

PROPUESTAS DIDÁCTICAS E INNOVACIÓN EN PRECÁLCULO. UN ESTADO DEL ARTE



José Gaspar Arceo Solís, María Gpe. Ordaz Arjona
 gaspar_arceo@hotmail.com, oarjona@uady.mx
 Universidad Autónoma de Yucatán
 Reporte de Investigación
 Medio superior

Resumen

En este trabajo presentamos los resultados de un estudio con el objetivo de generar un estado del arte de las propuestas didácticas de precálculo centradas en construcción de conocimiento matemático; seleccionamos propuestas desarrolladas en Latinoamérica durante la última década que alcanzaron de manera satisfactoria el logro de sus objetivos; esto lo llevamos a cabo mediante una investigación de carácter documental y descriptivo, con el fin de dar a conocer las características innovadoras presentes en los trabajos relativos al área de precálculo que favorecen la enseñanza y el aprendizaje en esta rama de las matemáticas.

Palabras clave: *Precálculo, innovación educativa, estado del arte*

1. Introducción

Pese a las nuevas reformas y a los cambios de paradigmas propuestos, en la realidad se tiene que en muchas aulas de matemáticas el profesor sigue teniendo un papel protagonista, siendo un expositor que presenta a los alumnos los temas que se estudian durante el curso, contribuyendo a que los estudiantes únicamente sean entes receptores de la información proporcionada, no sean activos en este proceso de aprendizaje, creando en ellos una dependencia del discurso del profesor y una actitud de seguimiento hacia lo que se les está transmitiendo, lo cual según Bonacina, Haidar, Quiroga, Sorribas, Teti, Paván (2004) puede generar personas no pensantes ni creativos, hombres y mujeres conformistas, disminuyendo el ejercicio de la autocrítica y la capacidad de elaborar respuestas propias; si a esto le anexamos las dificultades generadas por los propios contenidos temáticos, estaríamos frente a dificultades en los alumnos que el profesor debe tatar de suprimir, tal como el temor hacia a la asignatura de matemáticas, la cual en ocasiones es percibida como una de las asignaturas menos agradables que debe estudiar. Por otra parte, aunque el profesor tiene un papel muy importante en el aula, hay que reconocer que no es sólo su responsabilidad el cómo se estudian los contenidos matemáticos, puesto que es la forma en la que ellos lo aprendieron y no cuenta muchas veces con los materiales adecuados que puedan hacer cambiar sus concepciones sobre la matemática y su enseñanza. Consideramos muy importante también que el que el alumno vea la necesidad de aprender matemáticas, esto a través de que sea él mismo quien construya su conocimiento matemático, sin embargo, hay carencia de materiales adecuados para tal fin que no sólo el estudiante y el profesor pudieran manejar en el aula, sino que pudieran introducirse en programas de formación de profesores.

Nos centramos en la asignatura de precálculo porque relaciona los conocimientos previos de álgebra, geometría y de trigonometría, además de vincularlos con los conocimientos que el alumno posee de otras ciencias, física y biología por ejemplo. Para considerar el objetivo y los temas que consideraremos, tomaremos el programa del curso de precálculo de las preparatorias de nuestra universidad, la Universidad Autónoma de Yucatán. El propósito general de este curso es “utilizar el concepto función, mediante la aplicación de sus propiedades fundamentales para la

solución de problemas en diferentes campos de la ciencia y la vida diaria”; consta de tres bloques de estudio a saber: Desigualdades; Funciones, sus gráficas y aplicaciones; y Sucesiones, series y progresiones. El hecho de que esta asignatura conjunte los conocimientos de otras ramas de matemática e incluso de otras ciencias, lo hace un punto importante en la formación escolar de los alumnos; sin embargo, como en toda rama de las matemáticas, en el precálculo también se generan problemas durante su aprendizaje.

Para minimizar estos problemas y el papel protagónico del profesor mencionado anteriormente, creemos que los materiales apropiados para la construcción de conocimiento por parte del alumno y que le generen un aprendizaje significativo debieran surgir a raíz de una investigación previa, la cual puede ser de corte epistemológico, didáctico, cognitivo o social; aunado a esto pudiera haber también elementos novedosos que favorezcan dicho aprendizaje, estas características innovadoras producto de la investigación, no siempre se toman en cuenta para el desarrollo de los materiales;

Lo anterior nos llevó a preguntarnos, ¿Cuál es el estado del arte de las propuestas didácticas de precálculo centradas en construcción de conocimiento matemático?, ¿Qué características innovativas contienen dichas propuestas? Y ¿Qué efectos tienen estas características en la enseñanza y el aprendizaje del precálculo?

Para dar respuesta a estas preguntas nos enfocamos en lograr los siguientes objetivos:

- Generar un estado del arte de las propuestas didácticas de precálculo centradas en construcción de conocimiento matemático.
- Caracterizar estas propuestas e identificar los elementos de corte innovador que favorecen la enseñanza y el aprendizaje del precálculo.

Hay una variante de la innovación denominada *innovación educativa*, la cual Suárez y Ruiz (2010) definen de la siguiente manera:

Cambio creativo y duradero en cualquier nivel de las prácticas educativas, realizado de manera intencional, que produce modificaciones profundas y que mejora la calidad de algún aspecto significativo del hecho educativo.

Una palabra clave en esta definición es el *cambio*, esto lo mencionamos porque, las características de corte innovativo que esperábamos encontrar eran aquellas que propicien cambios, estos pueden darse en los elementos del triángulo didáctico (*profesor, alumno y saber*), al cual le anexamos un cuarto elemento que denominamos *ambiente escolar*.

2. Elementos teóricos

De acuerdo con las definiciones de Souza (2005) y de González (s.f.), entendimos estado del arte como la recopilación y organización de investigaciones con el fin de informarse de las producciones científicas llevadas a cabo en un área del conocimiento específico; puesto que nuestro interés era conocer y reportar las características de las producciones llevadas a cabo en didáctica del precálculo, un estado del arte del tema nos pareció una opción adecuada para nuestro fin.

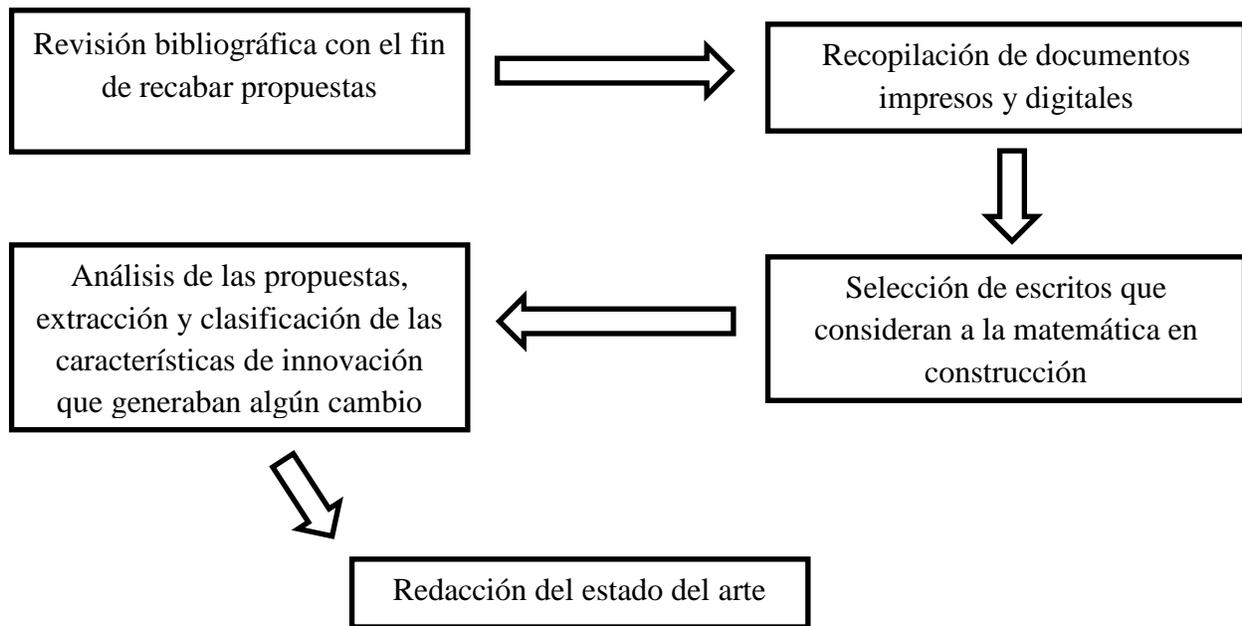
Estas características que nos interesaban eran de corte innovativo, para acotar nos centramos en una variación de la innovación denominada *innovación educativa*, para la cual hallamos las definiciones de Carbonell (2002, citado en Arias, s.f.), Imbernón (1996, citado en Arias, s.f.) y

Escudero (1988, citado en Arias, s.f.); además de Suárez y Ruiz (2010); las cuales nos sugieren que la innovación educativa es aquella que genera un cambio, ya sea en las prácticas educativas, en los contextos, en la administración de profesores y alumnos o en las prácticas educativas. Nuestro interés, como se mencionó previamente, está en los efectos generados en el ambiente escolar, en el alumno, el profesor y el saber.

Nos apoyamos también en el trabajo de Zaldívar (2006) quien propone elementos para el diseño de propuestas didácticas en el área de cálculo, estos elementos pueden ser categorizados como elementos del tipo: epistemológicos, cognitivos y didácticos. Esto permitió darnos una idea de cómo proporcionar elementos para el diseño de propuestas didácticas, con la diferencia que en nuestro trabajo nos enfocamos en diferentes temas del área de precálculo.

3. Método

Esta fue una investigación de carácter documental y descriptivo, con el fin de dar a conocer las características innovadoras presentes en los trabajos relativos al área de precálculo, constó de las siguientes etapas:



Los documentos se seleccionaron de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, la Revista Unión, la Revista Premisa, la Revista Números, la Revista Digital Matemática, Educación e Internet y las Memorias de la Escuela de Invierno de Matemática Educativa. En éstas se encontraron 186 escritos referentes al área de precálculo, 27 de ellas contenían una propuesta didáctica pero solo en 20 de ellas se propiciaba un cambio en alguno de los elementos mencionados anteriormente y no generaban prácticas repetitivas por parte del estudiante como las observada en la siguiente imagen.

Actividad 1
 1.- Siendo $P = (2; 3)$ un punto de la gráfica de una función de proporcionalidad directa, creciente, con dominio en los Reales y denominando O al origen del sistema de coordenadas cartesianas:

- Escribe las coordenadas de otro punto A perteneciente a la gráfica de la función tal que la distancia (O; A) sea mayor que la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para A? Hallar la distancia (O; A) y la distancia (O, P)
- Escribe las coordenadas de otro punto B perteneciente a la gráfica de la función tal que la distancia (O; B) sea menor que la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para B? Hallar la distancia (O, B)
- Escribe las coordenadas de otro punto $C \neq P$ que pertenezca a la gráfica de la función y tal que la distancia (O; C) sea igual a la distancia (O; P) ¿Cuántas soluciones hay para C? Hallar la distancia (O, C)
- Encuentra las ordenadas de otros puntos pertenecientes a la gráfica cuando la abscisa toma los valores: 20 ; -200 ; 105 ; 2/3 y 5/7 ?.

Imagen 1

Actividades como esta no generan conocimiento nuevo en el estudiante sino prácticas repetitivas y en ocasiones mecanizadas de procesos que él ya conoce como en este caso hallar distancias o coordenadas de puntos. En el siguiente apartado mostraremos el análisis de uno de los 20 documentos seleccionados finalmente.

4. Resultados

Presentamos el ejemplo de análisis de una de las propuestas, esta pertenece al trabajo de Villa (2008). En un trabajo previo (Posada y Villa, 2006) se desarrolló una propuesta para introducir el concepto función lineal mediante una perspectiva variacional definiéndola como aquella función cuya razón de cambio es siempre constante; apoyándose de esto pretendió dar sentido a la noción función cuadrática partiendo de la variación lineal de la razón de cambio. De las actividades mencionaremos (por cuestiones de espacio) una característica modificada en cada elemento considerado:

Ambiente

Su actividad dos se lleva a cabo en un laboratorio con los instrumentos necesarios para la recolección de datos que se requiere en esta parte de la propuesta (ver imagen 2), el cual no es un espacio usualmente destinado a una clase de matemáticas.

En el *segundo momento* se les plantea la experimentación con una guía directa de laboratorio con materiales especializados; para ello se les pedirá a los estudiantes que lleven un control de la situación mediante un cronómetro y regla graduada y que construyan una tabla de la situación.

Imagen 2

Alumno

El cambio en el ambiente como el mencionado previamente permite al alumno una participación más activa en su aprendizaje. La actividad 1 (imagen 3) exige al estudiante un análisis de la situación, la selección de los datos que debe considerar como variables y cuales permanecen como constantes, si el movimiento puede ser lineal o no por ejemplo.

Actividad n° 1. Reconocimiento y descripción de la variación [captación cualitativa]

Se le entrega a cada equipo de estudiantes una pelota y se les pide que describan el movimiento del objeto cuando se deja caer a cierta altura.

Imagen 3

Profesor

No se especifica el papel que desarrolla, pero dadas las actividades, las cuales son mayormente llevadas a cabo por el alumno, pudiera pensarse en un docente que solo este pendiente de lo que esté desarrollando el estudiante, sugiera y apoye en la obtención o análisis de los datos, y propone el empleo de materiales que no son comúnmente usados en la clase de matemáticas como lo son los materiales de laboratorio de física tales como cronómetros y las reglas graduadas (ver imagen 4).

En el *segundo momento* se les plantea la experimentación con una guía directa de laboratorio con materiales especializados; para ello se les pedirá a los estudiantes que lleven un control de la situación mediante un cronómetro y regla graduada y que construyan una tabla de la situación. Con base en la tabla construida y en la trayectoria

Imagen 4

Saber

Imagen 5

El momento tres de la propuesta sugiere la simulación y manipulación del experimento (de la caída de la pelota) en el software *Modellus* por parte del estudiante, esto permite la variación de condiciones del experimento, situación que en la vida real no pudiera llevar a cabo. En cuanto al saber, esto favorece el empleo de más de una representación, por ejemplo están la tabular, la gráfica (imagen 5) y se espera que el alumno logre dar un modelo que represente la variación entre la velocidad de la pelota y el tiempo de caída, además del manejo de situación real en un contexto físico como se mencionó anteriormente.

Los demás escritos se revisaron de manera similar a este ejemplo que presentamos; de los veinte documentos analizados se puede observar que los temas de precálculo que se trabajan en estos

son *inecuaciones* (particularmente lineales y programación lineal, tema presente en dos propuestas), *funciones* (once propuestas). Este tema lo dividimos en dos subtemas: *función como noción*, en este se contemplaba la noción de función, función lineal, función constante, de acuerdo a lo hallado en seis propuestas y *gráficas de funciones*, particularmente elaboración y análisis, las cinco restantes de este tema, y *sucesiones y series* (presente en una propuesta).

Las características de cada elemento halladas fueron: en cuanto al ambiente el empleo de algún tipo de tecnología requiriendo de un centro de cómputo en ocasiones en lugar del tradicional aula con sillas para los alumnos y escritorio para el profesor, trabajo en laboratorios de física o de química, y trabajo en espacios libres como casas, calle, etc.; por su parte el alumno tiene una participación activa (plenarias, elaboración de actividades y ejercicios, debates, entre otras) además de llevar a cabo un análisis más a profundidad de la información proporcionada en las actividades (con el fin de conseguir información adicional que le ayude en un mejor desarrollo de las actividades); el profesor también cambia su rol (deja de ser un expositor para ser un moderador, facilitador del aprendizaje, guía, etc.) o emplea materiales u otros recursos durante la implementación de la propuesta (materiales reales como monedas, cajas de cerillos, copas, etc. que permiten al alumno un mejor desarrollo de la propuesta); y en cuanto al saber se identifican y manipulan diferentes representaciones de un mismo concepto matemático (grafico, algebraico, tabular, numérico, etc., y de preferencia transitar entre ellas) así como se emplean los conceptos en contextos determinados (en ocasiones cercanas o no tan cercanas al estudiante pero donde se aprecie la utilidad de lo aprendido). En la siguiente tabla expresamos cuales fueron las características presentes en cada tema.

Elemento	Ambiente			Alumno		Profesor		Saber	
	Tecnología	Laboratorios	Espacio libre	Participación activa	Análisis de la información	Cambio de rol	Empleo de materiales	Representaciones	Contexto
Inecuaciones									
Función como concepto									
Gráficas de funciones									
Series y sucesiones									

Tabla 1. Características de los elementos por tema

En las propuestas de inecuaciones se propone el empleo de situaciones contextualizadas así como la participación activa del alumno. En una de las dos propuestas se sugiere al profesor como un guía y en la otra se propone al alumno un análisis más a fondo, de la información presentada, y no sólo aplicar mecánicamente algún método.

En seis de las once propuestas referentes al concepto función sugiere el uso de tecnología; estos pueden ser sensores de movimiento y de calculadoras graficadoras, o algún software matemático (los que aparecieron en las propuestas fueron los software Derive, Graphmatica, Modellus y Sketchpad y el programa Excel) para el desarrollo de gráficas de las situaciones estudiadas, hallar expresiones que modelan problemas o visualizar situaciones que sin el software no sería tan accesible. Otra característica es el cambio en la forma de participar del estudiante dentro de las sesiones y el empleo de objetos como reglas graduadas y cronómetros en ambientes que no son necesariamente destinados para una clase de matemáticas. En dos de las propuestas se pretende favorecer el empleo de representaciones y en una no se empleó algún tipo de contexto.

Respecto a las gráficas de funciones, en cuatro de los seis textos se menciona el empleo de sensores de movimiento, los cuales permiten desarrollar un modelo gráfico que se ajuste a situaciones o movimientos llevados a cabo por el alumno quien nuevamente está activo tanto en la elaboración del instrumento que se monitorea con el sensor, o siendo él mismo el “objeto” monitoreado que origine la gráfica requerida. Se propone también el empleo de algún contexto o situación real, además del uso de objetos que no fueron creados con fines matemáticos, pero que pueden emplearse como apoyo durante esta propuesta propiciando el tránsito entre representaciones y haciendo del profesor un mero observador del desarrollo de la propuesta por parte del alumno. Por último, no se hace explícito, pero suponemos que la tradicional aula de clase con las sillas y el escritorio del maestro no es el ambiente adecuado para el desarrollo de las propuestas donde se emplean los sensores de movimiento por el hecho de requerir movilidad, por eso se sugiere llevar las actividades al aire libre u otros espacios más acordes a las necesidades de las propuestas y dejar al profesor como un observador y sea el alumno quien lleve a cabo las propuestas.

En el trabajo respecto al tema series y sucesiones se proponen actividades donde el alumno puede manipular los objetos físicos que le permitan observar los patrones a los que se está enfrentando, además de proporcionar situaciones de la vida cotidiana del estudiante; incluso a una participante se le permitió en ocasiones manipular los objetos presentes durante el desarrollo de la actividad, lo cual favoreció el que pudiera identificar patrones en ciertas situaciones.

Los recursos tecnológicos más usados son los software matemáticos; sin embargo, en el caso de la graficación de funciones, el recurso tecnológico líder son los sensores de movimiento.

5. Conclusiones

Con este estado del arte de los trabajos de precálculo en Latinoamérica extrajimos las características de corte innovador para temas tratados en esta área.

Para inecuaciones proponemos presentar el concepto en más de una representación y propiciar una participación activa de los alumnos. Para la función como concepto recomendamos el empleo de tecnologías tales como software matemático, lo cual permite una elaboración más precisa de las gráficas y también un accesible análisis de la información recabada por los participantes los cuales nuevamente participan de manera activa en exposiciones o debates. En el caso del tema graficación y análisis de gráficas, al elaborar las propuestas se debe recurrir a los sensores de movimiento y las calculadoras graficadoras en espacios ajenos al tradicional aula de clase. Por último en el tema sucesiones y series, contemplamos el desarrollo de actividades donde el alumno pueda manipular objetos similares a los presentes en ellas y con los cuales pueda visualizar los

patrones de las series. De manera general, en los cuatro temas se emplean situaciones con un contexto real que les permite a los alumnos observar la utilidad de lo que está aprendiendo.

En resumen características deseables en las propuestas relativas a temas de precálculo son:

- Manejo de más de una representación
- Participación activa de los alumnos en la elaboración de actividades y plenarias o debates
- Empleo de tecnologías como software matemáticos, sensores de movimiento y calculadoras graficadoras
- Manipulación de objetos reales
- Uso de algún tipo de contexto

6. Referencias

- Arias, W. (s.f.). *La innovación educativa. Un instrumento de desarrollo*. Recuperado el 26 de mayo del 2011 de http://ufap.dgdp.uaa.mx/descargas/innovacion_educativa_octubre.pdf
- Bonacina, M., Haidar, A., Quiroga, M., Sorribas, E., Teti, C., Paván, G. (2004). Matemática, informática y la 'renegociación' de normas preexistentes. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 486-492. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- González, F. (s.f.). *Escritura del estado del arte*. Recuperado el 18 de abril del 2011 de <http://dis.unal.edu.co/~fgonza/courses/2005-II/seminario/estadoArte.pdf>
- Souza, M. (2005). *El estado del arte*. Recuperado el 18 de abril del 2011 de http://www.perio.unlp.edu.ar/seminario/nivel2/nivel3/el%20estado%20del%20arte_silvina_souza.pdf
- Villa, A. (2008). El concepto de función: una mirada desde las matemáticas escolares. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 21*, 245-254. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Zaldívar, D. (2006). *Un estudio sobre los elementos para el diseño de actividades didácticas en Cálculo*. Tesis de Licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Yucatán. México.