ANÁLISIS DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA DAR SENTIDO AL TEOREMA DE CONVOLUCIÓN, EN FORMACIÓN DE INGENIEROS

[1]Ernesto Bosquez,[2] Avenilde Romo, [3]Javier Lezama
ernestok1@hotmail.com, avenildita@gmail.com,
jlezamaipn@gmail.com
[1]Instituto Tecnológico de Toluca,
[2,3]Centro de Investigación de Ciencia Aplicada y Tecnología
Avanzada del Instituto Politécnico Nacional
Laboratorio tecnológico
Superior

Resumen
En este laboratorio, se presenta una secuencia didáctica en un contexto que implica a la Matemática con las Disciplinas Intermediarias (Electrónica y Teoría del Control). El objetivo de este taller es que cada uno de los participantes puedan dotar de un sentido al teorema de convolución mediante de un laboratorio virtual, en donde interactuará con programas computacionales (Or Cad y Matlab) y trabajará con modelos matemáticos. Esta secuencia didáctica es parte de una investigación doctoral más amplia. Su marco teórico incluye que usamos involucra a la *teoría de las situaciones didácticas*, *enfoque antropológico, las disciplinas intermediarias y la disciplina matemática*. La enseñanza en escuelas de ingeniería del teorema de convolución, según nuestro análisis, no permiten al estudiante de ingeniería vincular ni construir un significado con los objetos matemáticos relacionados con el teorema, dejando la construcción de su significado sólo en un aspecto completamente operatorio.

Palabras Clave: *Modelación, Disciplina Intermediaria, programas computacionales*

1. Propósito y Alcance

Este laboratorio está dirigido a profesores de matemáticas de escuelas de ingeniería y a investigadores que se interesen en la formación matemática de futuros ingenieros. Uno de los propósitos de este laboratorio es discutir una secuencia didáctica que busca dar sentido al teorema de convolución en una formación matemática destinada a futuros ingenieros.

En tres sesiones se tratarán actividades que permiten recrear un laboratorio virtual en donde se pretende que analicen, cuestionen, reflexionen sobre las particularidades de las secuencias de aprendizaje en una formación matemática de ingenieros. Para ellos, la convolución es importante por las aplicaciones que tiene en las disciplinas de especialidad, como es la teoría de control, es decir en su rol de herramienta sobre el de objeto matemático.

La secuencia surge dentro de una investigación sobre cómo dar sentido al teorema de convolución en una formación matemática de ingenieros. El teorema de convolución es un concepto teórico que demanda un gran número de conocimientos matemáticos (Mellin 1896) para tratarlo en una aproximación coherente. Es decir, darle sentido y significado matemático es muy complejo. Específicamente, el teorema de convolución que aparece a continuación, se preserva al utilizar funciones transformadas de Laplace.

Teorema de Convolución

Si $f(t)$ *y* $g(t)$ *son funciones continuas por tramos en* $[0,\infty)$ *y de orden exponencial, entonces*

$$\mathscr{L}[f*g]=\mathscr{L}\left[f(t)\right]\mathscr{L}\left[g(t)\right]$$

Resaltamos que un uso importante de este teorema proviene del hecho de que pueden conocerse las funciones f y g al aplicar la transformada inversa de Laplace al producto de convolución de dichas funciones.

$$f * g = \mathscr{L}^{-1}\left[F(s)G(s)\right]$$

La orientación que proponemos es generar un sentido a partir de su uso en las disciplinas intermediarias, como la teoría de control. Para esto, se propone a los profesores trabajar una secuencia de cinco actividades, cada una con sus respectivas tareas. Estas actividades incluyen los siguientes elementos:

Elementos de Ingeniería.- Circuito eléctrico *RL*, esquema de bloques.
Elementos matemáticos.- Ecuación diferencial, Transformada de Laplace y el Teorema de convolución.
Programas computacionales.- Or Cad, Matlab y Graph.

La importancia del uso de estos programas es que son típicos en las disciplinas intermediarias, electrónica y teoría de control.

Or Cad permite simular las condiciones de un laboratorio físico, específicamente utilizando la simulación de un osciloscopio, lo cual asegura mediciones de corrientes en los componentes del circuito, que posteriormente son traducidas en gráficas de las caídas de voltaje en la resistencia y en la inductancia. El uso de este programa en la secuencia permite explorar y luego modelar el circuito mediante una ecuación diferencial.

Matlab permite simular a través del simulink un laboratorio virtual, el cual permite construir diagramas de bloque que serán usados como representaciones de sistemas lineales constantes; éstos tienen la característica de que al proponer señales de entrada podrán obtenerse de manera inmediata señales de salida. Lo anterior, en términos de representaciones gráficas, se traducirá como manejo de voltajes o de respuesta de sistemas lineales para obtener corrientes eléctricas, o bien la función de amortiguación de un circuito eléctrico.

Finalmente, Graph es un graficador de funciones matemáticas, el cual puede manipularse de manera sencilla especificando dominios así como el manejo de escalas; se le utiliza con el fin de obtener gráficas para la interpretación, validación y reflexión sobre las distintas tareas a desarrollar.

2. Marco teórico

Esta propuesta se fundamenta en el paradigma de la matemática como disciplina de servicio, ampliamente discutido en el estudio ICMI 3, publicado en 1988. Consideramos el uso de tecnologías informáticas de la ingeniería que ayudan en la economía y modificación del trabajo matemático (Kent, 2007; Romo-Vázquez, 2009); el uso de modelos matemáticos tipos (Bissell, 2002), como son las ecuaciones diferenciales, que se adaptan y refinan son utilizados. La simulación y modelación se consideran como elementos que permiten dar sentido al teorema de convolución.

La enseñanza del teorema de convolución en escuelas de ingeniería, puede describirse de la manera siguiente: se muestra el teorema de convolución (en algunos casos se le demuestra) y a continuación se presenta un ejemplo de su aplicación, en el que se resalta el aspecto algorítmico, dejando a los estudiantes una actividad enteramente operatoria. Éste es el resultado de una enseñanza, según nuestra apreciación, *formalista o algorítmica* (Bosquez, Lezama y Mora, (2010)). De aquí deriva la interrogante: ¿Existirá alguna práctica de enseñaza que logre integrar los objetos matemáticos implicados en el teorema de convolución? En este mismo sentido, Pollack (1988) señala que "…. [this] reveals two types of mathematical needs of engineering practice:

> Elementary needs:
> "the ability to set up the right problem, to have a good idea how big the answer should be, and to get the right answer by any available means whatsoever-mentally, calculator, paper-and-pencil, computer, whatever" (Ibid. p. 31).
>
> Advances needs:
> "we need employees who know that there is a large variety of forms of mathematical thinking, and what these various forms can do".

3. Metodología

La práctica que se propone para este laboratorio distribuirá, en un tiempo de tres sesiones de 1.5 hrs cada una, el contenido se dosifica en la forma siguiente. Primera sesión: se darán las instrucciones de uso de los programas Or Cad, Matlab y Graph, con el objetivo de que su uso satisfaga el total de la secuencia de desarrollos por realizar. Segunda sesión: se desarrollarán las actividades 1, 2 y 3 que se describen adelante. Tercera sesión: se desarrollarán las actividades 4 y 5, y, para finalizar, se propondrá un intercambio de opiniones, sugerencias, aportaciones y conclusiones de lo que cada participantes haya experimentado en este taller.

Actividades

A manera de ejemplo se presenta una descripción detallada de la Actividad 1, especificando los objetivos de cada una de las tareas que la componen y de lo que se espera que los participantes produzcan al enfrentarlas.

Primera Actividad

Objetivo. Se pretende que los participantes describan el comportamiento de un circuito *RL* mediante una ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes, para lo cual, el participante deberá construir en un escenario de simulación de un laboratorio, con el programa OrCad, un circuito *RL* y luego modelarlo matemáticamente mediante la ecuación diferencial. Los circuitos *RL*, junto con los circuitos *RC*, son considerados de primer orden, ya que concentran en uno solo de sus componentes energía, en este caso el inductor. Para lograr el objetivo de la actividad 1 se proponen tres tareas: reproducir un circuito *RL* con la ayuda del programa OrCad, realizar e interpretar las gráficas de caída de voltaje de la resistencia *R* y el inductor *L*, y producir la ecuación diferencial que describe el comportamiento del circuito. En este apartado presentaremos los objetivos de cada una de las tareas, así como las justificaciones correspondientes y, finalmente, lo que se espera que respondan los participantes al enfrentarlas en su puesta en escena.

Tarea 1

La tarea 1 se propone de la manera siguiente. Usando el programa OrCad, construir virtualmente un circuito RL, como el que se muestra en la Figura 1.

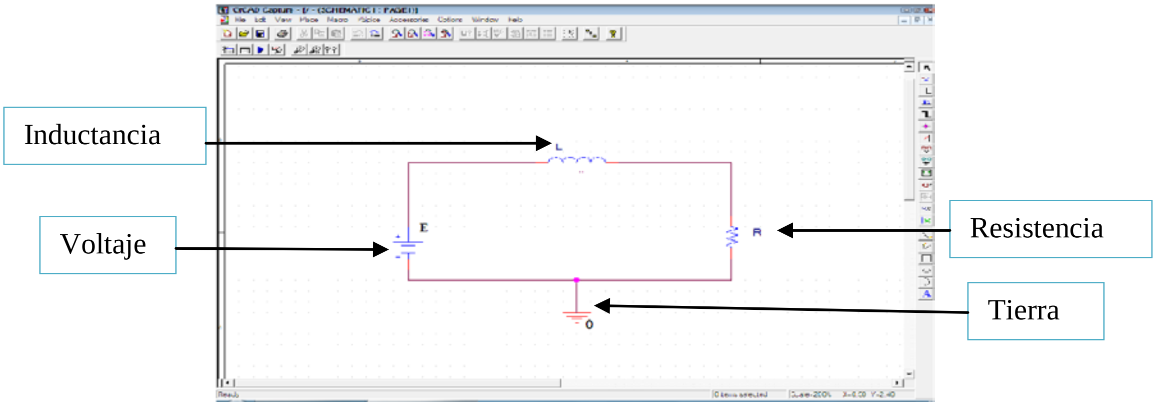

Figura 1. Representación en OrCad de un circuito *RL*.

El objetivo de esta tarea es que los participantes cuenten con un circuito, elemento de la electrónica, para poder analizar su comportamiento y, luego, describirlo mediante el modelo matemático, la Ecuación Diferencial (ED). Para cumplir con este objetivo se usa el programa OrCad, que funciona como simulador de un laboratorio y permite reproducir componentes electrónicos de manera virtual. Este programa se usa en las clases de electrónica y generalmente algunos de los estudiantes están familiarizados con su uso. Sin embargo, no es requisito que los estudiantes lo conozcan, pues la estructura de OrCad permite trabajar mediante ensayo y error. Atendiendo a estas características, se proporciona la imagen del circuito para que los participantes identifiquen qué es lo que se les está pidiendo. Para cumplir con la tarea, los participantes pueden usar las herramientas del programa, buscar los componentes del circuito (Resistencia (R), inductancia (L) y Voltaje (E)) e irlos colocando en la ventana de trabajo (ver Figura 1). Una vez que los componentes se han colocado, se les une ubicando el puntero en cada uno de ellos para generar una línea que los conecte. Debe aclararse que el objeto del componente tierra es que los participantes puedan realizar las distintas mediciones que se les piden, tales como las caídas de voltaje; sin este dispositivo electrónico, sería imposible realizar esas mediciones.

Para validar la realización de la tarea, el participante verá si lo que está produciendo es semejante a lo que se le ha pedido. Como hemos señalado, esta tarea se puede realizar mediante el ensayo y error, por lo que se espera que los participantes no tengan dificultad alguna en reproducir el circuito y presenten uno como el mostrado en la Figura 1 u otro muy parecido. Es decir, que presenten un orden diferente de los dispositivos eléctricos que se indican, Resistencia (R)., inductancia (L) y Voltaje (E).

Tarea 2

La segunda tarea solicita un trabajo sobre el circuito realizado en la tarea 1. La instrucción a seguir es: Considerando los valores de la resistencia *R*, inductancia *L* y voltaje *E*, que se indican en la Tabla 1, graficar cada triada en el orden indicado. Utilizar para ello el mismo programa OrCad y colocar en el espacio asignado las gráficas de las caídas de voltaje de *R* y *L*, así como su respectiva suma (tres ventanas por cada gráfica)

Tabla 1. Tabla de valores para *R, L, y E*.

R	*L*	*E*
1	1	12
2	3	12
3	5	12

El objetivo de esta tarea es que el estudiante construya una primera relación entre el circuito y el modelo matemático, la ED. Asimismo, se espera que esta tarea permita la verificación de una de las leyes de Kirchoff: la suma de las caídas de voltaje en un circuito eléctrico es cero (ver Figura 2). Es decir, se les solicita que grafiquen por cada triada de la Tabla 1, las caídas de voltaje de la inductancia, de la resistencia y del voltaje. De esta manera, podrán observar la relación que hay entre estas variables e inferir que la suma de estas caídas de voltaje es igual, en este caso, al voltaje de la fuente de energía del circuito eléctrico en estudio. Los estudiantes conocen, por sus cursos de electrónica, que en un circuito la corriente generada por la fuente va a tener dos caídas de voltaje (pérdidas de voltaje), una en la resistencia y otra en la inductancia. Una vez que los estudiantes produzcan las gráficas de las caídas, tendrán que analizar las distintas gráficas producidas en OrCad, a partir de la Tabla 1.

El comportamiento de la corriente eléctrica de un circuito se expresa matemáticamente por la siguiente función:

$$i(t)=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{E}{L}t}\right),$$

cuya gráfica se muestra en la Figura 2:

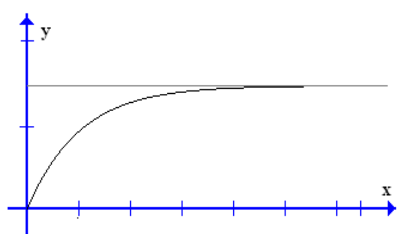

Figura 2. Comportamiento de la corriente eléctrica de un circuito

Matemáticamente puede decirse que esta gráfica tiene un comportamiento exponencial. En electrónica y referidos al comportamiento de la corriente eléctrica podemos decir que, en un intervalo de tiempo muy corto, la corriente pasa de cero hasta un valor E/R “casi” constante. Para los electrónicos es importante determinar el tiempo t en que esa corriente puede considerarse igual a E/R, aunque matemáticamente eso suceda cuando *t* tiende a infinito.

Las caídas de voltaje en la resistencia (R) y en la inductancia (L) se pueden expresar matemáticamente de la siguiente manera:

$$V_R = Ri \quad \wedge \quad V_L = L\frac{di}{dt}$$

De lo anterior, puede inferirse que la gráfica de la caída de voltaje de la resistencia (V_R) será semejante a la de la corriente *i*, ya que esta caída de voltaje es directamente proporcional a la corriente misma. En cambio, para poder inferir la gráfica de la caída de voltaje de la inductancia se tendrá que calcular la derivada de la corriente *i*, es decir: $V_L = \left(\frac{E^2}{R}\right)e^{-\frac{E}{L}t}$; o sea, la gráfica será como la que muestra la Figura 3.

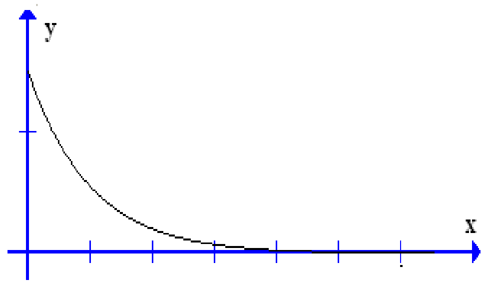

Figura 3. Gráfica de la caída de voltaje de la inductancia

Aunque no esperamos que el análisis anterior lo haga el participante (porque la tarea no lo solicita expresamente), sí es importante describir la interpretación electrónica y matemática de los comportamientos gráficos de estas caídas de voltaje considerados para el diseño de esta actividad. La Figura 4 muestra lo que esperaríamos que el estudiante obtuviera al graficar las caídas de voltaje, usando el programa OrCad, por cada triada en la Tabla 1.

Suma de las caídas de voltaje de La Inductancia y Resistencia ⇒

Gráfica de la caída de voltaje de La Resistencia ⇒

Gráfica de la caída de voltaje de La Inductancia ⇒

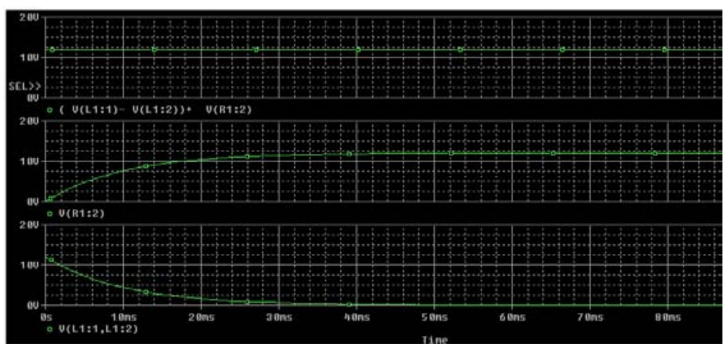

Figura 4. Simulación de las caídas de voltaje en un circuito *RL*

Es decir, que cada participante obtendrá, para cada triada, tres representaciones gráficas correspondientes a las caídas de voltaje de la inductancia, de la resistencia y de la suma de éstas (ver Figura 4).

Con la intención de que el participante dé cuenta de las relaciones entre estas gráficas, al analizarlas, interpretarlas, proponemos las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es *E* en relación a V_R?

Aquí esperamos que el estudiante, a partir del análisis de las gráficas (Figura, 4) se percate de que la gráfica de V_R, cuando *t* crece, se aproxima a la gráfica de *E*, pero que V_R siempre está por debajo de la gráfica de E.

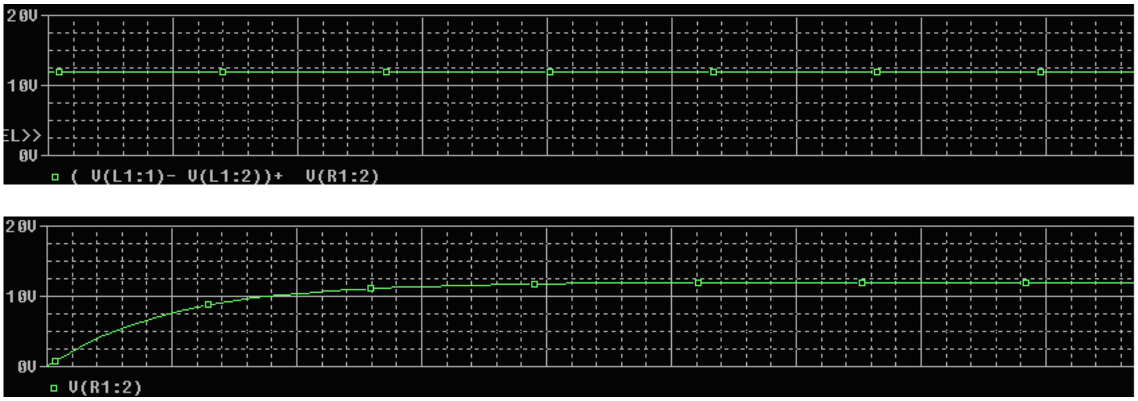

Figura 5. Representación gráfica de la caída de voltaje de la resistencia V_R con el Voltaje E

Es decir, que $V_R(t) \leq E(t)$ para todo tiempo t, (ver Figura 5). De manera similar esperamos que el participante responda a la interrogante siguiente:

b) ¿Qué es E en relación a V_L?

Esperamos que el participante, a partir del análisis de las gráficas (Figura 4) observe que la caída de voltaje en la inductancia decrece a medida que el tiempo *t* se incrementa. Es importante señalar que si V_L es igual a cero, existirá un corto. Se espera que el estudiante concluya que $V_L(t) \leq E(t)$, para todo t, (ver figura 6).

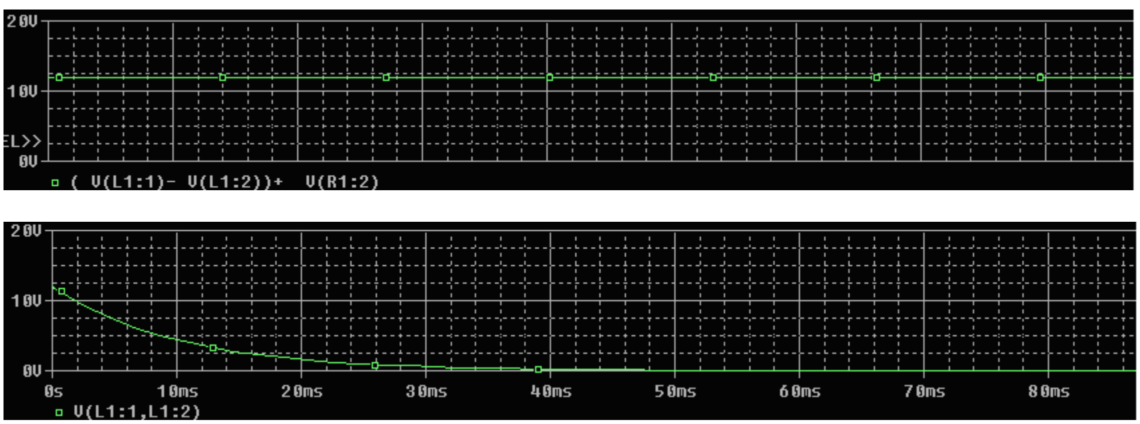

Figura 6. Representación gráfica de la caída de voltaje de la inductancia V_L con el Voltaje E

Asimismo, se espera que a partir del análisis de estas gráficas (Figura 3) pueda verse que la suma de las caídas de voltaje en *R* como en *L* es igual a *E*. Es decir, que se infiera que la suma de las caídas de voltaje en un circuito resistencia-inductancia, al menos al que se refiere esta tarea, da como resultado cero. Para lo cual proponemos las siguientes preguntas:

c) A partir de la última tarea, ¿puede afirmarse que “La suma de las caídas de voltaje en un circuito *RL* es cero?

d) ¿Puede expresar matemáticamente el inciso c) de esta Tarea?

Esperamos que la respuesta a esta última pregunta sea:

$$V_L + V_R = E \qquad (1)$$

Esta expresión matemática se enseña en los cursos de Electrónica, por lo que el estudiante está familiarizado con ella. Pero es muy probable que las conexiones entre el circuito y las expresiones matemáticas se hayan construido como se propone en estas tareas.

Tarea 3

El objetivo de esta tarea que proponemos a los profesores es que se obtenga la ecuación diferencial, modelo matemático que describe el comportamiento del circuito. Con este fin se le solicitará que responda a las interrogantes siguientes.

a) ¿Cómo podría expresarse matemáticamente el inciso d), de la tarea anterior, en términos de la corriente eléctrica $i(t)$?

b) ¿Son equivalentes las expresiones matemáticas que resultan en los incisos d) de la segunda tarea con a) de la tercera tarea?
c) ¿Por qué sí?
d) ¿Por qué no?

Lo que esperamos que el estudiante responda es lo siguiente. En el inciso a) se espera que el estudiante utilice sus conocimientos adquiridos en Electrónica, es decir que la caída de voltaje de la inductancia es igual al producto de la inductancia por la velocidad de la corriente i respecto al tiempo, y la caída de voltaje con respecto a la resistencia es igual al producto de la resistencia *R* por la corriente i. Es decir, lo anterior puede expresarse matemáticamente como:

$$V_L = L\frac{d\,i(t)}{dt}, \quad V_R = R\,i(t)$$

Nos parece importante señalar que los estudiantes están acostumbrados a utilizar estas dos expresiones en sus cursos de electrónica y es por eso que en esta tarea no es el objetivo construirlas sino utilizarlas para llegar a la ecuación diferencial.

Al sustituir estas dos últimas expresiones en (1), el estudiante obtendrá la expresión (2), a continuación:

$$V_L + V_R = E \quad \Longrightarrow \quad L\frac{d\,i(t)}{dt} + R\,i(t) = E \qquad (2)$$

Se espera también que, a partir de lo anterior, el estudiante se percate de que hay una equivalencia entre las dos ecuaciones (1) y (2), con lo que finaliza esta actividad.

4. Consideraciones Finales

A partir de la resolución de actividades de la secuencia que permite dotar de sentido al uso del teorema de convolución, incluyendo al cálculo de efectos en la modelación de un sistema en teoría de control, se pretende provocar una reflexión didáctica.

Las actividades de la secuencia y, por tanto, el laboratorio, ponen en juego modelos tipos (ecuación diferencial), elementos matemáticos, (transformada de Laplace, teorema de convolución) para resolver tareas de las disciplinas intermediarias. Al resolver las tareas que implican el uso de los programas computacionales, OrCad, Matlab y Graph, los participantes harán primeramente un uso de cajas negras: sabiendo qué entra y qué sale, pero sin conocer el proceso. El uso de programas computacionales en el trabajo profesional es, muchas de las veces, el de cajas negras (Straesser, 2008). Esta secuencia, particularmente las actividades 4 y 5, permiten transparentar esas cajas y mostrar que el teorema de convolución sustenta y permite calcular las señales de salida. El programa Matlab realiza este cálculo en segundos modificando las necesidades del ingeniero, pues le ofrece una economía de trabajo matemático. En este sentido, la secuencia problematiza esa economía y ofrece una herramienta para analizarla y trabajarla desde la formación matemática.

Esta secuencia orienta a los participantes, conduciéndolos hacia la modelación matemática, a la generación de validaciones teóricas y prácticas y a mirar la interpretación como un elemento tecnológico, es decir que permite justificar y validar el trabajo de modelación

5. Referencias

Bissell, C. C. (2002). Histoires, héritage et herméneutique (la vie quotidienne des mathématiques de l'ingénieur), *Annales des Ponts et Chaussées*, 107-8, 4-9.

Bosquez, E.; Lezama, J.; Mora, C. (2010). Algunas reflexiones de contraste del formalismo con la algoritmia de la enseñanza del teorema de convolución en escuelas de ingeniería. En Lestón, P. (Ed.). (2010). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23, 361-368. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Gardner M. (1942). *Transients in Linear Systems*, USA, Edith Jhon Wiley & Sons.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), 7-33,1998.

Kent, P. (2007). Learning Advacend Mathematics: The case of Engineering courses, contribución al NCTM Handbook chapter: Matehematics thinking and learning at post-secondary level. In Lester, K., F.(Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (pp.1042-1051). Charlotte, NC: Information Age Pub.

Mellin H.(1896). "Ueber gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationale Coefficienten". *Acta Soc. Sci. Fenn.*, 21(1 96). pp. 6-57. Alemania.

Pollak, H. O. (1988). Mathematics as a service subject- why? In A. G. Howson et al. (Eds), *Mathematics as a service subject* (pp. 28-34). Cambridge: Cambridge University Press (Series: ICMI study).

Romo-Vázquez, A. (2009). *La formation mathématique des futurs ingénieurs*, Paris: L'IReM de Paris.