RESIGNIFICACIÓN DEL CONCEPTO DE INTEGRAL DEFINIDA. UN ESTUDIO A TRAVÉS DEL ANÁLISIS DE LA SITUACIÓN DEL SALÓN DE CLASES DE MATEMÁTICAS

Guadalupe Cabañas-Sánchez
gcabanas.sanchez@gmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero
Reporte de Investigación
Prácticas del salón de clases. Superior

Resumen
Este artículo describe los resultados de un diseño experimental realizado en un salón de clases de cálculo integral al momento en que la integral definida es objeto de estudio. El propósito es presentar un análisis desde las prácticas del salón de clases, cómo se resignifica por estudiantes de matemáticas el concepto de integral definida, desde una perspectiva que articula usos, contextos y procedimientos, con la conservación del área de regiones planas, limitadas por la gráfica de una función polinómica, continua y positiva en un intervalo cerrado. El estudio de la integral definida bajo este enfoque, ubica las explicaciones y argumentos de los estudiantes en aspectos como: forma, tamaño y posición relativa de una región de área respecto del plano cartesiano, resultado de conservar la medida de un área en regiones planas; en lugar de situar su discurso únicamente hacia conceptos, símbolos y fórmulas matemáticas.

Palabras clave: *Integral definida, resignificación, contextos, procedimientos*

1. Introducción

Esta investigación se desarrolla en el contexto de una situación de aprendizaje que promueve la construcción de significados matemáticos, en particular, del concepto de integral definida, vista como área bajo una curva. Analizamos desde las prácticas del salón de clases, cómo se *resignifica* el concepto de integral definida por estudiantes de una licenciatura en matemáticas, desde una perspectiva que articula *usos*, *contextos* y *procedimientos*, con la conservación del área de regiones planas, limitadas por la gráfica de una función polinómica, continua y positiva en un intervalo cerrado. La noción de conservación del área es clave en este proceso, al constituirse en eje rector de la actividad de los estudiantes y un profesor en la construcción de los significados pretendidos al actuar sobre transformaciones analíticas. Como consecuencia de sus acciones, emergen explicaciones en torno a los usos del área en la matemática. En este sentido, esta noción se instauró en función *normativa* de la actividad matemática del aula, a la vez que coadyuvó a vivenciar procesos de construcción de conocimiento.

1.1. *¿Por qué el estudio de la integral definida articulado a la noción de conservación del área?*

Mediante el estudio de la conservación del área de regiones planas, los estudiantes establecen relaciones con los procedimientos que se llevan a cabo al actuar sobre las transformaciones en contextos específicos. Emergen a la vez, explicaciones en torno a los usos del área en la matemática. Por otra parte, sus explicaciones y argumentos se ubicaron en aspectos como: *forma*, *tamaño* y *posición relativa* de una región de área con relación al plano cartesiano, resultado de conservar la medida de un área en regiones planas; en lugar de situar su discurso únicamente hacia conceptos, proposiciones, procedimientos, símbolos y fórmulas matemáticas, importantes sin duda; aunque en este trabajo, el centro está en la resignificación a partir de ello.

2. Aspectos metodológicos

2.1. *Orientación teórica*

En términos de la situación de aprendizaje el estudio tomó consideración las aportaciones derivadas de las investigaciones de Piaget, Inhelder y Szeminska (1970), Freudenthal (1983), Kordaki y Potari (1998, 2002), Kordaki (2003) con relación al concepto de área. Estas investigaciones reportan la existencia de una particular relación entre el área y la medición; de la medición y la comparación, y de todas estas con la conservación. De los estudios socioepistemológicos de Cordero (2003, 2005), fueron las nociones de uso, contextos y procedimientos que articuló en sus explicaciones las que interesaron para la articulación del concepto de área con el de integral definida.

2.1.1. *Resignificación de la integral definida. Usos, contextos y procedimientos en ese proceso*

En Cabañas-Sánchez y Cantoral (2009, 2010) y Cabañas-Sánchez (2011b) se reconoce a la medición, comparación, estimación, representación y conservación del área como aquellos usos que la humanidad le ha dado al concepto del área. Los autores discuten la noción de usos desde la teoría socioepistemología y la centran en los significados. Sostienen, que los objetos matemáticos por sí mismos no tienen un significado, sino más bien les son atribuidos o asociados por los grupos humanos, la socioepistemología, en palabra de los autores, le ha llamado a este proceso significación. Así, una significación que los estudiantes han construido alrededor de la integral definida, es el de procedimiento, porque aprendieron una regla. La resignificación, es el proceso en el que las significaciones se modifican, obedeciendo a cuestiones contextuales y coyunturales. Se entiende además, que el significado establecido o construido por un grupo, no necesariamente deberá ser comprendido o utilizado por otro, en el mismo sentido. Se resignifica porque los grupos humanos somos diversos, de modo que dos grupos humanos no siempre entenderán o usarán un constructo del mismo modo.

Por cuanto a los *contextos*, en esta investigación, se comprenden como los entornos situacionales en los que se considera un hecho, y a los *procedimientos* como las formas de organización de una situación (Cordero, 2003, 2005).

2.1.2. *Transformaciones analíticas en la conservación del área de regiones planas*

Este tipo de transformaciones se derivan de un conjunto de operaciones algebraicas sobre expresiones analíticas relativas a la integral definida. El resultado de tales transformaciones es un número real y positivo que representa el valor de un área, situado bajo la representación gráfica de una función continua en un intervalo cerrado. La obtención de dicho número se fundamenta en definiciones, propiedades de los números y de objetos matemáticos como función continua, noción de intervalo, partición del intervalo, integral indefinida y definida. La interpretación geométrica de estas representaciones en el intervalo dado, revelan *cambio de forma* o de *posición* o bien ambas; la medida del área correspondiente *se conserva*.

Desde el punto de vista de la matemática, las transformaciones analíticas a las que aludimos y que comprenden la conservación del área, verifican las propiedades siguientes (Cabañas-Sánchez, 2011b, p. 72):

Sea R una función de variable real de la forma $f(x) = kx^n$ con $k > 0$ y $n>0$, en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, a, $b \in$ R, continua en dicho intervalo y, por tanto, diferenciables en el intervalo abierto.

$A(R)$= Valor del área bajo la curva de R.

Sea T una transformación sobre R tal que $T(R)$ es nuevamente una función y $A(T(R))$ el valor del área de $T(R)$.

Entonces $A(T(R)) = A(R)$.

2.1.3. *Práctica*

La noción de práctica se asume desde la teoría Socioepistemología, como un conjunto organizado de actividades o acciones objetivas e intencionales para resolver un problema dado. Estas prácticas son normadas por prácticas sociales. En este sentido, práctica es inherente tanto a las acciones específicas llevadas a cabo por los actores del sistema didáctico in actu, como las que tienen lugar en la socialización del saber. Esto trae consigo una relación funcional entre grupos humanos y el conocimiento mismo. En consecuencia, se atribuye a actividades o acciones objetivas, y se evidencian en comportamientos observables por los seres humanos. Excluye por tanto, los actos mentales, internos y los estados disposicionales del sujeto. Estos comportamientos, dicho sea de paso, representan roles de los individuos, y éstos a su vez, a las instituciones. Un esquema operativo de la práctica (Tuyub, 2008) se presenta mediante la figura siguiente.

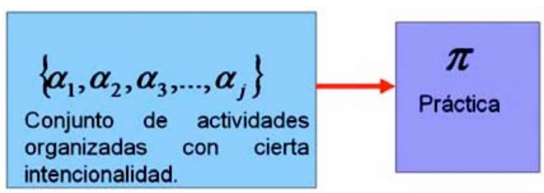

Figura 1. Esquema operativo de la práctica, donde un conjunto de actividades organizadas con cierta intencionalidad la caracterizan (Figura 2.3.1. en Tuyub, 2008, p. 23).

Situados en el contexto de una situación de aprendizaje, estas actividades se enlazan a las del profesor y los estudiantes, cuyo fin es la construcción de conocimiento. Entendemos que la actividad del salón de clases está regulada por las acciones del profesor, no obstante, la socioepistemología se interesa por derivar explicaciones a partir de la actividad que desarrollan los grupos humanos, más que en torno a un individuo. Consecuentemente, el estudiante y sus acciones son insoslayables. Por ello es que en este trabajo, nos referimos en diversos momentos a las prácticas tanto del profesor como de los estudiantes —en términos de actividad—, cada uno en el desempeño de su propio rol.

2.2. *Método*

El estudio se llevó a cabo durante 21 sesiones de dos horas en un curso de cálculo integral en el que participarton 36 estudiantes de primer semestre de una licenciatura matemáticas (17-23 años de edad). Los datos provienen de las videograbaciones de cada sesión de clase, de las copias de los trabajos escritos por los estudiantes, de reuniones con el profesor a cargo del curso al final de las sesiones, de una entrevista escrita y de las notas de campo del investigador. La actividad de los estudiantes se organizó en tres momentos: individual, en equipo y grupal. En la primera, los jóvenes debían arribar a una conclusión por actividad al poner en juego sus propios conocimientos. En la segunda fase, debían discutir sus conclusiones en equipo y confrontar sus conocimientos a fin de arribar a una conjetura para discutirla con el grupo.

En términos del análisis de los datos, se construyó una herramienta metodológica que consistió de dos aspectos principales: a) Tipificación de las intervenciones instructivas desde las más generales relativas a la gestión de la actividad en el aula, a otras más específicas como las "*ayudas*" que el profesor ofreció a los estudiantes, estrategias para organizar sus explicaciones, y; b) Tipificación de la trayectoria que siguen los argumentos de los estudiantes en el proceso de definición de la integral definida y del discurso del profesor, de sus actitudes hacia las matemáticas y de cómo resignifican a la integral definida a través de los diversos usos del área y cómo emergen en sus explicaciones aspectos como *forma*, *tamaño* (medida del área) y *posición relativa* de las regiones de área, con respecto del plano cartesiano.

3. Análisis de la actividad matemática en el salón de clases

Durante el experimento de enseñanza, en las interacciones estudiante-profesor el discurso aparece regulado por el representante legal del currículo, contrario a la actividad en equipo, donde los jóvenes tienden a confrontar y evaluar argumentos de sus colegas y hacia el consenso. La discusión en equipo, favoreció además, la evolución de significados alrededor de los usos del área, así como los procedimientos y los contextos, sin ser estos dos últimos el centro.

Veamos un ejemplo, que resulta de la actividad 4 de la secuencia II, en la que se exploró mediante los datos de una tabla, la medida aproximada del área de una región situada debajo de la gráfica de la función cuadrática, en el intervalo [0, 1]:

> **Actividad II. 4.** En la tabla siguiente se muestran los resultados del cálculo de aproximaciones del área bajo la curva $f(x) = x^2$ cuando se divide al intervalo [0, 1] en 4, 10, 20, 30, 50, 100 y 1000 subintervalos. Analiza los datos.

No. Rectángulos	Aproximación inferior	Aproximación superior
4	0.21875	0.46875
10	0.2850000	0.3850000
20	0.3087500	0.3587500
30	0.3168519	0.3501852
50	0.3234000	0.3434000-
100	0.3283500	0.3383500
1000	0.3328335	0.3338335

> ¿A qué valor se aproxima el área de la región R cuando aumenta el número de rectángulos construidos?

Los estudiantes observan que los datos de la primera columna "*crecen*" y los de la segunda "*decrecen*". Una mayoría, relacionó el comportamiento de estos datos, con el límite superior y el inferior del intervalo, por ello es que el "crecimiento" , en sus propias palabras, es que se aproxima a uno y el decrecimiento, a cero. Veamos la discusión que tuvieron Elena y Carlos durante la actividad en equipo.

[829] Elena: Se aproxima a uno porque va aumentando entonces va a llegar un momento que va llegar a ser… se va a aproximar a uno.

[830] Carlos: Nooo … no puede aproximarse a uno... el área… porque se supone… que tienes esto … **no va a tender a uno** el área… y tienes algo así (representa el cuadrado que se forma de la intersección entre las rectas que traza desde el eje *x* e *y* tomando como base al intervalo)… tienes aquí un triángulo rectángulo (sombreó el triángulo curvilíneo que se forma por encima de $y = \sqrt{x}$ en el intervalo [0,1])... y este es 0.5 (región de área por encima de $y = \sqrt{x}$)…y tienes aquí 0.5 … tiene que ser menor que 0.5 de hecho ni a 0.5 puede llegar, porque es ilógico… lo más lógico es 0.333333 333….. Pero si ya tenemos así… podemos observar así 100, 10000 100000 podemos observar su comportamiento… de manera…. Porque aquí van a llevar un orden… ya es constante la diferencia…si los tendemos hasta… infinito podemos llegar a 33333 pueden llegar a un tercio… a lo más pueden llegar a un tercio.

Carlos le hace ver a Elena que la medida aproximada del área objeto de estudio, es menor que uno. Se apoya para ello, de la **representación del área** correspondiente. En ese proceso, le asocia una *medida al área del cuadrado* que construyó y la *compara* con la de la región objeto de análisis (ver Figura 2).

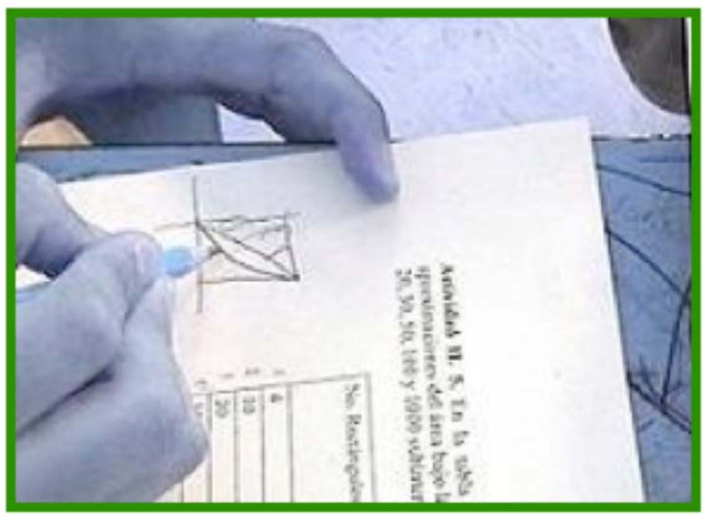

Figura 2. Argumentos visuales para justificar que las aproximaciones a la medida del área objeto de estudio, son menores que uno.

El intercambio de experiencia con la matemática así como los argumentos en que sustentaron sus conjeturas, llevó a estos jóvenes y a otro de sus compañeros, a confrontar significados y procedimientos; consecuentemente, a su evolución. A partir de ello, reconocen que la medida del área es un valor aproximado y es un tercio, sin la intervención del profesor.

[831] Oscar y Elena: Siii… a lo más a un tercio

[832] Carlos: Esa es la explicación más lógica

[…]

[840] Elena: Es una aproximación 0.3333 periódica…

[841] Oscar: Pero no sabemos si será ese o cómo realmente lo compruebas

[842] Carlos: ¿A qué valor se aproxima?… a uno punto tres se aproxima a este… no estamos diciendo que es realmente ese valor.

En una actividad posterior a la explicación de la integral definida, el profesor introduce "ayudas" a partir de una lectura que hace de la situación siguiente:

> **Actividad V. 3.** Bosqueja las gráficas de las expresiones: $f(x)=4,\ g(x)=ax,\ h(x)=bx^2$. Encuentra los valores de *a* y *b* de manera que la región formada por la gráfica de la función y el eje *x* sobre el intervalo [0, 4] tenga la misma área.
>
> a) ¿Qué relación encuentras entre tus interpretaciones?

El profesor introduce la actividad mediante su lectura (Renglón 1771), a fin de que los estudiantes comprendan qué se les plantea. Lo hace a modo de reflexión, sobre varios aspectos del contenido: a) El grado del exponente de las funciones objeto de estudio; b) la forma de la gráfica de las funciones, según el grado de su exponente, y; c) el intervalo en el que se estudiará a las funciones. Por ejemplo, menciona que la función $g(x)$ =ax, es de primer grado y $h(x) = bx^2$ de segundo grado. A su vez, hace notar que las gráficas de tales funciones pueden aludir ya sea a rectas o a curvas. Al final de su intervención, les recordó cuál es el intervalo en que se estudiarán dichas representaciones.

[1771]	Profesor:	…Sobre el intervalo cero coma cuatro... que tengan la misma área... empiecen a trabajar la actividad ... Después de que trabajen con la actividad... vamos a conversar sobre la pregunta... se pide que... en el caso de la función $g(x)$ ... igual a *ax*... equis está elevado al exponente uno... ¿no? Entonces pueden ustedes reflexionar acerca de que... pase lo que pase con los valores de *a*... del parámetro *a*... pueden ustedes más o menos... representar gráficamente... cómo es la... la curva de esa función... o si no es una curva... o si es una recta. Y en la tercera función es y $h(x) = bx^2$ ... fíjense que la variable *x* está elevada a la dos... ustedes pueden analizar cómo es el comportamiento gráfico...de las funciones de segundo grado... ¿sale?... para el caso anterior, ¿cómo es el comportamiento de las funciones de primer grado?... obviamente nos piden representarlas en el intervalo que va de cero a cuatro... que es donde queremos estudiar ciertas condiciones...

En su lectura, se exhibe un análisis en los que a ratos involucra preguntas y respuestas, Se entremezcla a manera de lectura y explicación. Su "*ayuda*" se orienta más hacia la representación de las regiones de área, en la que además, fijó su atención en el intervalo cerrado.

Al analizar las dinámicas del salón de clases, observamos que una primera acción de los estudiantes tanto en su trabajo individual como en equipo, fue representar el área debajo de la gráfica de la función $f(x) = 4$ en el intervalo [0,4]. Sin dificultad reconocen que dicha región representaba un cuadrado. En consecuencia, tenían claro que la medida de área a conservar era precisamente la de ese polígono. La determinaron por la fórmula $l \times l$. Para graficar las regiones de área asociadas a las funciones lineal y cuadrática, tenían claro que debían determinar el valor de los parámetros *a* y *b*, aunque inicialmente no comprendían cómo llevarlo a cabo. Para el caso de la función $f(x) = 4$, el profesor persuadió a algunos estudiantes a determinar el área mediante la integral definida, privilegiando así, el uso de un algorítmo particular. Otra "*ayuda*" que introdujo, fue la de "recurrir" a una actividad previa, tal como se reproduce en la charla siguiente, con el integrante de uno de los equipos.

[1801]	Profesor:	Se acuerdan de la actividad anterior?, ¿Qué se nos pedía hacer en la actividad anterior?
[1802]	Carlos:	Ya no podían dos gráficas… las funciones ya estaban dadas
[1803]	Profesor:	¿Pero que nos pedían en esa actividad?
[1804]	Carlos:	Conocer a "efe" para que el área o la integral sean igual al dibujo.
[1805]	Profesor:	Hay que buscar la manera de cómo relacionar aquella curva con los datos que se nos dan…

La medida del área del cuadrado, en la que una mayoría usó la fórmula básica de lado por lado, fue básica para determinar el valor de a y b. El procedimiento se apoyó de la integral definida. Primero, en palabra de los estudiantes "*calculamos la integral definida*" y luego "*igualamos el resultado con dieciséis*". Esto es, representaron una integral definida para determinar el valor de cada parámetro y la igualaron a dieciséis. Una vez obtenido los valores, los sustituyeron en las funciones $g(x)$ y $h(x)$ y posteriormente representaron las regiones de área.

3.1. *Tipificación de las intervenciones del profesor*

Para *ayudarles* a aproximarse a las actividades, el profesor se apoyó de una lectura en voz alta. Para el caso de las funciones, enfatizó en el grado del exponente, la forma de las gráficas y el intervalo en el que se estudiaría la región de área. Algunas "*ayudas*" aparecen a modo de sugerencias, como las siguientes:

- *Transferir un conocimiento previo a una actividad nueva*. Para ayudarles a establecer los límites de integración al momento de representar a la región de área en términos de la integral definida, les recuerda que este objeto matemático se estableció en un intervalo de la forma [a, b].
- *Palabras o frases claves*. Para que recuerden como calcular la integral de una función a partir de las primitivas de la función, les plantea preguntas claves como las siguientes: ¿Cuál es el intervalo de integración? ¿de dónde a dónde voy a integrar?

Comprendimos que las *ayudas*, contribuyen en gran medida a la evolución de usos, contextos y procedimientos del área. Algunas veces las expectativas del profesor se ven superadas, máxime cuando el *efecto* de sus acciones es contrario al deseado o esperado.

4. Factores que median la resignificación de la integral definida

Distinguimos cuatro elementos como fundamentales, internos a la situación del salón de clases, que contribuyen a que los estudiantes se relacionen con el saber y se responsabilicen de su propio proceso de aprendizaje, destacan: Los procesos de comunicación en el aula, la estructura de la situación de aprendizaje, los antecedentes académicos y cómo se apropian de la situación de aprendizaje. Externos, actitud hacia el saber, hacia sus colegas y su profesor o de su profesor hacia los estudiantes, creencias, expectativas, concepciones sobre la enseñanza, etc.

El profesor por su parte, ocupa un lugar privilegiado. Desde su nivel de apropiación de la situación y estrategias de interacción con los estudiantes, puede ayudar a reducir los factores desestabilizadores (Lezama, 2005). Algunos momentos de su actividad muestran lo contrario, por ejemplo, al orientar el discurso del aula hacia los procedimientos algorítmicos más que hacia los significados, el que las dificultades y errores se comprendan como un obstáculo en el aprendizaje en lugar de usarlos de forma constructiva o bien, el escaso interés por promover un adecuado uso del lenguaje y una buena comunicación en el aula. Las dificultades u obstáculos de los estudiantes pueden favorecer la toma de decisiones anticipadas al profesor, quien los reconocerá si privilegia la interacción entre estudiantes y profesor-estudiantes. Asimismo, la evolución de significados en el aula, a la par de los contextos y procedimientos.

5. Referencias

Cabañas-Sánchez, G. (2011b). Prácticas asociadas a la situación del salón de clases de matemáticas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *24*, 785-792.

Cabañas-Sánchez, G. (2011a). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico* (tesis inédita de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.

Cabañas-Sánchez, G., Cantoral, R. (2010). Análisis de la actividad matemática en el salón de clases. Un estudio socioepistemológico. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *23*, 939-947.

Cabañas-Sánchez, G., Cantoral, R. (2009). Perception of the Notions of Conservation, Comparison and Measurement of the Area. A Study Through Arguments in the Classroom. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica)*, *Supplemento*, *N. 4 al N. 19*, 97-104. Retrieved from http://math.unipa.it/~grim/TSG24_ICIMI_GCabanas-Cantoral_QRDM_Supl4_09.pdf

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), *265-286.*

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral: La noción de acumulación como una argumentación*. México: Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Holland: D. Riedel Publishing Company.

Kordaki, M., Potari, D. (1998). Children´s Approaches to Area Measurement Through different Contexts. *Journal of Mathematical Behaviour*, *17*(3), 303-316.

Kordaki, M. (2003). The effect of Tools of a Computer Microworld on Student´s Strategies Regarding the Concept of Conservation of Area. *Educational Studies in Mathematical*, *52*(2), 177-209. doi: 10.1023/A:1024065107302.

Kordari, M., Potari, D. (2002). The Effect of Area Measurement Tools on Student Strategies: The Role of a Computer Microworld. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(1), 65-100.

Lezama, J. (2003). *Un estudio de reproducibilidad de situaciones didácticas* (Tesis inédita de doctorado). Cinvestav-IPN, México, D.F.

Piaget, J., Inhelder, B., Szeminska, A. (1970). The Child´s conception of geometry. New York: U.S.A.: Basic books, Inc., Publishers.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicological: un modelo de la construcción social del conocimiento* (tesis inédita de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.