

INCIDENCIA DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES EN LA LECTURA DE GRÁFICAS DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO

María del Socorro Valero C., Ma. Guadalupe Barba S., Alejandro Del Castillo E., María Paulina Ventura R.

CBTis 164

paraklet@prodigy.net.mx; mgbarbal@prodigy.net.mx; alejandro.delcastilloescobedo@gmail.com; pau.ventur@hotmail.com

Resumen

En el presente estudio nos dimos a la tarea de investigar la incidencia del curso semestral de Cálculo en dos grupos de estudiantes de bachillerato tecnológico de 4º semestre, en torno a sus interpretaciones de las representaciones gráficas del movimiento rectilíneo. Este curso se enfocó en el desarrollo de pensamiento variacional y de razonamiento covariacional e incluyó 4 sesiones de laboratorio en donde se utilizaron calculadoras graficadoras y sensores sónicos de movimiento. Para determinar la evolución de las interpretaciones de los estudiantes, se utilizó un cuestionario que incluyó cinco situaciones que incluyeron gráficas en donde se plantearon preguntas en relación a la velocidad, por medio de la comparación de la magnitud de velocidades, la estimación de velocidades, el discernimiento de la velocidad inicial mayor y el orden temporal de los movimientos. También se cuestionó en torno a la posibilidad de que dos gráficas de coordenadas distintas pudieran representar al mismo movimiento. Los resultados mostraron progreso en las interpretaciones de los estudiantes.

Palabras clave: *tecnología, gráficas, movimiento rectilíneo*

Introducción

Entre las principales causas de la deserción escolar en educación media superior se encuentra la baja preparación de los estudiantes en matemáticas, consecuencia de una enseñanza basada en prácticas memorísticas y algorítmicas, carentes de significado para los discentes. En el presente estudio nos dimos a la tarea de investigar la incidencia del curso de Cálculo en dos grupos de estudiantes de bachillerato tecnológico en torno a sus interpretaciones de las representaciones gráficas del movimiento rectilíneo, curso que se impartió con un enfoque variacional (Cantoral, 1999) y covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, Hsu, 2002) e incluyó sesiones de laboratorio en donde se utilizaron calculadoras graficadoras y sensores sónicos de movimiento para la realización de algunos experimentos de cinemática. El análisis cuantitativo de los resultados obtenidos de la aplicación de un instrumento diseñado por Dolores, Alarcón y Albarrán (2002), antes y después de trabajar tres secuencias didácticas diseñadas ex profeso, nos indican que las interpretaciones que hacen los estudiantes de las gráficas cartesianas mejoraron, evidenciando un progreso superior incluso al mostrado por profesores de educación media superior que trabajaron con el mismo instrumento, de acuerdo a lo reportado en ídem.

Referentes Teóricos

Sobre el Razonamiento Covariacional. Entendemos por razonamiento covariacional a las actividades cognitivas involucradas en la coordinación de dos cantidades variantes en tanto se atiende a las formas en las que ellas cambian entre sí (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, Hsu, 2002). Las acciones mentales de este marco teórico proporcionan un medio para clasificar las conductas que son exhibidas a medida que los estudiantes se involucran en tareas covariacionales.

Tabla 1

Acciones Mentales del Marco Teórico Covariacional

Acción Mental	Descripción de la Acción Mental	Acción Conductas
Acción Mental 1 (MA1)	Coordinación del valor de una variable con los cambios de la otra.	Etiquetamiento de los ejes con indicaciones verbales de la coordinación de las dos variables (por ejemplo, “y cambia con los cambios de x ”).
Acción Mental 2 (MA2)	Coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de una conciencia de la dirección del cambio de la salida cuando se consideran los cambios en la entrada.
Acción Mental 3 (MA3)	Coordinación de la cantidad del cambio de una variable con los cambios en la otra variable.	Verbalización de la conciencia de la cantidad de cambio de la salida al tiempo que se consideran los cambios en la entrada.
Acción Mental 4 (MA4)	Coordinación de la razón de cambio promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.	Verbalización de la conciencia de la razón de cambio promedio de la salida (con respecto a la entrada) al considerar incrementos uniformes en la variable de entrada.
Acción Mental 5 (MA5)	Coordinación de la razón de cambio instantánea de la función con cambios continuos en la variable independiente para el dominio completo de la función.	Verbalización de una conciencia de los cambios instantáneos en la razón de cambio para el dominio completo de la función (la dirección de las concavidades y los puntos de inflexión son correctos).

En torno a la corporización del conocimiento matemático. Para Tall (2002), corporizar se refiere a construir conocimiento fundamentalmente sobre la percepción sensorial, en oposición a la operación simbólica y a la deducción lógica. Una aproximación corporizada del Cálculo, se centra en las ideas perceptuales, previo a la introducción del simbolismo. Este investigador categoriza los modos de representación en tres formas distintas de operación:

- Corporizado: basado en las percepciones humanas y en acciones, en un contexto del mundo real incluyendo, pero no limitado, a aspectos visuales y representacionales.
- Simbólico-Proceptual: combinación del rol de los símbolos en aritmética, álgebra y cálculo simbólico, basado en la teoría de que estos símbolos actúan dualmente como proceso y como concepto (procepto).
- Formal-Axiomático: un acercamiento formal que comienza a partir de axiomas y hace deducciones lógicas para probar teoremas.

El mundo corporizado es el modo humano fundamental de operación basado en la percepción y en la acción. El mundo simbólico-proceptual es un mundo de procesamiento simbólico matemático, y el mundo formal-axiomático implica el cambio adicional al interior del formalismo que ha probado ser tan difícil para muchos de nuestros estudiantes.

Las tecnologías digitales en el aprendizaje de la matemática. Las tecnologías electrónicas, la calculadora y la computadora, son herramientas esenciales para la enseñanza y el aprendizaje de

las matemáticas y el quehacer matemático. Proveen imágenes visuales de las ideas matemáticas, facilitan la organización y el análisis de datos, y calculan con eficiencia y exactitud... Cuando las tecnologías electrónicas están disponibles, los estudiantes se pueden enfocar en la toma de decisiones, en la reflexión, el razonamiento, y en la solución de problemas (N.C.T.M., 2010). Con relación a las herramientas computacionales, Balacheff y Kaput (1996), han señalado que su mayor impacto es de carácter epistemológico, refiriéndose con ello al hecho que las herramientas computacionales han generado un nuevo realismo matemático. En efecto, los objetos virtuales que aparecen sobre la pantalla se pueden manipular de tal forma que se genera una sensación de existencia casi material (Moreno, 2002).

Elementos Metodológicos

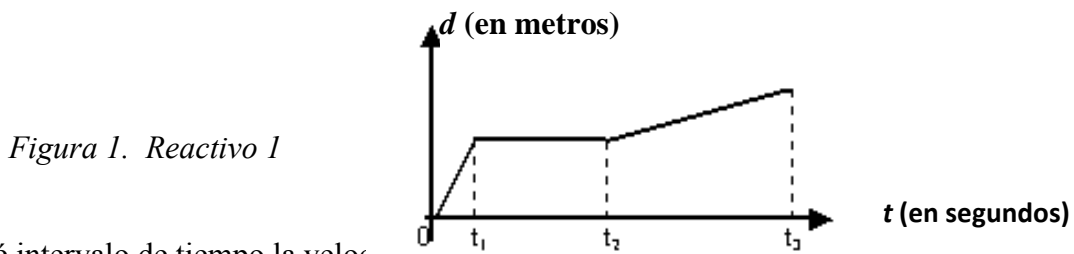
La presente investigación corresponde a un estudio cuantitativo pre-post, (Hernández, Fernández y Baptista, 1997). El curso de Cálculo arrancó en febrero de 2010 y concluyó en junio del mismo año, trabajándose con una carga semanal de 4 horas con dos grupos de bachillerato tecnológico que en total sumaron 58 estudiantes, con edades entre 16 y 18 años, quienes fueron atendidos por una de las investigadoras. El trabajo se organizó en torno a 3 secuencias didácticas, diseñadas con un enfoque variacional (Cantoral, 1999; Dolores, 2000; Dolores, 1999) y covariacional (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen, Hsu, 2002) y en ellas se incorporaron 4 prácticas de laboratorio, cada una de 2 horas, elaboradas ex profeso, mismas que incluyeron el uso de calculadoras graficadoras TI-84 y sensores sónicos de movimiento CBR2. El curso de Geometría Analítica que esta misma población había cursado previamente, también se había impartido con el mismo enfoque así como también con el uso de herramientas digitales. En las dos primeras prácticas de laboratorio los estudiantes, trabajando en equipo, realizaron, a partir de enunciados verbales, recorridos a velocidad constante, registraron las distancias recorridas y los tiempos invertidos, obtuvieron las gráficas posición vs. tiempo, y velocidad vs. tiempo correspondientes, contestaron cuestionarios en donde se les pidió identificar las variables presentes, variable dependiente, variable independiente, dominio y rango de la función, así como expresiones algebraicas que se ajustaran a los datos colectados. El objetivo en ellas fue destacar la relación de covariación entre la posición del móvil y el tiempo y evidenciar el significado físico de la pendiente de la recta y de la ordenada al origen para caracterizar a la función lineal en términos de su posición y su comportamiento. En las otras dos prácticas los alumnos, bajo el mismo esquema de trabajo, realizaron recorridos con velocidades variables. En ellas, la atención de los estudiantes se enfocó en el comportamiento gráfico de los datos posición vs. tiempo, velocidad vs. tiempo y rapidez vs. tiempo y en la relación entre estas gráficas. Al término de la última práctica se les pidió que bosquejaran gráficas posición vs. tiempo correspondientes a movimientos con: velocidad positiva, velocidad negativa, rapidez creciente, rapidez decreciente, velocidad positiva y rapidez creciente, velocidad positiva y rapidez decreciente, velocidad negativa y rapidez creciente, velocidad negativa y rapidez decreciente, cambio de velocidad positiva a velocidad negativa, cambio de velocidad negativa a velocidad positiva. Todas las actividades se cerraron con una discusión grupal coordinada por el profesor; todo lo anterior supuso un tránsito constante entre la representación verbal, gráfica, numérica, simbólica y el experimento.

Instrumento diagnóstico. Fue aplicado antes y después de poner en escena las secuencias didácticas del curso de Cálculo. Este instrumento fue tomado de (Dolores, Alarcón, Albarrán, 2002) y consistió de una colección de 5 reactivos. Cuatro de las situaciones planteadas en el cuestionario y sus respectivas preguntas exploraron las interpretaciones de los estudiantes acerca de la velocidad por medio de la comparación de la magnitud de velocidades, la estimación de velocidades, el discernimiento de la velocidad inicial mayor y el orden temporal de los

movimientos. La otra exploró la posibilidad de que dos gráficas de coordenadas distintas pudieran representar al mismo movimiento.

Análisis de las respuestas

1.- La Figura 1 muestra la distancia que recorre Juan Manuel respecto del tiempo en un intervalo de 0 a t_3 . Selecciona con una X al paréntesis correspondiente a la respuesta que creas contesta correctamente a esta pregunta.



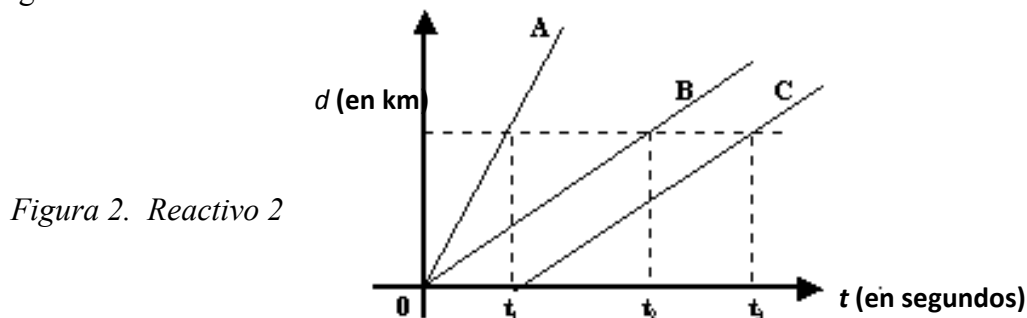
¿En qué intervalo de tiempo la velocidad...
 () entre $t=0$ y t_1 () entre t_2 y t_3 () entre t_1 y t_2 () en t_3

No. React.	PRETEST					POSTEST				
	OPCIONES					OPCIONES				
1	$0 \leq t \leq t_1$	$t_2 \leq t \leq t_3$	$t_1 \leq t \leq t_2$	$t = t_3$	No contestó	$0 \leq t \leq t_1$	$t_2 \leq t \leq t_3$	$t_1 \leq t \leq t_2$	$t = t_3$	No contestó
	36	18	0	4	0	31	21	2	3	1

Tabla 2. Respuestas del reactivo 1

En ésta y en el resto de las tablas, con gris se identifica la respuesta correcta; en negro la respuesta más numerosa que corresponde con lo que Confrey (1990) denomina *concepción alternativa*; para este autor una concepción alternativa describe un conocimiento que difiere de aquél que se propone para ser aprendido. En este caso, de acuerdo a las respuestas obtenidas pareciera que para los estudiantes la velocidad mayor corresponde al tramo en donde la ordenada (en este caso, posición) es mayor. Esta interpretación resultó ser muy difícil de cambiar y coincide con lo encontrado por Dolores, Alarcón y Albarrán (2002).

2. En la Figura No. 2 se muestra la gráfica de las distancias respecto del tiempo de tres autos A, B y C respectivamente. Debajo de la gráfica hay cinco afirmaciones. Escribe en el paréntesis que está enseguida de cada una de ellas una V si la afirmación es verdadera o una F si es falsa.



- a) La velocidad del auto A en t_1 es menor que la del auto B en ese mismo instante.....()
- b) La velocidad del auto B es igual que la velocidad del auto C en t_2()
- c) El auto B es el que arrancó con mayor velocidad.....()
- d) La velocidad del auto A en t_1 es mayor que la del auto B en el mismo instante.....()
- e) La velocidad del auto A en t_1 con la del auto B en t_2 es la misma.....()

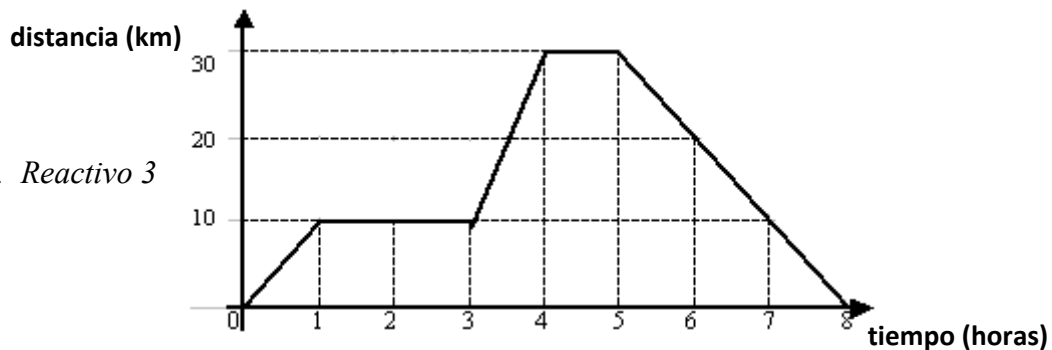
No. React.	PRETEST											POSTEST										
	OPCIONES																					
2	a		b		c		d		e		No contestó	a		B		c		D		e		No contestó
	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	0	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	0
	49	9	11	47	48	10	9	49	27	21	0	49	9	8	50	49	9	7	41	47	21	0

Tabla 3. Respuestas Reactivo 2

En este caso observamos que en todas las respuestas hubo progreso, excepto en la respuesta del inciso **d**. Para contestar correctamente esta pregunta, el estudiante tendría que haber asociado la velocidad con la pendiente de la recta. Sin embargo, detrás de las respuestas de los estudiantes pareciera encontrarse nuevamente la concepción alternativa (Dolores, Alarcón y Albarrán, 2002) consistente en asociar la velocidad de un móvil con la ordenada en un punto dado (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990).

3. La Figura 3 es una gráfica distancia-tiempo de un auto que se encuentra moviéndose en trayectoria rectilínea. Indica la velocidad que el auto tiene en los intervalos de tiempo que abajo se indican.

Figura 3. Reactivo 3



- a) Entre $t = 0$ y $t = 1$; $V =$ _____
- b) Entre $t = 1$ y $t = 3$; $V =$ _____
- c) Entre $t = 3$ y $t = 4$; $V =$ _____
- d) Entre $t = 5$ y $t = 8$; $V =$ _____

No. React.	PRETEST														POSTEST																					
	OPCIONES																																			
3	V	-	10	0	1	2	3	3	5	5.7	1	1	2	3	4	8	N	V	-	30	-	100	1	2	3	3	5	5.7	1	1	2	3	4	8	N	
	E	30	-	100	1	2	3	3	5	5.7	0	5	0	0	0	0	C	E	-	30	-	100	1	2	3	3	5	5.7	0	5	0	0	0	0	C	
	L																	L																		
	A			2														17	a			2													8	
	B			1			4	5										19	b			2														12
C			2			4											18	c			2	1				3	3								13	
D	8	13			1	5											21	d	13	10	1	1				3										16

Tabla 4. Respuestas Reactivo 3

En las respuestas de los estudiantes a esta pregunta, nuevamente destaca la concepción alternativa consistente en calcular la velocidad a partir de la ordenada (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Dolores, Alarcón y Albarrán, 2002) ($v=10$ para $1 < t < 3$ y $v=-30$ para $5 < t < 8$).

4. ¿Podrían las dos gráficas siguientes corresponder al mismo movimiento?



() Si

() No

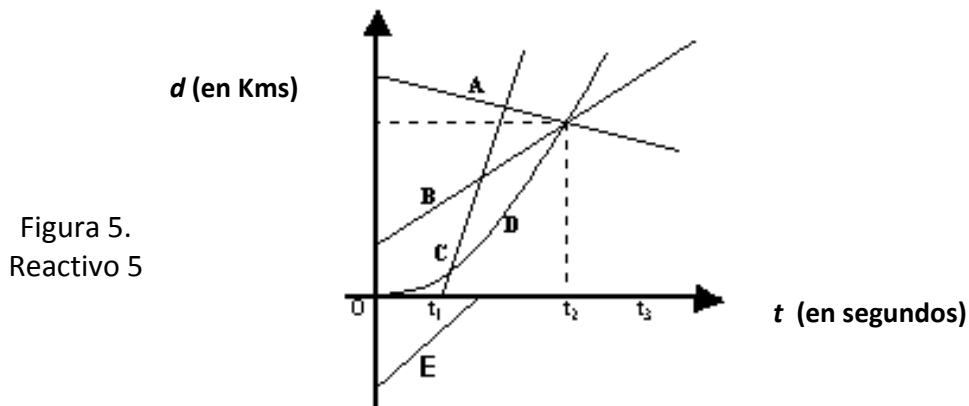
() No se puede saber

No. React.	PRETEST						POSTEST					
	OPCIONES											
4	SI	19	NO	37	No contestó	2	SI	28	NO	25	No contestó	5

Tabla 5. Respuestas Reactivo 4

Si bien las respuestas obtenidas en el postest en este reactivo muestran progreso en las interpretaciones de los estudiantes, es notoria la dificultad que éstos tuvieron para aceptar que dos distintos gráficos cartesianos se relacionan con el mismo fenómeno físico. Pareciera que, al examinar las dos gráficas, una considerable proporción de los estudiantes no logran distinguir las variables presentes en cada gráfico; para estos jóvenes el trabajo de corporización realizado durante el curso, para relacionar la pendiente de una gráfica $s(t)$ vs. t con velocidad constante y el valor de esta velocidad, necesita revisarse.

5.- Observa la gráfica distancia-tiempo del movimiento de 5 autos A, B, C, D y E, y contesta las siguientes preguntas escribiendo una X en el paréntesis de la respuesta correcta. (Sólo deberás marcar una opción para cada pregunta).



a) ¿Cuál de los autos no viaja con velocidad constante?

A () B () C () D () E ()

b) ¿Cuál de los autos arrancó al último?

A () B () C () D () E ()

c) ¿Cuál de los autos arrancó con mayor velocidad?

A () B () C () D () E ()

- d) ¿Cuál de los autos se mueve con velocidad negativa?
 A () B () C () D () E ()
- e) ¿Cuál de los autos se mueve con menor rapidez?
 A () B () C () D () E ()
- f) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta para el instante t_2 ? Marca con una X una sola opción.
- I. () Los autos B, C, D y A llevan la misma velocidad
- II. () La velocidad del auto D es mayor que la velocidad del auto B y que la velocidad del auto A
- III. () La velocidad del auto D es menor que la velocidad del auto B y que la velocidad del auto A
- IV. () La velocidad del auto B es mayor que la velocidad del auto D y que la velocidad del auto A

No. React.	PRETEST						POSTEST							
	OPCIONES						OPCIONES							
	A	B	C	D	E	No contestó		A	B	C	D	E	No contestó	
5	a	4	0	2	43	7	2	a	1	2	1	48	5	1
	b	3	0	26	4	21	2	b	6	4	27	3	18	0
	c	7	25	25	1	0	0	c	6	17	32	1	0	2
	d	32	0	0	3	21	2	d	33	2	0	1	21	1
	e	10	11	13	7	13	4	e	16	17	12	6	6	1
	f	I	II	III	IV	No contestó		f	I	II	III	IV	No contestó	
	11	17	7	18	5		7	15	7	27	2			

Tabla 6. Respuestas Reactivo 5

En las respuestas obtenidas en este reactivo, destaca el hecho de que en el postest, para un porcentaje considerable de los estudiantes, 37.5%, la gráfica negativa corresponde al auto que arranca último; que el auto que arranca con mayor velocidad es aquel cuya gráfica comienza en el punto con la ordenada más alta (29%); que el auto con velocidad negativa es aquel cuya gráfica es negativa (36%); que los autos que arrancan con menor rapidez son aquellos cuya gráfica comienza en un punto cuya ordenada es igual a cero (21%). Así mismo, consideraron que el auto que tiene la velocidad mayor es aquel cuya gráfica creciente comienza en un punto con una ordenada mayor que los demás. No obstante lo anterior, en todas las preguntas los resultados mejoraron en el postest, a excepción de la pregunta 5f. Entre toda esta variedad de resultados, al igual que en las respuestas de los reactivos 1, 2 y 3, identificamos que en las interpretaciones que una parte importante de los estudiantes hacen de las gráficas, está presente la relación que establecen entre la velocidad (pendiente) y la posición (ordenada) en coincidencia con lo reportado por Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) y por Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990).

Conclusiones.

Entre las interpretaciones más resistentes al cambio y que con mayor claridad se identificaron se encuentran aquellas en donde el estudiante vincula la velocidad de un móvil en un punto con la ordenada en ese punto (posición); la otra, dos gráficas diferentes, $s(t)$ vs. t y $v(t)$ vs. t , no pueden representar el mismo movimiento. En su conjunto, los resultados nos muestran que las interpretaciones de los estudiantes mejoraron aunque nos resulta conveniente revisar nuestra metodología a fin de atender con especial cuidado los aspectos de la misma relacionados con las interpretaciones erróneas. No obstante, nos parece que esta aproximación variacional a la lectura

de gráficas del movimiento rectilíneo, en combinación con el uso de tecnologías digitales para la corporización del conocimiento matemático a partir de las cuales los alumnos tienen una aproximación a las gráficas cartesianas en donde incluso su propio cuerpo participa en la generación de las mismas, y en donde además pueden transitar rápidamente entre los diferentes registros de representación, en un ambiente de trabajo colaborativo que promueve la comunicación y la discusión entre pares, contribuye a la mejora de la interpretación de estas representaciones. Por último, es oportuno mencionar que, en el estudio exploratorio que realizaron Dolores, Alarcón y Albarrán (2002) usando el mismo instrumento de evaluación aplicado en esta investigación, pero con poblaciones de estudiantes de preparatoria, estudiantes de licenciatura en matemáticas, y dos diferentes poblaciones de profesores de física de nivel preparatoria, obtuvieron resultados promedios inferiores a los resultados obtenidos en el postest por nuestros estudiantes de bachillerato tecnológico. Esto nos lleva a pensar en la conveniencia de incorporar a las currículas escolares el estudio de las gráficas del movimiento rectilíneo con una aproximación variacional que incluya actividades que contribuyan a la corporización del conocimiento matemático relativo al tema, a través del uso de las tecnologías digitales.

Referencias Bibliográficas

- Balacheff, N. y Kaput, J.J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. y Laborde, C. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 469-501).
- Cantoral, R. (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea en *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 12, tomo 1
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe E., Larsen, S., Hsu, E. (2002). Applying Covariational Reasoning while modeling dynamic events: a framework and a study, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 33, No. 5, pp. 352-378
- Confrey J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science and programming. *Review of research in Education*. Vol. 16. pp. 3-56
- Dolores, C., Alarcón, G., Albarrán, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento. El caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (RELIME)*. Thompson Editores/CLAME. Vol. 5, Núm. 3, pp. 225-250.
- Dolores, C. (2000). La Matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Academia*; Vol. 2 No.20, Universidad Autónoma de Sinaloa
- Dolores C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. Grupo Editorial Iberoamérica. México D. F.
- Hernández, S., Fernández, C., Baptista, P. (1997). Metodología de la investigación. México: Mc Graw-Hill.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Stein M.K. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research* Vol. 60. Pp. 1-64 NCTM (2004).
- Moreno, L. (2002). Instrumentos matemáticos computacionales. En: Ministerio de Educación de Colombia, Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el aula de matemáticas. República de Colombia.
- N.C.T.M. (2010). *Assessment Standards for School Mathematics*. Disponible en <http://standars.nctm.org/document/index.htm>
- Tall, D. (2002). Using Technology to Support an Embodied Approach to Learning Concepts in Mathematics. in L. M. Carvalho and L. C. Guimarães, *Historia e Tecnologia no Ensino da Matemática*, Vol. 1, pp. 1 – 28, Rio de Janeiro, Brasil.