo $A\hat{B}C$, y qué relación encuentras entre las dos medidas.

c) Determina cuánto mide $A\hat{B}C$ cuando *A* y *C* coinciden con los extremos de un diámetro. Extrae conclusiones de tu propuesta.

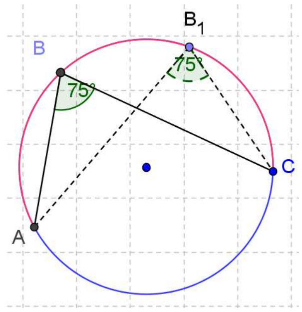
En a) se pretende que los alumnos obtengan con Geogebra® la medida del ángulo $A\hat{B}C$, trasladen el vértice sobre el arco $\widehat{AC}$ y determinen que la medida no varía. Se espera que los alumnos lleguen a deducir que todos los ángulos inscriptos en un mismo arco de circunferencia tienen la misma amplitud. Si bien, esta conclusión emerge del hacer de la situación 1, en la situación se pretende profundizar en este sentido. Un posible esquema a obtener puede ser el que se indica a continuación. Aquí se puede observar que al arrastrar $A\hat{B}C$ sobre el mismo arco de circunferencia $\overset{\frown}{AC}$, el ángulo determinado $A\hat{B_1}C$ no varía:



Esquema 14

En 6 b) los alumnos podrán determinar que en el nuevo ángulo $A\hat{B}C$, la amplitud no varía al estar dicho ángulo en el mismo arco de circunferencia ($\overset{\frown}{AC}$).

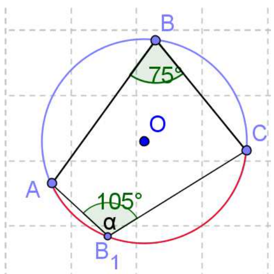
Un posible esquema a obtener, podría ser el que se indica en el esquema 15. Aquí se puede observar que al arrastrar $A\hat{B}C$ sobre el mismo arco de circunferencia $\overset{\frown}{AC}$, el ángulo determinado $A\hat{B_1}C$ no varía:



Esquema 15

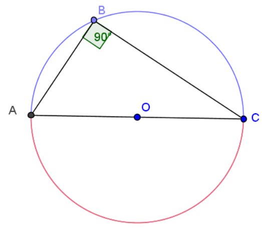
Se espera que los alumnos comparen las medidas del ángulo trazado en a) y el nuevo ángulo $A\hat{B}C$ y determinen que suman 180^0, es decir son ángulos suplementarios.

Finalmente, un posible esquema a obtener para 6 b), podría ser el siguiente:



Esquema 16

En c) se espera que los alumnos tracen el diámetro de la circunferencia $\overline{AC}$ y los lados del ángulo inscriptos $A\hat{B}C$, tal como se indica en el esquema 16. Los alumnos podrán determinar la amplitud del ángulo $A\hat{B}C$, utilizando la herramienta Geogebra®, y observar que el ángulo $A\hat{B}C$ se encuentra inscripto en una semicircunferencia. Así, el ángulo central correspondiente, es un ángulo llano, por lo tanto el ángulo $A\hat{B}C$ es igual a su mitad, es decir 90^0. Estos resultados podrían ser deducidos a partir del entorno tecnológico que se gestó en la situación 1.



Esquema 17

Se espera que a partir del estudio de la situación se institucionalice lo siguiente:

Todos los ángulos inscriptos que abarcan una semicircunferencia tienen una amplitud de 90^0.

3.6 Situación 7

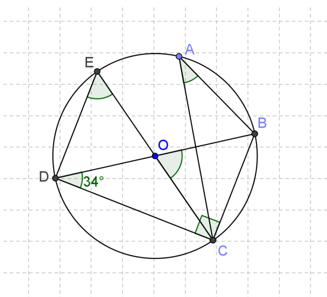
El hacer de la situación 7 prioriza la vivencia del momento del trabajo de la técnica y corresponde al siguiente tipo de tareas:

T_2^2: *Determinar la amplitud de los ángulos inscriptos en una semicircunferencia.*

En el hacer de las situación 7 se pretende que los alumnos empleen el entorno tecnológico – teórico que surgió del hacer de la situación 1 y 6. A continuación se presenta un gráfico en el que se indican valores de algunos ángulos. Aquí los alumnos deberán emplear propiedades de los ángulos interiores de un triángulo y las relaciones entre los diferentes ángulos para poder dar respuesta. La situación se diseñó en Geogebra®, para ser resuelta con el software.

Situación 7

A, B, C, D y E son puntos de la circunferencia de centro O. Si el ángulo $B\hat{D}C$ mide 34°, determina la medida de cada uno de los siguientes ángulos: $C\hat{O}B$, $D\hat{E}C$, $C\hat{A}B$ y $D\hat{C}B$. Justifica.



Esquema 18

En el hacer de la situación, es probable que algunos alumnos recurran al comando ángulos de la herramienta Geogebra® para poder determinar los ángulos solicitados. Lo que se espera es que los alumnos lleguen al resultado a partir de las técnicas y tecnologías estudiadas hasta el momento. Podrán determinar la medida del ángulo $C\hat{O}B$, considerando la relación entre un ángulo inscripto y un ángulo central. Dado que el ángulo inscripto $B\hat{D}C$ se encuentra en el mismo arco de circunferencia que $C\hat{O}B$, resulta $C\hat{O}B=68°$.

Para determinar la medida de $D\hat{E}C$, primero los estudiantes deberán determinar la medida de $D\hat{O}C$. Al ser este último un ángulo suplementario con $C\hat{O}B$, resulta que $D\hat{O}C=112°$. Luego, como el ángulo inscripto $D\hat{E}C$ se encuentra en el mismo arco de circunferencia que $D\hat{O}C$, por el entorno tecnológico gestado en el hacer de la situación 1, resulta que $D\hat{E}C=56°$.

Aquí, los estudiantes podrán utilizar otras técnicas para obtener la medida $D\hat{E}C$. Por ejemplo, podrán recurrir a las propiedades de los ángulos de los triángulos. Primero deberán determinar la medida de $D\hat{O}E$. Este ángulo al ser opuesto por el vértice con $C\hat{O}B$, resulta que $D\hat{E}C=C\hat{O}B=68°$. El ángulo $E\hat{D}O$ tiene una amplitud de 56°, dado que el ángulo $E\hat{D}C$ es recto, por estar inscripto en una semicircunferencia y siendo $\overline{EC}$ el diámetro correspondiente.

Otra manera de que los alumnos pueden obtener la amplitud de $D\hat{E}C$, es que identifiquen el triángulo DOC como isósceles. Pues, $\overline{OE}=\overline{OD}$ por ser radios de la circunferencia. Como $B\hat{D}C$ tiene una amplitud de 34º y resulta $E\hat{D}C$ recto por estar inscripto en una semicircunferencia, resulta $E\hat{D}O=56°$. Dado que a ángulos opuestos se oponen ángulos iguales resulta $E\hat{D}O=D\hat{E}C$, por lo tanto $E\hat{D}O=56°$.

Considerando como dato que el ángulo $B\hat{D}C=34°$, resulta que $C\hat{A}B$ tienen una amplitud de 34º, por estar inscripto en el mismo arco de circunferencia. Considerando que el ángulo $D\hat{C}B$ se encuentra inscripto en una semicircunferencia correspondiente al diámetro $\overline{DB}$, por el entorno tecnológico gestado en el hacer de la situación 6, resulta entonces que $D\hat{C}B$ es recto.

3.7 Situación 8

En esta situación, se pretende la realización de una tarea inversa correspondiente al tipo de tareas T_2^2.

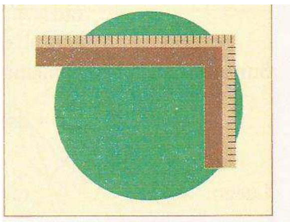
La situación que se propone corresponde al siguiente tipo de tareas:

T_4: Definir un lugar geométrico.

En la situación 8 se pretende determinar el centro de una circunferencia a partir de los ángulos inscriptos conocidos.

Situación 8

¿De qué manera pueden utilizar una escuadra de carpintero para determinar el centro de un círculo?

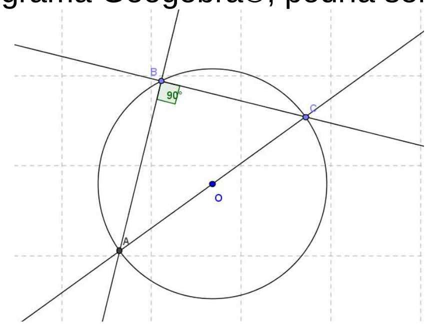


Esquema 19

La situación 8 responde a una situación *abierta* en el sentido de que los alumnos deberán determinar cuáles son las incógnitas y los datos en el enunciado de la tarea. Se espera que discutan si es posible o no la construcción teniendo en cuenta los datos en la situación y en caso afirmativo, cuál será la técnica más eficaz que permita llegar a una solución.

Las discusiones que se intentan promover en los alumnos con la resolución de la tarea son vitales en el tipo de trabajo que se propone. La toma de decisiones sobre el uso de tal o cual herramienta, el reconocimiento de unicidad o no, preparan el terreno para la entrada de los alumnos en producciones más argumentativas. Es decir promueve la reflexión sobre los elementos de un triángulo (lados y ángulos), las relaciones entre éstos y los elementos de una circunferencia (centro, radio, diámetro, ángulo inscripto, ángulo central).

Así, los alumnos deberán determinar si es posible o no encontrar el centro de la circunferencia a través de una escuadra de carpintero, teniendo en cuenta que todo punto de la circunferencia es vértice de un ángulo recto. Un posible esquema mediante el empleo del programa Geogebra®, podría ser el siguiente:



Esquema 20

A partir del resultado tecnológico gestado en la situación 7, se espera que los alumnos construyan una circunferencia y luego un triángulo rectángulo como se observa en el esquema 20. Se espera que los alumnos tracen dos rectas perpendiculares $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$, luego que unan los puntos *A* y *C*, y así encuentren de esta manera el centro *O*. Finalmente, se concluye que el vértice de la escuadra que forma un ángulo de 90^0 debe ir sobre un punto de la circunferencia, y así se podrá trazar el diámetro de la circunferencia, mediante el empleo de técnicas institucionalizadas en las situaciones anteriores.

3.8 Situación 9

Con la situación 9 se propone sumergir a los estudiantes en el momento exploratorio, con el objeto de analizar las condiciones para que un cuadrilátero resulte inscripto en una circunferencia. Según Itzcovich (2005) parte de la actividad geométrica consiste en producir propiedades sobre las figuras. En ciertas situaciones se vuelve necesario determinar un dominio para el que es válida, o indicar las condiciones bajo las cuales se cumple alguna relación. Así, es necesario indagar e imponer condiciones bajo las que un enunciado se verifica.

La situación que se presenta a continuación corresponde al siguiente tipo de tarea:

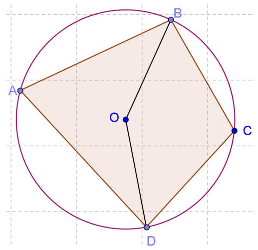
T_5: *Determinar las condiciones para que un cuadrilátero pueda ser inscripto en una circunferencia*

Situación 9

Dibuja en Geogebra® diversas circunferencias e inscríbele cuadriláteros. ¿Cuáles son las condiciones para que sean inscriptibles?

De esta manera, se espera que los alumnos en Geogebra®, tracen una circunferencia de centro O y radio *R*, y con el comando segmentos creen los lados del cuadrilátero.

Un posible podría ser el siguiente:



Esquema 21

Aquí, se identifican los vértices del cuadrilátero como A, B, C y D. Se espera que los alumnos empleen el entorno tecnológico que emergió del hacer de la situación 1 y 6, para formular lo siguiente:

$B\hat{A}D=\frac{1}{2}B\hat{O}D$ y $B\hat{C}D=\frac{1}{2}B\hat{O}D$

Sumando miembro a miembro:

$$B\hat{A}D+B\hat{C}D=\frac{1}{2}B\hat{O}D+\frac{1}{2}B\hat{O}D$$

$$B\hat{A}D+B\hat{C}D=\frac{1}{2}\cdot 360$$

$$B\hat{A}D+B\hat{C}D=180^\circ$$

Luego, aplicando el resultado tecnológico que emerge del hacer de la situación 6, resulta que los ángulos $B\hat{A}D$ y $B\hat{C}D$ son suplementarios. De manera, similar se espera que los alumnos puedan demostrar que $A\hat{D}C$ y $A\hat{B}C$ también son suplementarios. Así, se concluye que:

Para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia los ángulos opuestos deben ser suplementarios.

Con el propósito de profundizar en las condiciones para inscribir cuadriláteros. Se propone la realización de las siguientes tareas, que requieren del empleo de herramientas informáticas:

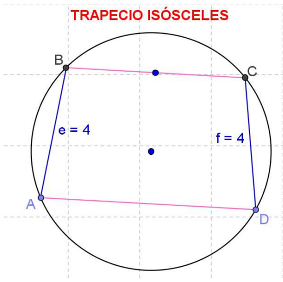
a) ¿Es posible trazar la circunferencia que pasa por los vértices de un trapecio? ¿Por qué?

b) ¿Todo rombo puede ser inscripto en una circunferencia? ¿Y el romboide? ¿Por qué?

c) ¿Puede inscribirse un paralelogramo en una circunferencia? ¿Por qué?

Los estudiantes podrían dar una respuesta inmediata a las preguntas propuestas. Pues, pueden argumentar que todo trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y otros dos que no lo son. Por lo concluido en la situación 9 el único trapecio que se puede inscribir en una circunferencia es el isósceles. Sin embargo, se pretende que los estudiantes demuestren tal conclusión. Se pretende que argumenten sus producciones mediante el entorno tecnológico que emerge del hacer de la situación 1, 6 y 9.

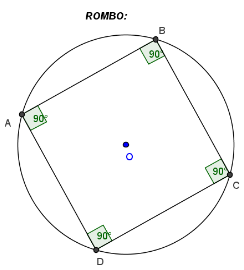
Para dar respuesta a la pregunta a) se requiere construir una circunferencia de cualquier radio y una cuerda (base del trapecio) $\overline{AD}$. Luego, trazar la recta paralela a la cuerda $\overline{AD}$ que pase por un punto perteneciente a la circunferencia. Esta recta cortará a la circunferencia en otro punto, que será el vértice que falta, formando el lado $\overline{BC}$. Al unir los vértices se finaliza el trazado del trapecio, tal como se indica en el esquema 22:



Esquema 22

Resulta entonces que, como los pares de ángulos $A\hat{B}C$, $D\hat{A}B$ y $C\hat{D}A$, $B\hat{C}D$ son conjugados internos entre las rectas paralelas $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ resulta $A\hat{B}C+D\hat{A}B=180°$ y $C\hat{D}A+B\hat{C}D=180°$. Empleando el entorno tecnológico que emerge del hace de la situación 9, resulta que: $D\hat{A}B+B\hat{C}D=180°$ y $A\hat{B}C+C\hat{D}B=180°$. Como $A\hat{B}C+D\hat{A}B=D\hat{A}B+B\hat{C}D$, resulta $A\hat{B}C=B\hat{C}D$. Entonces se concluye que el único trapecio que se puede inscribir es el trapecio isóceles.

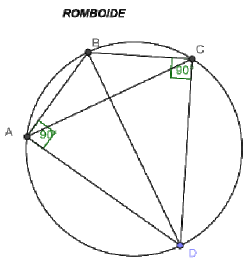
Para dar respuesta a b) se debe considerar las características del rombo y que un cuadrilátero es inscriptible si sus ángulos opuestos son suplementarios. Entonces los ángulos opuestos del rombo deben medir 90^0. De esta manera, los estudiantes podrán concluir que el rombo que puede inscribirse en una circunferencia es el cuadrado. Así mismo, como el caso anterior, se espera que los estudiantes puedan demostrar sus conclusiones. Para ello podrán trazar con el software o en lápiz y papel, una circunferencia de cualquier radio. En primer lugar deberán trazar una recta que pase por el centro de la circunferencia y luego una recta perpendicular a la recta trazada. Al unir los puntos determinados por las rectas, quedará construido el rombo. Tal como se indica en el esquema 23:



Esquema 23

El ángulo $D\hat{A}B$, correspondiente al rombo $ABCD$, tiene una amplitud de 90° por estar inscripto en una semicircunferencia. Tal como se deduce del entorno tecnológico gestado en la situación 7. Por la misma razón resulta que $A\hat{B}C$, $C\hat{D}A$ y $B\hat{C}D$ son rectos. De esta manera, se concluye en que todo rombo puede ser inscripto en una circunferencia. Por el entorno tecnológico gestado en la situación 10, resulta que el rombo $ABCD$ es cíclico.

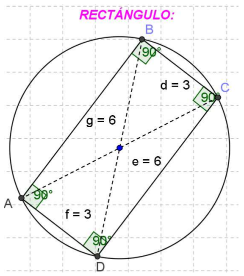
El romboide se caracteriza por presentar dos ángulos congruentes: aquellos que tienen como vértices los puntos donde concurren los lados desiguales. Dichos ángulos deben ser suplementarios y congruentes, por lo que esto ocurre si son rectos. Se espera que los alumnos tracen con el software una circunferencia de cualquier radio. En primer lugar deberán trazar el diámetro de dicha circunferencia, y luego una cuerda perpendicular al diámetro trazado. Unir los puntos determinados por dichas cuerdas sobre la circunferencia, tal como se indica en el esquema:



Esquema 24

Como el ángulo $D\hat{A}B$ se encuentra inscripto en una semicircunferencia, resulta recto. Por el entorno tecnológico gestado en la situación 9, y la definición de romboide, resulta que $B\hat{C}D$ es recto. Resulta entonces que el romboide es cuadrilátero cíclico.

Para dar respuesta a la pregunta c), los alumnos deberán explorar las distintas posibilidades y concluir por el entorno tecnológico gestado en la situación 9 que los únicos paralelogramos cíclicos son los rectángulos. Sin embargo, se pretende que los estudiantes argumenten este resultado tecnológico. Para ello deberán trazar una circunferencia de cualquier radio y dos diámetros de la misma no perpendiculares. Luego, al unir los puntos, queda formado un cuadrilátero inscripto. Así resulta que $C\hat{D}A$ es recto, por el entorno tecnológico gestado en la situación 6. Por la misma razón resultan los tres ángulos restantes rectos. Un posible esquema a construirse se indica a continuación:



Esquema 25

De esta manera, junto al resultado tecnológico que emerge del hacer de la situación 10, se concluye en lo siguiente:

El único paralelogramo inscriptible es el rectángulo

3.8. Situación 9

Con la situación 9 se propone sumergir a los estudiantes en el momento exploratorio, con el objeto de analizar las condiciones para que un cuadrilátero resulte inscripto en una circunferencia. Según Itzcovich (2005) parte de la actividad geométrica consiste en producir propiedades sobre las figuras. En ciertas situaciones se vuelve necesario determinar un dominio para el que es válida, o indicar las condiciones bajo las cuales se cumple alguna relación. Así, es necesario indagar e imponer condiciones bajo las que un enunciado se verifica.

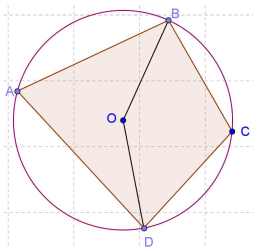
La situación que se presenta a continuación corresponde al siguiente tipo de tarea:

T_5: Determinar las condiciones para que un cuadrilátero pueda ser inscripto en una circunferencia

Situación 9
Dibuja en Geogebra® diversas circunferencias e inscríbele cuadriláteros. ¿Cuáles son las condiciones para que sean inscriptibles?

De esta manera, se espera que los alumnos en Geogebra®, tracen una circunferencia de centro O y radio *R*, y con el comando segmentos creen los lados del cuadrilátero.

Un posible podría ser el siguiente:



Esquema 21

Aquí, se identifican los vértices del cuadrilátero como A, B, C y D. Se espera que los alumnos empleen el entorno tecnológico que emergió del hacer de la situación 1 y 6, para formular lo siguiente:

$B\hat{A}D=\frac{1}{2}B\hat{O}D$ y $B\hat{C}D=\frac{1}{2}B\hat{O}D$

Sumando miembro a miembro:

$$B\hat{A}D+B\hat{C}D=\frac{1}{2}B\hat{O}D+\frac{1}{2}B\hat{O}D$$

$$B\hat{A}D+B\hat{C}D=\frac{1}{2}\cdot 360$$

$$B\hat{A}D+B\hat{C}D=180^{\circ}$$

Luego, aplicando el resultado tecnológico que emerge del hacer de la situación 6, resulta que los ángulos $B\hat{A}D$ y $B\hat{C}D$ son suplementarios. De manera, similar se espera que los alumnos puedan demostrar que $A\hat{D}C$ y $A\hat{B}C$ también son suplementarios. Así, se concluye que:

Para que un cuadrilátero pueda inscribirse en una circunferencia los ángulos opuestos deben ser suplementarios.

Con el propósito de profundizar en las condiciones para inscribir cuadriláteros. Se propone la realización de las siguientes tareas, que requieren del empleo de herramientas informáticas:

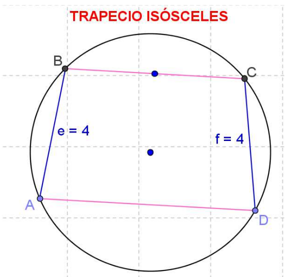
a) ¿Es posible trazar la circunferencia que pasa por los vértices de un trapecio? ¿Por qué?

b) ¿Todo rombo puede ser inscripto en una circunferencia? ¿Y el romboide? ¿Por qué?

c) ¿Puede inscribirse un paralelogramo en una circunferencia? ¿Por qué?

Los estudiantes podrían dar una respuesta inmediata a las preguntas propuestas. Pues, pueden argumentar que todo trapecio es un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos y otros dos que no lo son. Por lo concluido en la situación 9 el único trapecio que se puede inscribir en una circunferencia es el isósceles. Sin embargo, se pretende que los estudiantes demuestren tal conclusión. Se pretende que argumenten sus producciones mediante el entorno tecnológico que emerge del hacer de la situación 1, 6 y 9.

Para dar respuesta a la pregunta a) se requiere construir una circunferencia de cualquier radio y una cuerda (base del trapecio) $\overline{AD}$. Luego, trazar la recta paralela a la cuerda $\overline{AD}$ que pase por un punto perteneciente a la circunferencia. Esta recta cortará a la circunferencia en otro punto, que será el vértice que falta, formando el lado $\overline{BC}$. Al unir los vértices se finaliza el trazado del trapecio, tal como se indica en el esquema 22:

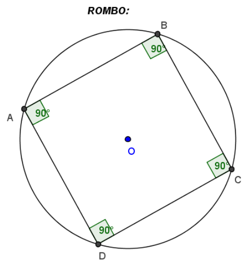


Esquema 22

Resulta entonces que, como los pares de ángulos $A\hat{B}C$, $D\hat{A}B$ y $C\hat{D}A$, $B\hat{C}D$ son conjugados internos entre las rectas paralelas $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ resulta $A\hat{B}C+D\hat{A}B=180°$ y $C\hat{D}A+B\hat{C}D=180°$. Empleando el entorno tecnológico que emerge del hace de la situación 9, resulta que: $D\hat{A}B+B\hat{C}D=180°$ y $A\hat{B}C+C\hat{D}B=180°$. Como $A\hat{B}C+D\hat{A}B=D\hat{A}B+B\hat{C}D$, resulta $A\hat{B}C=B\hat{C}D$. Entonces se concluye que el único trapecio que se puede inscribir es el trapecio isóceles.

Para dar respuesta a b) se debe considerar las características del rombo y que un cuadrilátero es inscriptible si sus ángulos opuestos son suplementarios. Entonces los ángulos opuestos del rombo deben medir 90^0. De esta manera, los estudiantes podrán concluir que el rombo que puede inscribirse en una circunferencia es el cuadrado.

Así mismo, como el caso anterior, se espera que los estudiantes puedan demostrar sus conclusiones. Para ello podrán trazar con el software o en lápiz y papel, una circunferencia de cualquier radio. En primer lugar deberán trazar una recta que pase por el centro de la circunferencia y luego una recta perpendicular a la recta trazada. Al unir los puntos determinados por las rectas, quedará construido el rombo. Tal como se indica en el esquema 23:

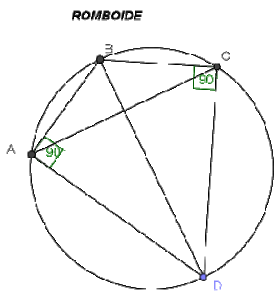


Esquema 23

El ángulo $D\widehat{A}B$, correspondiente al rombo $ABCD$, tiene una amplitud de 90° por estar inscripto en una semicircunferencia. Tal como se deduce del entorno tecnológico gestado en la situación 7. Por la misma razón resulta que $A\widehat{B}C$, $C\widehat{D}A$ y $B\widehat{C}D$ son rectos. De esta manera, se concluye en que todo rombo puede ser inscripto en una circunferencia. Por el entorno tecnológico gestado en la situación 10, resulta que el rombo $ABCD$ es cíclico.

El romboide se caracteriza por presentar dos ángulos congruentes: aquellos que tienen como vértices los puntos donde concurren los lados desiguales. Dichos ángulos deben ser suplementarios y congruentes, por lo que esto ocurre si son rectos.

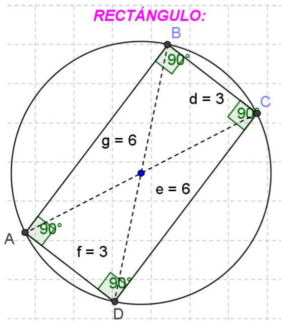
Se espera que los alumnos tracen con el software una circunferencia de cualquier radio. En primer lugar deberán trazar el diámetro de dicha circunferencia, y luego una cuerda perpendicular al diámetro trazado. Unir los puntos determinados por dichas cuerdas sobre la circunferencia, tal como se indica en el esquema:



Esquema 24

Como el ángulo $D\widehat{A}B$ se encuentra inscripto en una semicircunferencia, resulta recto. Por el entorno tecnológico gestado en la situación 9, y la definición de romboide, resulta que $B\widehat{C}D$ es recto. Resulta entonces que el romboide es cuadrilátero cíclico.

Para dar respuesta a la pregunta c), los alumnos deberán explorar las distintas posibilidades y concluir por el entorno tecnológico gestado en la situación 9 que los únicos paralelogramos cíclicos son los rectángulos. Sin embargo, se pretende que los estudiantes argumenten este resultado tecnológico. Para ello deberán trazar una circunferencia de cualquier radio y dos diámetros de la misma no perpendiculares. Luego, al unir los puntos, queda formado un cuadrilátero inscripto. Así resulta que $\widehat{CDA}$ es recto, por el entorno tecnológico gestado en la situación 6. Por la misma razón resultan los tres ángulos restantes rectos. Un posible esquema a construirse se indica a continuación:



Esquema 25

De esta manera, junto al resultado tecnológico que emerge del hacer de la situación 10, se concluye en lo siguiente:

El único paralelogramo inscriptible es el rectángulo

4. Comentarios finales

Con el dispositivo didáctico diseñado se propone involucrar a los estudiantes en el estudio de tareas que implican establecer condiciones a partir de las que una propiedad se cumple, como así también determinar un dominio de validez para dichas propiedades. El objetivo principal es establecer condiciones cada vez más generales para enunciar relaciones en una figura y entre figuras. Analizar todos los casos posibles, buscar argumentos que explique los casos que no cumplen una determinada condición y otros que sí la cumplen, enunciar condiciones y proponer teoremas. Este trabajo supone la posibilidad de apoyarse en propiedades de los objetos geométricos para poder anticipar relaciones no conocidas así como inferir y producir nuevas propiedades.

5. Referencias bibliográficas

Acosta, M. (2005). *Geometría experimental con Cabri: una nueva praxeología matemática. Educación Matemática*, 17(3), 121-140.

Andrade, J. A., Nacarato, A. M. (2004). *Tendências didático-pedagógicas no ensino de Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. Educação Matemática em Revista.* 11(17), 61-70.

Chevallard, Y. (1985). La transposition didactique ; du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage, Paris.

Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques*. 19/2, 221-266.

Chevallard, Y. (2004). *Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire* [En linea], Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Vers_une_didactique_de_la_codisciplinarite.pdf

Chevallard, Y. (2006). *Steps towards a new epistemology in mathematics education* [En linea], Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Steps_towards_a_New_Epistemology.pdf

Chevallard, Y. (2007). *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*, [En linea], Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf

Chevallard, Y. (2009a). *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD* [En linea], Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Cours_de_YC_a_l_EE_2009-2.pdf

Chevallard, Y. (2009b). *La notion de PER: problèmes et avancées* [En línea], Recuperado el 01 de Noviembre de 2012, de http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER___problemes_et_avancees.pdf

Corica, A.; Marín, E. (2014). *Actividad de Estudio e Investigación para la enseñanza de nociones de geometría. Números,* 85, 91 -114. Recuperado el 20 de Octubre de 2014, de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/85/Articulos_06.pdf

Corrales, J. (2011). *Las construcciones con GeoGebra como medio para resignificar las propiedades de las Figuras. UNION,* 28, 177 – 189. Recuperado el 11 de diciembre de 2013, de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). *Incompletitud de las Organizaciones Matemáticas Locales en las instituciones escolares. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24/2; 205-250.

García, I.; Arriero, A, C. (2000). *Una experiencia con Cabri: las curvas cónicas. Suma*, 34, 73-80.

González, M. J.; Lupiáñez , J. L. (2001). *Formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria: actividades basadas en la utilización de software de geometría dinámica. Uno: revista de didáctica de las matemáticas*, 28, 110-125.

Hoyos, V. (2006). *Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 24(1), 31-42.

Iaranzo N.; Fortuny J. M. (2009). *La influencia conjunta del uso de geogebra y lápiz y papel en la adquisición de competencia del alumnado. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 27 (3), 433-445.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. El Zorzal, Buenos Aires, Argentina.

Jones, K. (2002). *Issues in the Teaching and Learning of Geometry*. En Haggarty, L. (ed.) *Aspects of Teaching Secondary Mathematics. Perspectives on practice*, 121-139. RoutledgeFalmer, London, Inglaterra.

Larios, V.; Gonzalez G. N. (2009). *Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de geometría dinámica. RELIME*, 14, 147-160. Recuperado el 11 de diciembre de 2013, de http://www.clame.org.mx/relime.htm

Marín, E. (2012). *Actividad de estudio e investigación para el estudio de ángulos inscriptos en circunferencias*. Tesis de licenciatura. Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA.

Paulek, C.; Dias, M. (2013). *Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC): Um Estudo Sobre a Influência do Software GeoGebra na Elaboração das Demonstrações Geométricas. UNION*, 35, 145 – 160. Recuperado el 11 de diciembre de 2013, de http://www.fisem.org/paginas/union/revista.php

Pérez, A. (2000). *Cabri e Internet. Suma*, 36, 113-115.

Pichel , J. M. (2000). *Requeteoremas: reiventando teoremas en geometría con Cabri II. Suma*, 36, 17-22.

Richard, A. (2010*). Textos clásicos y geometría dinámica: estudio de un aporte mutuo para el aprendizaje de la geometría. Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 28(1), 95-112.

Sadovsky, P.; Parra, C.; Itzcovich, H.; Broitman, C. (1998). *La enseñanza de la geometría en el segundo ciclo en Documento de trabajo N° 5*. Dirección de Currícula, Secretaría de Educación, Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires, Buenos Aires, Argentina.

Ana Rosa Corica. Doctora en Ciencias de la Educación por la UNC en Argentina. Licenciada en Educación Matemática y Profesora en Matemática y Física por la UNCPBA. Investigadora Asistente del CONICET. Investigadora del NIECyT. Docente de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA, Tandil, Buenos Aires, Argentina.
acorica@exa.unicen.edu.ar

Yésica Muruaga. Profesora de Matemática por el Instituto Superior de Formación Docente y Técnica Nº 78 . Alumna de la Licenciatura en Educación Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA. Docente de Matemática en la Escuela de Educación Secundaria Técnica Nº 1, Bragado, Buenos Aires, Argentina.
yesik_13@hotmail.com