

SEMINARIO DE LA MATEMÁTICA EDUCATIVA AL AULA

Maribel Vicario Mejía, Catalina Navarro Sandoval, Elika Sugey Maldonado Mejía y Antonio Zavaleta Bautista

Universidad Autónoma de Guerrero

mvicario_maribel@hotmail.com, nasacamx@yahoo.com.mx, elika.mm@hotmail.com,
a_zavaletab@hotmail.com

Resumen

Partimos de que la matemática educativa se encarga de caracterizar y localizar los fenómenos didácticos que se suceden en el aula y en ese sentido se pretende afectar de manera positiva al sistema educativo, por tanto en este espacio, compartimos resultados de investigaciones que han centrado su interés en tres fenómenos específicos, proponiendo alternativas que impactan directamente en el aula y otro más que permitiría medir los resultados del trabajo en el aula, que toma como base al currículo oficial.

Palabras Clave: *Secuencias Didácticas, límites, transición grados-radianes, evaluación y aula.*

Introducción

La Matemática Educativa como disciplina científica aparece debido a que durante muchos años los métodos de enseñanza y el diseño de las estructuras curriculares estuvieron inspirados por las experiencias en el salón de clases y por las concepciones que, sobre matemáticas poseían los educadores (Moreno, 1996). La concepción que primaba era la de mirar a la matemática como un objeto cultural inmodificable que debía ser transmitido al estudiante mediante un proceso de enseñanza, es así que el papel del profesor y de quienes elaboraban los planes de estudio era el de encontrar estrategias que permitiera a los estudiantes asimilar tales conocimientos. Esta práctica llevó a reflexionar sobre el papel de la enseñanza, que involucra directamente al profesor y el alumno así como la matemática misma, permitiendo a la enseñanza de la matemática, como práctica derivada del conocimiento matemático, mirar la estructura, funcionamiento e interrelaciones de este proceso y del aprendizaje de la matemática, o más específicamente las interrelaciones que se generan entorno a estas.

Es así como la Matemática Educativa tiene su origen en la necesidad de caracterizar con el mayor grado de rigor, tanto la actividad práctica como teórica que aparece vinculada a los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática. En otras palabras la disciplina se encarga del estudio de fenómenos didácticos en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. De ahí que al identificar ciertos fenómenos en dicho proceso es que proponemos plantear en este seminario tres propuestas que inciden en el nivel medio superior.

Se plantean dos secuencias didácticas diseñadas desde la Teoría de Situaciones Didácticas y una propuesta de evaluación del aprendizaje del concepto de límite que toma como base la experiencia del proyecto: Evaluación del currículum matemático escolar aprendido. La primera secuencia atiende a una de las dificultades que gira en torno del concepto de *límite*, específicamente, a la exigua comprensión de éste, ocasionada algunas veces por la forma en que es presentada su definición y los ejemplos usados para ilustrar dicho concepto; la segunda secuencia, parte del problema que enfrentan los estudiantes cuando tratan la transición de grados a radianes para abordar las funciones trigonométricas. La propuesta de evaluación atiende parte

de la problemática generalizada en nuestro país y en particular en el estado de Guerrero, sobre la ausencia de un sistema de evaluación en el Nivel Medio Superior y la implementación de un nuevo currículo oficial sin la previa evaluación de los resultados del que se reemplazará.

La Matemática Educativa en el aula

Compartimos resultados de investigaciones en los que se proponen alternativas que impactan directamente en el aula y otro más que permitiría medir los resultados del trabajo en el aula, pues sabemos que la matemática educativa se encarga de caracterizar y localizar los fenómenos didácticos que se suceden en el aula y en ese sentido se pretende afectar de manera positiva al sistema educativo.

Las dos propuestas didácticas se diseñan con base en la Teoría de Situaciones Didácticas (TDS), pues ésta permite conectar los conocimientos matemáticos con una situación problema²⁶, surgiendo el conocimiento matemático como la solución de dicha situación. En esta teoría Brousseau (1986) plantea que el alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de obstáculos y desequilibrios, de tal manera que cuando el alumno logra superar dicho obstáculo es cuando se apropia del conocimiento en juego, y es el profesor quien debe de facilitar el medio para lograrlo. Brousseau pretende que las secuencias didácticas²⁷ con los objetos de enseñanza específicos provoque en el alumno una génesis artificial de los conceptos.

En la TSD intervienen tres elementos: estudiante, profesor y el medio didáctico, y la situación didáctica comprende el proceso en el cual el docente proporciona el medio didáctico para que el estudiante construya su conocimiento, englobando las situaciones a-didácticas (Chavarría, 2006). Las situaciones a-didácticas se definen como el proceso en el que, una vez que el estudiante ha construido el conocimiento, éste se le plantea en otro contexto, el cual debe afrontar y resolver sin la intervención del profesor, es decir, el alumno ya es capaz de utilizar un conocimiento en distintos contextos; por lo que la situación a-didáctica puede verse como una validación del proceso enseñanza-aprendizaje.

Las situaciones a-didácticas, pueden definirse como las interacciones del alumno con el medio, entendido éste como una génesis artificial del conocimiento matemático (Montiel, 2002). Los tres tipos de situaciones a-didácticas como:

Situación de Acción: Es cuando el alumno se enfrenta al problema y trata de buscar solución a éste sin la intervención del maestro. El problema que se le plantea debe de despertar el interés en el alumno, el tipo de pregunta debe de estar bien formulada, de tal manera que provoque en él algún esfuerzo para resolverla.

Situación de Formulación: El alumno comunica las formulaciones resultado de las acciones realizadas sobre el medio de tal manera que se enfrente con las formulaciones de sus demás compañeros.

²⁶ Entendida como una estrategia para el aprendizaje en la que se propone al alumno un enigma que podrá descifrar al confrontar sus conocimientos e ideas previas sobre el problema con diversas fuentes para construir una respuesta o solución.

²⁷ Se entiende como una secuencia de actividades ordenadas y estructuradas con grados crecientes de dificultad para la consecución de ciertos objetivos.

Situación de Validación: Es donde el alumno después de haber comunicado sus formulaciones demuestra la pertinencia de ellas y se discute con el profesor sobre el trabajo realizado para verificar si es correcto.

Es así como se consideran algunos elementos de esta teoría y se asume la forma en cómo se construye el conocimiento.

La Ingeniería Didáctica fue la metodología de investigación. Ésta designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo, de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje, de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis *a priori*, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase (Douady, 1996, citado en De Faria, 2006).

Propuesta para el tratamiento de los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$

González y Navarro (2010) identifican y reflexionan sobre una de las grandes dificultades en torno del concepto de *límite* en el nivel medio superior, dada la exigua comprensión del concepto, ocasionada algunas veces por la forma en que es presentada la definición y los ejemplos usados para ilustrar dicho concepto; así pues, se les enseña a los alumnos el algoritmo para calcular los *límites* de funciones algebraicas, a través de la sustitución, mismos que aprenden de memoria. Sin embargo, existen casos en los que es dejado de lado el cálculo de límites de funciones trigonométricas, pues generalmente el punto de partida son el trabajo con funciones constantes, le siguen las polinomiales, racionales, algebraicas y por último abordan las trigonométricas, en consecuencia, cuando llega el momento de abordar éstas, ya no hay tiempo suficiente para desarrollar el tema como se debiera, o no se aborda, situaciones por las que a veces, el profesor suele “dar” el resultado de los límites sin explicar o justificar el porqué de esos valores, lo que incluye también a los denominados *límites especiales* $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$.

Es así que se plantean responder la siguiente pregunta ¿El uso de recursos tales como: la representación gráfica de funciones algebraicas y trigonométricas, el análisis gráfico de éstas y el uso de tablas numéricas que se aproximen a los valores que tiende x , coadyuva a que el estudiante de nivel medio superior visualice y deduzca los resultados de los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$?, teniendo como objetivo el diseño de actividades para que los estudiantes visualicen y deduzcan los límites mencionados o límites especiales.

Por tanto, esta secuencia didáctica involucra la resolución de los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x}$, y está conformada de una actividad preliminar y tres actividades posteriores.

- La **actividad preliminar** tiene como fin conocer las concepciones de los participantes sobre los conceptos, función, límite y de límite de una función, y mirar la forma en que calculan los límites de funciones, centrandose principalmente nuestro interés en los límites especiales.
- La **actividad uno**, tiene dos bloques. El objetivo de ésta, es que los estudiantes puedan determinar el límite de funciones tanto algebraicamente como gráficamente en algunas representaciones dadas. En el primer bloque de actividades está compuesto de nueve incisos, donde se involucran límites de funciones lineales, cuadráticas y cúbicas (x , x^2 y x^3), el segundo comprende cuatro incisos donde se trabajan transformaciones y operaciones gráficas básicas entre las funciones mencionadas, en particular la suma y el cociente de funciones.
- El objetivo de la **actividad dos** es que los estudiantes, calculen límites de funciones trigonométricas, en particular $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$. Dicha actividad se dividió en dos bloques, en el primero se presentan algunas gráficas, sobre las cuales se pide observar y argumentar los límites pedidos, además de utilizar como herramienta a la visualización. En el segundo bloque se presentan funciones trigonométricas, pero ahora con transformaciones que implican operaciones básicas como la suma, resta y multiplicación, de éstas se debe identificar o representar el límite pedido en cada uno de los cuatro incisos.
- En la **tercera actividad** se pide específicamente calcular los límites $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \text{cos}(x)}{x}$, con el objetivo de que calculen e identifiquen dichos límites, con recursos que habían utilizado previamente, además, se facilita una tabla en donde aparecen valores aproximados al que tiende x , como una herramienta adicional.

Propuesta para aborda el proceso de transición grados-radianes.

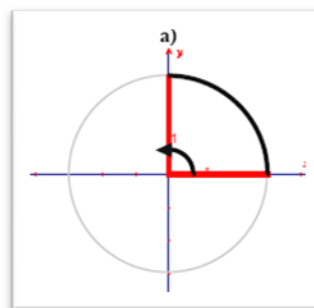
En el sistema escolar para el estudio de las funciones trigonométricas, se tienen ciertas dificultades en los conceptos involucrados para dicho estudio. Uno de ellos son las medidas angulares, por ejemplo, para que la función trigonométrica adquiera sentido en el campo de los reales, se hace necesaria la transición de las unidades de medida angulares en grados a radianes, para que a partir de estos últimos se tenga una función real de variable real. Aunque dicha transición para el estudiante es ambiguo dado que tratan indistintamente a la función trigonométrica de la razón trigonométrica (Maldonado, 2005).

De ahí que Santana (2008) se propuso favorecer, a través de una secuencia didáctica, el proceso de transición de grados a radianes que deben hacer los estudiantes dada su importancia para el estudio de las funciones trigonométricas. Es decir, con la secuencia didáctica se pretende que los estudiantes logren el dominio de ambas medidas angulares de tal manera que al enfrentarse a situaciones relacionadas con las medidas angulares grados \rightarrow radianes, por ejemplo en las funciones trigonométricas, puedan utilizar la unidad de medida apropiadamente. Las actividades se diseñaron considerando las situaciones a-didácticas: la situación de acción, de validación y la de formulación, de modo que la secuencia quedó organizada en tres bloques.

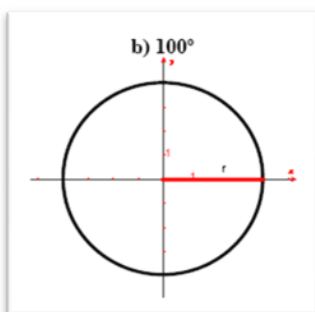
En el **Bloque I**: Se presentan las actividades de acción para introducir al estudiante en el trabajo con las medidas angulares y recuerden algunos conceptos como el perímetro de una circunferencia, el arco de una circunferencia y el cálculo de una razón.

- Las actividades I y II. Se hace referencia a los ángulos y su unidad de medida así como de su sentido, con la intención de que el estudiante observe que el ángulo que se pide abarca cierta parte de la circunferencia obteniendo a partir de ello el valor del ángulo.

Por ejemplo, se sabe que toda la circunferencia mide 360° y observando la figura se mira que el ángulo que se pide abarca una cuarta parte de la circunferencia por lo que es posible resolver como $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.

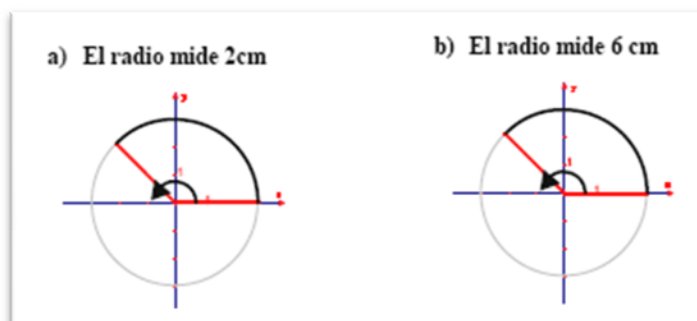


Otro ejemplo de las actividades, se pide que se representen los ángulos que se piden:



Al resolver este ejercicio se espera que el estudiante pueda estimar cualquier ángulo basándose en la actividad anterior.

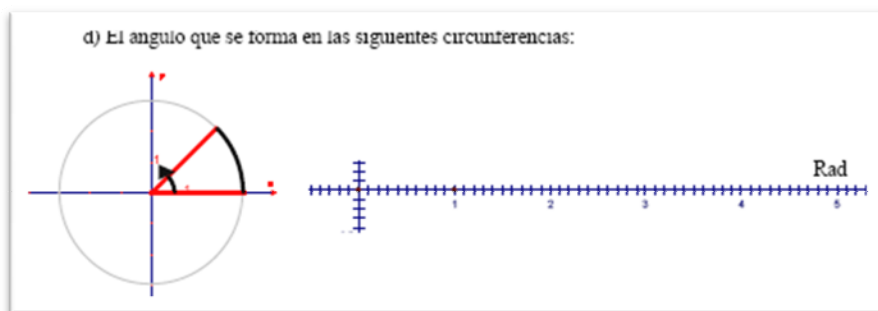
- En la actividad III. Se pide que estimen el perímetro coloreado de una circunferencia, con el propósito de que relacionen las partes del perímetro que se les pide con los ángulos de la primera actividad.
- En la actividad IV. Los estudiantes deben calcular la razón que hay entre el arco formado por un ángulo y el radio, con la intención de que observen que dicha razón se conserva para el mismo ángulo independientemente del valor del radio. Por ejemplo



Bloque II: Con este bloque se presentan las actividades de formulación, con el propósito de que el alumno identifique la relación que existe entre la unidad de medida angular en grados y en radianes.

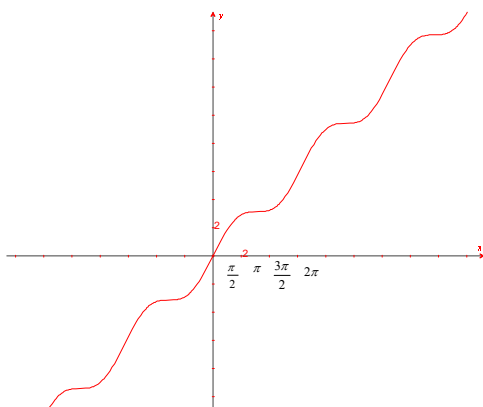
- En la actividad I. Se les pide que calculen razón del perímetro de la circunferencia entre el radio, pretendiendo que los estudiantes relacionen esta medida con la medida en grados de toda la circunferencia.

- La actividad II. Se pide que estimen el número de veces que entra el radio en el perímetro de la circunferencia para que se den cuenta que el número de veces que entra el radio en la circunferencia es π veces o en otras palabras π radianes.
- La actividad III. El estudiante representará un ángulo para el cual el arco que se forma sea igual al radio, con el objetivo de que encuentren el ángulo equivalente a un radián.
- Con la actividad IV y V se espera que los estudiantes logren establecer la relación entre grados y radianes, planteándoles lo siguiente ¿cuántos radianes tiene una circunferencia? Exprésalo en términos de π . Y expresa en términos de grados el ángulo π de la actividad III. También se pide que representen ciertas cantidades sobre el eje x , por ejemplo.



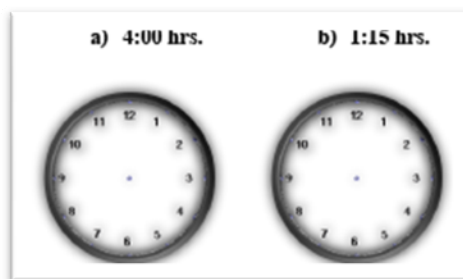
Bloque III: Aquí se presentan las actividades de validación con el objetivo de que el estudiante, de manera sistémica relacionen la medida angular en grados y su equivalencia en radianes.

- En la actividad I. Se pide que llenen los datos que hacen falta en la tabla, para lo cual tienen que transitar entre los grados y los radianes. Se dice: considera la función $y = \sin(x)$ y con ayuda de la gráfica, encuentra los valores que faltan en la tabla siguiente, de la cual solo mostramos algunos valores como ejemplo.



Valor de x en grados	Valor de x en radianes	Valor de y
	1 rad	
1°		
	$\frac{\pi}{180}$	

- La segunda actividad. Se pide que expresen en radianes la magnitud del ángulo que forman las agujas del reloj cuando marcan las horas que se especifican:



Tienen que representar el ángulo que forman las manecillas del reloj cuando marcan las horas que se muestran y posteriormente expresar dicho ángulo en términos de radianes.

Propuesta para evaluar los dominios cognitivos del concepto del límite

Para esta propuesta se toma como base el trabajo de investigación de Zavaleta (2008) titulado: evaluación del currículum matemático escolar aprendido, este proyecto atiende parte de la problemática generalizada en nuestro país y en particular en el estado de Guerrero, la ausencia de un sistema de evaluación en el Nivel Medio Superior y la implementación de un nuevo currículum oficial sin la previa evaluación de los resultados del que se reemplazará.

El objetivo planteado fue evaluar el currículum matemático escolar aprendido del Nivel Medio Superior de la Universidad Autónoma de Guerrero, entendiendo al currículum matemático escolar aprendido como lo que realmente consiguen aprender los estudiantes, de lo que dice el currículum oficial debieran aprender.

Para alcanzar este objetivo se realizaron las siguientes tareas: 1) Estudio teórico acerca de los sistemas de evaluación existentes y adopción de un marco teórico, 2) Análisis del Currículum oficial vigente, 3) Diseño de los instrumentos de evaluación, 3) Selección de la muestra de las Unidades Académicas y de los estudiantes a quienes se les aplicaron los instrumentos de evaluación. 4) Aplicación de los instrumentos de evaluación. 5) Recolección y análisis de los resultados.

En este trabajo, al currículum se le considera de tres tipos: el Oficial, este es el que se encuentra plasmado en los documentos oficiales en los planes y programas de estudios; el Potencial se refiere a los libros de textos y materiales que el profesor elabora; impartido se refiere al que el profesor realmente imparte en el aula; y el aprendido es lo que el estudiante realmente aprende.

La evaluación se entenderá como la medición entre lo que se planeó y lo que se alcanzó aprender, es decir una medición entre el currículum oficial y el aprendido. Para la evaluación se consideraron cuatro dominios cognitivos: conocimiento de hechos y procedimientos, utilización de conceptos, resolución de problemas habituales y razonamiento

De los resultados respecto del currículum oficial analizado se deja ver que éste privilegia desarrollar los dominios cognitivos elementales (Conocimiento de hechos y procedimientos), respecto de la evaluación se aprecia que la mayoría de los estudiantes sólo identifican el conocimiento matemático que se evaluó, realización de algoritmos y procedimientos elementales. En la mayoría de los estudiantes no se desarrolla la capacidad para resolver problemas habituales y no habituales; así como la capacidad del razonamiento matemático.

Sobre la base de este trabajo se llevarán propuestas de actividades que evalúen los dominios cognitivos del concepto de límite de una función de variable real, considerados en la investigación: conocimiento de hechos y procedimientos, utilización de conceptos, resolución de problemas habituales y razonamiento. La pretensión final será llegar a un consenso de actividades que se puedan utilizar en el aula para evaluar de manera integral este concepto, esto nos dará una herramienta que permita incorporar en el proceso de enseñanza aprendizaje un modo de validar de manera más objetiva e integral los resultados de este proceso.

Conclusiones

Es importante dar a conocer los resultados de las investigaciones realizadas al seno de la Matemática Educativa, por este motivo planteamos en este seminario cómo éstos pueden ser usados para afectar de modo benéfico en los procesos de enseñanza aprendizaje de la matemática, así como al sistema educativo en general.

Por otro lado, es importante mencionar que la diversidad de enfoques teóricos y metodológicos existentes son una clave fundamental para la realización de investigaciones, dado que el hecho de conocer los resultados de éstas, con enfoques teóricos diferentes sobre un mismo concepto, definición o problema, amplía considerablemente los conocimientos de los profesores para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de los estudiantes. Es así que la exigencia de investigaciones al seno de la matemática educativa aumenta día a día.

Bibliografía

- Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115.
- Chavarría, J. (2006). Teoría de Situaciones Didácticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática 1 (2)*. Universidad de Costa Rica.
- De Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática 1(2)*. Universidad de Costa Rica.
- García, M. S. y Navarro, C. (2010). Una propuesta para el tratamiento de los límites: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x}$ y $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\text{cos}(x)}{x}$ enfocada a estudiantes de nivel medio superior. *Números*, 75. En prensa.
- Moreno, L. (1996). Matemáticas y Educación: Matemática Educativa. En Santos, M, y Sánchez, E. (Eds.), *Perspectivas en evaluación matemática*. Pp. 45-57. México, Grupo Editorial Iberoamérica.
- Santana, S. (2009). *Una propuesta para abordar el proceso de transición grados \rightarrow radianes*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.
- Zavaleta, A. (2008). *Evaluación del Currículo Matemático Escolar Aprendido*. Tesis de maestría no publicada, Universidad Autónoma de Guerrero, México.