

## PROPUESTAS DIDÁCTICAS E INVESTIGACIÓN EN PRECÁLCULO. UN ESTADO DE ARTE



Reyna María Chan Novelo, María Guadalupe Ordaz Arjona  
 reyna\_chan@hotmail.com, oarjona@uady.mx  
 Universidad Autónoma de Yucatán  
 Reporte de Investigación  
 Medio superior

### Resumen

En el presente trabajo presentamos los resultados de un estudio de carácter documental y descriptivo, el cual en primera instancia se recopilaron artículos de matemática educativa con propuestas didácticas referentes a Precálculo centradas en la construcción del conocimiento matemático, para posteriormente realizar el análisis de las mismas. Lo anterior con el objetivo de caracterizar dichas propuestas e identificar elementos de investigación centrados en la construcción del conocimiento en Precálculo. Entre los resultados encontramos elementos que las propuestas contienen elementos propios de la investigación tales como la predicción, la modelación entre otros, vistos como prácticas humanas, así como el favorecimiento aspectos sociales, centrados en el quehacer de los estudiantes.

**Palabras clave:** *Precálculo, propuesta didáctica, construcción, conocimiento*

### 1. Introducción

Dalcín y Olave (2007) afirman que el desarrollo de las ideas matemáticas no es tan lineal como lo presentan en general los libros de texto; por nuestra parte consideramos que los conceptos debiesen aparecer en los materiales didácticos desde su génesis, es decir, que el concepto no solo sea visto como algo acabado sino como una construcción. Es por tanto que los materiales involucrados en la construcción del conocimiento matemático son de vital importancia, esto debido a que el concentrado de conceptos que se estudian en un curso de matemáticas y en especial en Precálculo, así como el tratamiento que se le otorga a éstos, son sugeridos en los materiales que el profesor o los estudiantes utilizan.

Por otra parte, consideramos importante dotar a profesores e investigaciones futuras de bases teóricas para el diseño de materiales didácticos no sólo dirigidos a los estudiantes sino materiales que puedan incluirse en programas de formación de profesores, de modo que éstos últimos puedan identificar a la matemática en construcción y con ello modificar o mejorar la forma que abordan los contenidos en la clase de Precálculo. Es así que la matemática educativa tiene cabida en nuestra investigación pues se ha ocupado entre otras cosas de atender la construcción el conocimiento en las aulas: vía libros y propuestas con el fin de enseñar y evaluar (Cantún, Canul, Chi, Flores, López y Solache, 2007). Por ende es necesario conocer qué propuestas existe en investigación en matemática educativa sobre la materia en Precálculo, saber qué características poseen que ayudan al éxito de las mismas o que ayuden a ver a la matemática como un proceso en construcción.

Es así que nos planteamos las siguientes preguntas de investigación ¿Cuál es el estado de arte de las propuestas didácticas centradas en la construcción del conocimiento matemático en el área de Precálculo? Y por último ¿Qué elementos en el seno de la investigación en Matemática Educativa favorecen la construcción del conocimiento matemático?

Es entonces que nuestro objetivo es generar un estado del arte de las propuestas didácticas en Precálculo desarrolladas en Matemática Educativa en la última década e identificar los elementos en el seno de la investigación que las caracterizan y que favorecen la construcción de conocimiento matemático.

## 2. Elementos teóricos

Partimos de la hipótesis *a priori* de que algunas de las características que podríamos encontrar en los materiales didácticos son, la diversidad de representaciones para cada sistema conceptual y la fenomenología de los conceptos, esto referenciándonos de Rico (1998), quien hace un análisis de la currícula matemática y establece elementos para el desarrollo de unidades didácticas, éstos son: los errores y dificultades presentes en el aprendizaje de las matemáticas, la diversidad de representaciones para cada sistema conceptual, la fenomenología de los conceptos, la diversidad de los materiales manipulativos y la epistemología del concepto.

Por otro lado también consideramos como punto de apoyo y de partida el trabajo de Zaldívar (2006) quien realiza una investigación que le permite establecer elementos para la elaboración de una propuesta didáctica en cálculo donde pone en manifiesto la vinculación de la investigación con la elaboración de materiales didácticos. Los elementos que encuentra y que nos servirán de apoyo son la noción de visualización matemática, cambio y coordinación entre registros de representación semiótica (que es análogo con lo que propone Rico con la diversidad de representaciones para cada sistema conceptual) y desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional.

Estos elementos los consideramos por dos razones, primeramente porque serán propuestas en Precálculo y en segundo lugar porque no desarrollaremos una propuesta, sino más bien analizaremos propuestas producto de la investigación en matemática educativa y que favorecen la construcción del conocimiento matemático, entendiendo este último como aquel conocimiento que se transmite en el sistema educativo y que ha de ser integrante de la cultura, socialmente construido y determinado, es decir que se sociedad y ciencia se vinculen para la generación del conocimiento (Rico, 1997-b citado en Rico 1988) y donde el estudiante forja su conocimiento y no es conducido a un objeto acabado e inmutable.

Consideramos esta concepción de construcción de conocimiento matemático porque asumimos, al igual que Martínez, Torres, Tellería y Dibut, (2007), que comprender un objeto matemático consiste en que el alumno sea capaz de reconocer sus características, propiedades y representaciones, relacionarlo con otros objetos matemáticos y usarlo en toda la variedad de situaciones problemáticas que sean propuestas por el profesor, es decir, que los conceptos del objeto matemático puedan ser involucrados inclusive en escenarios no escolares y por ende llevarlo a un plano sociocultural propio del estudiante o en un dominio científico.

Con lo anterior podemos decir a priori, que posiblemente las características de una propuesta que favorezca la construcción del conocimiento en matemáticas será:

1. El alumno es el actor principal.
2. Los conceptos del objeto matemático no sean presentados desde una perspectiva única matemática, es decir, que sea el estudiante quien experimente con los conceptos para llegar a conjeturas y conclusiones

3. Que el *a priori* de los estudiantes se vincule con el nuevo concepto estudiado, ya sean los conocimientos del estudiante extraídos de su entorno o cultura o los conceptos matemáticos existentes.

### 3. Método

Nuestro estudio fue documental y descriptivo, el cual constó de dos fases: 1) Revisión exhaustiva de revistas en matemática educativa o áreas afines como lo es la Educación Matemática, así como la selección de artículos que contengan propuestas o actividades centradas en la construcción del conocimiento matemático mencionado anteriormente y 2) Análisis y caracterización de dichas propuestas didácticas.

El propósito de la primera etapa fue generar una base de datos de propuestas centrados en la materia de Precálculo donde se trabaja una matemática en construcción, entendiendo esta como aquella matemática a la cual llega el alumno después de la puesta en escena de la propuesta, contraria a la matemática construida que sería aquella que el alumno emplea en la puesta en escena sin generar ningún nuevo conocimiento. En esta etapa revisamos seis revistas con las características antes descritas: Revista Latinoamericana de Matemática Educativa (RELIME), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME), Números, Unión, Premisa y Revista Digital Matemática, así como también memorias de la Escuela de Invierno en Matemática Educativa (EIME). Nos dimos a la tarea de la búsqueda de material en investigación (artículos) convenientes y con referentes a la materia de Precálculo en los últimos diez años, hallando 186 artículos con estas características.

Posterior a ello, nos dimos a la tarea de seleccionar todos aquellos artículos que en su desarrollo tuviesen propuestas didácticas, entre estas consideramos, actividades, secuencias, talleres o cursos, encontrando un total de veintisiete artículos de los cuáles seleccionamos quince (el listado se encuentra en un anexo en las referencias), que fueron los que se centraban en la construcción del conocimiento matemático.

Posteriormente nos dispusimos a analizar y caracterizar las quince propuestas seleccionadas, con el fin de encontrar aquellas características que las hacen exitosas, estos es, que favorezcan la construcción del conocimiento; de modo que este estudio permita a investigaciones futuras generar indicadores para el diseño de materiales didácticos en la materia de Precálculo.

Por lo anterior expuesto, consideramos desarrollar un estado de arte considerando esto como lo hace Souza (sf) esto es, como el recorrido que se realiza a través de una investigación de carácter bibliográfico con el objeto de conocer y sistematizar la producción científica en determina área del conocimiento, nuestra área es el Precálculo.

### 4. Resultados

Algunas características generales que se encontraron en las propuestas analizadas son las siguientes:

- Doce reportan algún tipo de resultado favorable, es decir, son propuestas que fueron puestas en escena y que con los resultados analizados por los autores, se obtiene conclusiones favorables o bien se comprueban hipótesis planteados en las investigaciones. Entre estas, cuatro son talleres.

- En trece de las propuestas, se visualiza una interacción del estudiante con su realidad o bien se percibe una relación de aspectos sociales favorecidos en las propuestas, tales como interacción de los estudiantes, escenarios cotidianos o no escolares y socialización de resultados (donde más de uno puede ser correcto).

Por cuestiones de extensión, sólo presentaremos a manera de ejemplo, el análisis de una de las propuestas. Esta se trata de un trabajo de Arrieta y Buendía (2003), publicado en la ALME volumen 17, cuyo título es: Diseño de situaciones desde una perspectiva de la actividad humana.

Se encontraron elementos tales como la socioepistemología como una aproximación teórica, predicción, modelación, visualización, tránsito entre registros y aspectos sociales.

#### a) *La socioepistemología como aproximación teórica*

En la propuesta, los autores exhiben que al usar este elemento en las actividades rescata el interés en desarrollar objetos matemáticos más que los objetos en sí, pues con la socioepistemología se puede evidenciar la existencia de elementos alrededor de la definición.

Algunos elementos de la periodicidad que pueden evidenciar la socioepistemología, son por ejemplo la relación entre las variables o patrones de movimiento (ver Figura 1a).

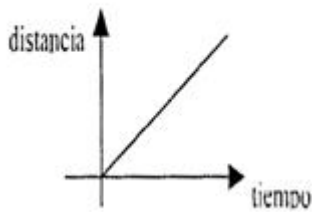
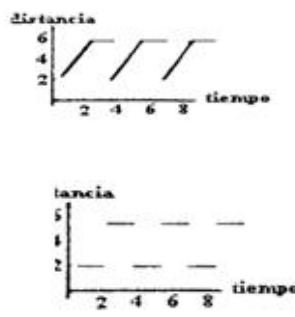
Relación entre variables	Patrones de movimiento	
	<p><i>Cómo tendrá que ser el movimiento para que la gráfica se desplace <u>hacia arriba o hacia abajo.</u></i></p> <p><i>Cómo sería la gráfica si el movimiento es más <u>rápido o más lento</u></i></p>	

Figura 1a. Relación entre las variables y los patrones de comportamiento

#### b) *La predicción*

La predicción como práctica relacionada con la periodicidad, conlleva a la resignificación del concepto, según los autores, en las actividades podemos notar que es favorecida la predicción, al encontrarse la necesidad de describir un movimiento que se lleva a cabo en un determinado tiempo.

Por ejemplo en la Figura 2a: podemos observar que se requiere reconocer patrones, tales como la regularidad del movimiento en la distancia y su comportamiento en el tiempo, todo para poder predecir el móvil en el tiempo 231.

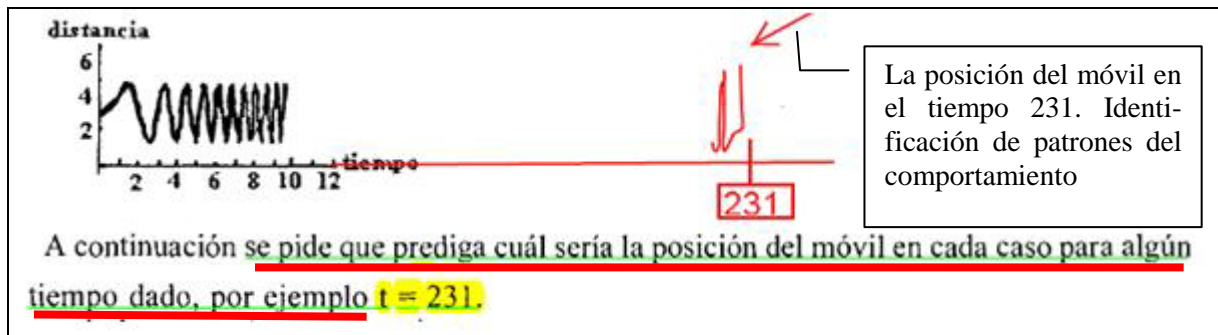


Figura 2a. La posición del móvil en el tiempo 231

**c) Modelación**

Una característica que tienen las actividades propuestas por estos autores es que la modelación se mira como una práctica y no como una herramienta. Ya que las actividades reflejan la intencionalidad humana, al representar el reflejo de la “realidad” de la situación del movimiento del móvil (ver Figura 3a).

Posteriormente, se pide relacionar los cambios en el movimiento con los cambios en las gráficas: cómo tendría que ser el movimiento para que la gráfica se desplazara hacia arriba o hacia abajo; cómo sería la gráfica si el movimiento es más rápido o más lento.

Figura 3a. Modelación como práctica

Podemos concluir que es el estudiante, quien realiza una representación de un modelo con las relaciones observadas en los cambios de los movimientos.

**d) Tránsito entre registros**

En una actividad podemos encontrar indicaciones como la siguiente:

*Un cuerpo se encuentra frente al sensor; ¿cómo debe ser el movimiento de dicho cuerpo para que la gráfica resultante sea del siguiente tipo?*

Encontramos que se crea una reflexión sobre el paso de las características físicas de los fenómenos a los símbolos (tablas, gráficas, expresiones algebraicas, etc.) y de éstos a los fenómenos. Donde algunos posibles resultados que se podrían tener serían como en la Figura 4a, donde el estudiante a partir de las características físicas, pasa de los símbolos al lenguaje verbal.

Características físicas	Símbolos	Lenguaje verbal
<ul style="list-style-type: none"> <li>• El cuerpo se acerca</li> <li>• El cuerpo se aleja</li> <li>• Se detiene</li> <li>• Avanza</li> <li>• Etc.</li> </ul>	<p>distancia</p> <p>tiempo</p>	<p><i>El cuerpo avanza des-de cierta distancia, avanza, se detiene, se regresa más o menos rápido, se detiene y vuelve a avanzar..., etc.</i></p>

Figura 4a. Tránsito entre registro de representaciones

**e) Visualización**

Aunque no se ahonda en ello y en su favorecimiento, podemos notar, que esta presente la noción de visualización, en la práctica de la predicción, pues los autores comentan que en la primera parte se hace uso del sensor sónico de movimiento, por lo cual se vislumbra que ese puede ser un factor para la visualización del comportamiento del móvil en cuestión (ver Figura 5a).



Figura 5a. Movimiento a través del sensor

**f) Aspectos sociales**

En esta propuesta se puede encontrar como fenómeno al movimiento, del cual se estudian características tales como: su posición, las variables que interviene en la descripción del móvil, etc. aunque cabe recalcar que una característica mencionada por los autores, es que las actividades fueron diseñadas pensando “en situaciones cuando se estudia al hombre haciendo matemáticas y no sólo la producción matemática hecha por él. Por ello, las explicaciones que se brindan son en función de las características del humano” (Arrieta y Buendía, 2003, pp. 737).

Así mismo se encontraron en las demás propuestas, el favorecimiento de elementos como: variación y cambio, y relación entre las variables. A continuación mostramos una tabla donde se aprecia el concentrado de elementos encontrados, así como los países de procedencia y su temática: periodicidad (Perio), gráfica de funciones (GF), funciones (F), inecuaciones (I) y series y sucesiones (SS).

País	Temática	Propuesta	Predicción	Modelación	Visualización	Aspectos sociales	Socioepistemología	Tránsito entre registro	Variación y cambio	Relación entre variables
Méx	Perio	Arrieta y Buendía (2003)								
Méx	Perio	Buendía (2006)								
Méx	GF	Cantún et al (2007)								
C Rica	GF	De Faria (2004)								
Méx	GF	Flores (2005)								
Méx	GF	Flores (2007)								
Arg	I	Gatica (2001)								
Arg	F	Medina et al (2003)								
Col	F	Mercado et al (2010)								
Arg	F	Mina et al (2005)								
Méx	F	Pech y Ordaz (2009)								
Méx	F	Sosa y Aparicio (2009)								
Méx	F	Torres y Aparicio (2010)								
Méx	SS	Vázquez(2008)								
Col	F	Villa (2088)								

Tabla 1. Concentrado de características y elementos encontrados

## 5. Conclusiones

Concluimos que los materiales didácticos caracterizados, vinculan elementos con la práctica humana y el carácter científico de los conocimientos matemáticos, como son: la predicción, la visualización y la modelación (al ser estos los más encontrados en las propuestas). Así mismo pudimos notar, que el aspecto social se hace presente cada vez más en las investigaciones, pues vincular lo social en la práctica escolar, favorece la construcción del conocimiento científico-matemático en los estudiantes. Es así que podemos afirmar que el logro del objetivo de las propuestas o sus los resultados favorables que reportan se debe en mayor medida a que las mismas se centran en prácticas y no en el objeto matemático.

Por otro lado, los aspectos sociales, podrían enmarcan la distinción entre la práctica del profesor de antaño y el profesor contemporáneo, pues se visualiza un cambio en la interacción e intervención del profesor, pues de ser un expositor pasaría a ser un guía modelador de la construcción del conocimiento del estudiante.

## 6. Referencias

- Arrieta, J., Buendía, G. (2003) Diseño de situaciones desde una perspectiva de la actividad humana. En J. Delgado (Ed.). *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa*, 17, 736-740. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2), 227-251.
- Cantún, C., Canul, E., Chi, A., Flores, F., López-Flores, I., Pastor, G. (2007). Resignificación de lo periódico en un ambiente tecnológico. *Memoria de la XI Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 57-77.
- Dalcín, M. y Olave, M. (2007). Ecuaciones de primer grado: su historia. En C. Crespo (Ed.), *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 156-161. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Martínez, D., Torres, A., Tellería, A. y Dibut, L. (2007). Estrategia didáctica para flexibilizar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en la universalización de la educación superior. En C. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, 138-143. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Rico, L. (1998). La complejidad del currículo de matemáticas como herramienta profesional. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 1(1), 22-39.
- Souza (s. f). El estado del arte. Recuperado el 9 de enero del 2011 de [http://www.perio.unlp.edu.ar/seminario/nivel2/nivel3/el%20estado%20del%20arte\\_silvina\\_souza.pdf](http://www.perio.unlp.edu.ar/seminario/nivel2/nivel3/el%20estado%20del%20arte_silvina_souza.pdf).

## ANEXO. Referencias de artículos seleccionados

- De Faria, E. (2004) Funciones embotelladas. En J. Delgado (Ed.). *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa*, 17, 584-589. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Flores, C. (2005). Características De Las Gráficas Y Su Relación Con La Modelación De Situaciones De Movimiento. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *En Acta Latinoamericana en Matemática Educativa*, 19, 406-412. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Flores, C. (2007). Formas básicas de graficación y su relación con situaciones de movimiento. En C. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa*, 20, 485-489. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Gatica, S. (2001). Observaciones sobre las soluciones a una tarea de inecuaciones lineales en dos variables realizadas por estudiantes de secundaria. En G. Beitía (Eds.). *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa*, 14, 225-233. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Medina, P., Astiz, M., Vilanova, S., Oliver, R., Rocerau, M., Valdez, G. y Vecino, M. (2003). Funcionando con la computadora. Una experiencia con un asistente matemático. En J. Delgado (Eds.). *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa*, 16(2), 485-489. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Mercado, L., Aguas, N., Arrieta, W. (2010). Comprensión del concepto de función a través de situaciones problema relacionadas con el contexto. En P. Lestón (Eds.). *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa*, 23 551-560. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Mina M., Esteley, C., Cristante, A., Marguet, I. (2005). Experiencia de modelización matemática con alumnos de 12- 13 años. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.). *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa*, 19, 48-54. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Pech, V., Ordaz, G. (2009). El concepto de función en situaciones variacionales. Un estudio de las argumentaciones de los estudiantes. *Memoria de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 38-48.
- Sosa, L., Aparicio, E. (2009). Interactuando con el concepto función en situaciones de modelación. En P. Lestón (Eds.). *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa*, 23, 551-560. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Torres, L., Aparicio, E. (2010). Predicción matemática y contextual. Formas de construcción de discurso en situaciones variacionales. *Memoria de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 77-83.
- Vázquez, R., Buendía, G. (2006). La unidad de análisis: una herramienta para lo periódico en una práctica de predicción. *Memoria de la X Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, 184-193
- Villa, J. (2008). El concepto de función: una mirada desde las matemáticas escolares. En P. Lestón (Eds.). *Acta Latinoamericana en Matemática Educativa*, 21, 551-560. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.