

LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA UTILIZANDO DIFERENTES TIPOS DE REPRESENTACIÓN



Arcelia G. F. Gaspar De Alba Diéguez¹; Otilio B. Mederos Anoceto²;

Sivia A. Mayén Galicia³

¹arceliagaspar@hotmail.com, ²omederosa@gmail.com, ³silmay75@hotmail.com

¹Universidad Autónoma de Guerrero, ²Universidad Autónoma de Coahuila,

³CINVESTAV-IPN

Avance de investigación

Medio superior

Resumen

En este trabajo se presentan los avances de investigación orientados al diseño, experimentación y evaluación de una propuesta didáctica. El objetivo es que estudiantes de bachillerato participen en el proceso de formación del concepto de parábola utilizando la vía genética y diferentes registros de representaciones: verbales, analíticas, tabulares y gráficas. Contiene el estatus epistemológico de la parábola, la propuesta, los objetivos de la investigación, la revisión literaria, el marco teórico que sustenta nuestro trabajo y la metodología.

Palabras clave: *Parábola, formación, concepto, propuesta, representaciones*

1. El planteamiento del problema y del objetivo

Nuestra experiencia como profesora de geometría analítica en el nivel medio superior, nos permite afirmar que los estudiantes confrontan muchas dificultades al abordar el capítulo de la parábola, tales como adquirir el concepto, ampliar su extensión construyendo nuevos elementos, pasar de un tipo de representación a otra (Gaspar de Alba, 2007). Consideramos que estas deficiencias están directamente relacionadas con la planeación y la práctica del proceso de enseñanza del curso, que no tiene en cuenta los procesos de formación y desarrollo de este concepto.

Consecuentemente, planteamos el problema de investigación siguiente: *¿Cómo lograr que los estudiantes participen en los procesos de formación y desarrollo del concepto de la parábola?*

La naturaleza del problema de investigación y el desarrollo alcanzado por la didáctica nos sugiere la creación de un procedimiento didáctico que permita a los estudiantes participar en los procesos de formación y desarrollo del concepto de la parábola. Las características de éste concepto hacen que elijamos la vía genética para llevar a cabo su proceso de formación.

Objetivo: Elaboración, ejemplificación y aplicación de un procedimiento didáctico para que los estudiantes de bachillerato participen en los procesos de formación y desarrollo del concepto de la parábola utilizando la vía genética.

Para dar solución al problema de investigación y dar cumplimiento al objetivo planteado utilizaremos Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC's) ya que son mediadores importantes y son idóneas para observar el desarrollo y evolución que muestren los estudiantes que participen en el proceso de enseñanza y aprendizaje (PEA) de la mayoría de los objetos matemáticos.

Para facilitar la participación de los estudiantes en el proceso de formación del concepto de parábola por la vía genética se utilizarán cortes de un cono, construcciones con regla y compas y, las variantes correspondientes a las TIC's.

Hipótesis: El uso de diferentes registros de representación, y la participación de los estudiantes en el paso de un tipo de registro a otro, es parte integrante de los procesos de formación y desarrollo del concepto de parábola.

2. El estado del arte

Para poder establecer las causas que dieron sentido y significado a la parábola, como se aborda el tema a través del tiempo y cuales son las tendencias de su tratamiento en el momento de realizar nuestra propuesta, hemos realizado investigaciones, las cuales datan desde los orígenes de las cónicas en el siglo VI a.C. hasta nuestros tiempos. Estas revisiones se realizaron en:

- Libros históricos
- Libros de texto
- Artículos científicos
- Tesis de maestría y doctorales
- Páginas electrónicas

3. El marco teórico

Los núcleos fundamentales que integran el *marco teórico* utilizado en este trabajo son:

- El estudio de un concepto en términos de los procesos de formación, desarrollo y generalización conceptual, (Martínez, 2003; Mederos y Martínez, 2006; Mederos y Mederos, 2009).
- La utilización de diferentes registros de representación y la transformación de una representación a otra que favorecen la utilización y articulación de diferentes representaciones (Duval, 1993, 1999 y 2006).
- La dialéctica herramienta–objeto, (Douady, 1995 y 2000; Douady y Parzysz, 1998).
- Los problemas como medios para facilitar la formación, desarrollo y generalización conceptual (Mederos y Martínez, 2005).

4. La propuesta didáctica

Las actividades para construir nuestra propuesta didáctica, están orientadas para que los estudiantes participen activamente en los procesos de formación y desarrollo del concepto de parábola y que medien en el aprendizaje de otros estudiantes en las direcciones siguientes:

- a. Los estudiantes participan en el paso de un tipo de representación a otro. Por ejemplo a partir de una representación verbal deben obtener las representaciones gráficas, analítica y por medio de tablas.
- b. Se parte, preferentemente, de representaciones gráficas de los objetos de la extensión para que los estudiantes determinen las representaciones gráficas del dominio, del codominio, del grafo y de la imagen de la parábola.
- c. Se diseñan actividades para que los estudiantes utilicen una representación analítica de la parábola y determinen las representaciones gráficas de su dominio, codominio, grafo e imagen.

- d. Se diseñan actividades para que los estudiantes a partir de una representación gráfica de un objeto canónico de la extensión y mediante diferentes movimientos de la representación obtengan una colección de representaciones.
- e. Los estudiantes por medio de actividades didácticas, deben partir de la representación analítica de un objeto de su extensión, para obtener nuevas representaciones analíticas por medio de operaciones algebraicas del tipo: multiplicación por números reales y adición de una función constante o una función lineal.
- f. Se diseñan actividades para que los estudiantes participen en la determinación de nuevas propiedades de los elementos de su extensión como, por ejemplo, las regiones de crecimiento y decrecimiento y las regiones de dilatación y contracción.
- g. Los estudiantes realizan un conjunto de actividades que los conducen a comprender que una expresión del tipo $y = x^2$ define tantos arcos de parábolas como subconjuntos de los números reales haya.
- h. Los estudiantes, mediante la resolución de problemas de contexto que se modelan con arcos de parábolas, adquieren variados significados del concepto de parábola.

5. La metodología

Hemos dividido la metodología en tres etapas, que corresponden a las componentes fundamentales de cualquier sistema didáctico: alumnos, profesores y contenidos. Pasamos a describir las tres direcciones.

I. Organización del conocimiento escolar

No conocemos de una organización del conocimiento escolar que contribuya a que los estudiantes participen en los procesos de formación del concepto de parábola por la vía genética y de desarrollo correspondiente en la forma como se ha descrito en la propuesta didáctica en este reporte. Para ello hay que organizar el conocimiento escolar con los objetivos:

- a) Ampliar la colección de elementos conocidos de la extensión del concepto de parábola.
- b) Determinar propiedades de los elementos de la extensión, como por ejemplo, regiones de dilatación y de contracción.

Para dar cumplimiento a este objetivo se organizó el conocimiento escolar teniendo en cuenta aspectos que se describen y ejemplifican parcialmente, ya que se reduce a un estudio analítico:

- b₁) Se expresa la parábola en forma analítica, $f: R \rightarrow R, x \rightarrow f(x) = x^2$, y se organiza el conocimiento para facilitar la participación de los alumnos en los procesos de formación de los conceptos de dominio R , codominio R , grafo $\{(x, x^2) | x \in R\}$ e imagen $\{x^2 | x \in R\}$ de esta parábola (Tabla 1).

Componentes	Representación analítica	Representación gráfica
	De la formación $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}, x \rightarrow f(x) = x^2$	
Dominio	\mathcal{R}	
Codominio	\mathcal{R}	
Grafo	$\{(x, x^2) x \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}$	
Imagen	$\{x^2 x \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{R}$	

Tabla 1: Representaciones de la parábola

b₂) Se transforma el dominio \mathcal{R} en la imagen $[0, +\infty)$ por f , de modo tal que los estudiantes puedan ser guiados para que comprendan que f tiene dos puntos fijos, 0 y 1, que determinan comportamientos muy importantes del paso del dominio a la imagen, que describimos a continuación:

1. El intervalo $(0,1)$ del dominio lo transforma en el intervalo $(0, 1)$ de la forma siguiente, cada sub intervalo $(0, x)$ de $(0,1)$ se contrae en el intervalo $(0, x^2)$ por f .
2. El intervalo $(1, +\infty)$ del dominio lo transforma en el intervalo $(1, +\infty)$ de manera tal que cada sub intervalo $(1, x)$ de $(1, +\infty)$ se dilata en el intervalo $(1, x^2)$ por f .
3. El intervalo $(-1,0)$ del dominio lo transforma en el intervalo $(0, 1)$ de tal forma que cada sub intervalo $(x, 0)$ de $(-1,0)$ se contrae en el intervalo $(0, x^2)$ por f .
4. El intervalo $(-\infty, -1)$ del dominio lo transforma en el intervalo $(1, +\infty)$ de manera tal que cada sub intervalo $(x, -1)$ de $(-\infty, -1)$ se dilata en el intervalo $(1, x^2)$ de $(1, +\infty)$ por f . (Figura 1).

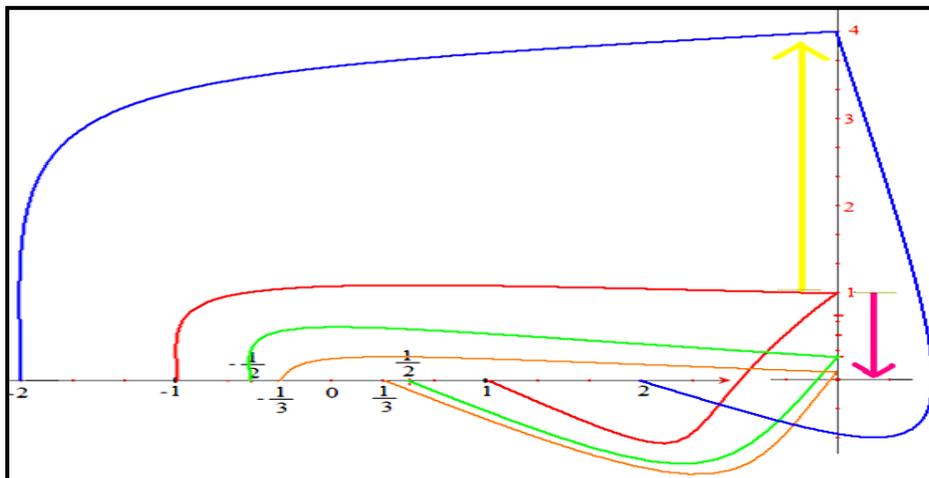


Figura 1: Como transforma la función definida por $f(x) = ax^2$ el dominio

b₃) Se repiten los pasos 1, 2, 3 y 4 para todos los casos de las parábolas con representación analítica $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}, x \rightarrow f(x) = ax^2, a > 1, a = 1, 1 > a > 0, a = 0, 0 > a > -1, a = -1$ y $-1 > a$ (Tablas 2 y 3)

Transformación del dominio en la imagen de la función $f(x) = ax^2, a > 0$	
\mathcal{R}	$(-\infty, -1) \cup \{-1\} \cup (-1, 0) \cup \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\} \cup (1, \infty)$
\mathcal{R}	$\{0\} \cup (0, a) \cup \{a\} \cup (a, +\infty)$

Tabla 2: Como transforma la función definida por $f(x) = ax^2, a > 0$ el dominio

Transformación del dominio en la imagen de la función $f(x) = ax^2, a < 0$	
\mathcal{R}	$(-\infty, -1) \cup \{-1\} \cup (-1, 0) \cup \{0\} \cup (0, 1) \cup \{1\} \cup (1, \infty)$
\mathcal{R}	$(-\infty, a) \cup \{a\} \cup (a, 0) \cup \{0\}$

Tabla 3: Como transforma la función definida por $f(x) = ax^2, a < 0$ el dominio

Para la visualización de la transformación del dominio \mathcal{R} de f en su imagen $[0, +\infty)$ se diseñan actividades en Cabri-Géomètre II.

Para el diseño de las actividades didácticas, seleccionamos materiales de Mata (2010) y Cuellar (2010). Actualmente estamos validando dichas actividades con el grupo piloto para posteriormente aplicarlo a una muestra mayor, la cual se especificará de acuerdo a los intereses del grupo investigador.

c) La resolución de problemas mediante su modelación con arcos de parábolas.

Se plantean problemas del contexto que se modelan mediante arcos de parábolas (Figura 2)

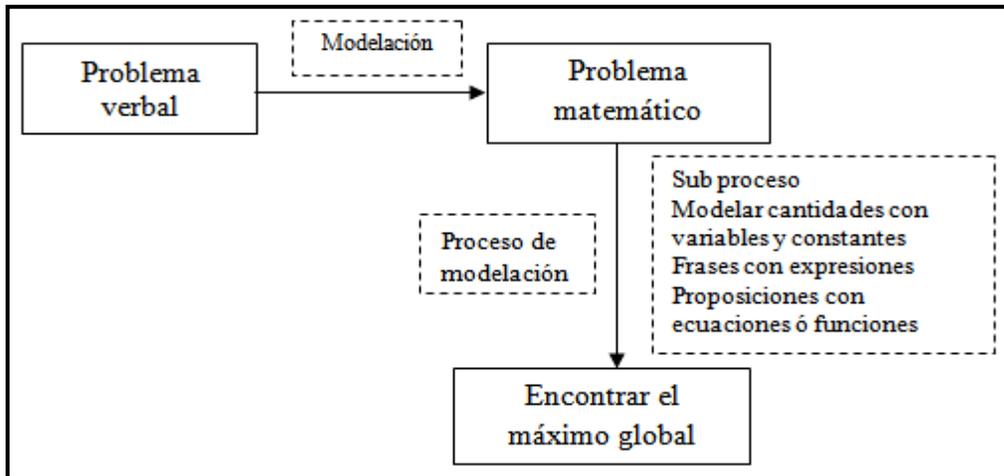


Figura 2: Diagrama de modelación de un problema

d) Paso de un tipo de representación de los objetos de la extensión a otra (Tabla 4).

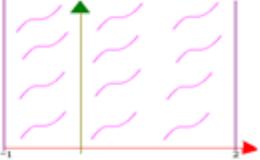
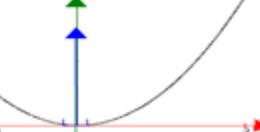
Un arco de parábola		
$[-1,2] \rightarrow \mathcal{R} x \rightarrow f(x) = x^2$	Dominio	Codominio
Dominio	$[-1,2]$	
Codominio	\mathcal{R}	
Región del plano donde está la parábola	$[-1,2] \times \mathcal{R}$	
Grafo	$\{(x, x^2) \mid x \in [-1,2]\} \subset [-1,2] \times \mathcal{R}$	
Imagen	$\{x^2 \mid x \in [-1,2]\} \subset \mathcal{R}$	

Tabla 4: Representación de los objetos de la extensión

II. Diseño de actividades didácticas

Se elaboran hojas de trabajo en correspondencia con la organización del conocimiento escolar para que los estudiantes participen en su propio aprendizaje y se preparen para mediar en el aprendizaje de sus compañeros.

Estas herramientas están diseñadas para que los estudiantes tengan la oportunidad de:

- Expresar ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
- Seguir instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuyen al alcance de un objetivo.
- Construir hipótesis, y diseñar y aplicar modelos para probar su validez.
- Utilizar las tecnologías de la información y comunicación para procesar e interpretar información.
- Elegir fuentes de información relevantes para un propósito específico y discriminar entre ellas de acuerdo a su relevancia y confiabilidad.
- Definir metas y dar seguimiento a sus procesos de construcción del conocimiento.
- Proponer maneras de solucionar un problema y desarrollar un proyecto en equipo, definiendo un curso de acción con pasos específicos.
- Aportar puntos de vista con apertura y considerar los de otras personas de manera reflexiva.
- Asumir una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos equipos de trabajo.

III. Actividades para el aprendizaje activo y mediado de los estudiantes

En este trabajo de investigación, se introduce a la práctica educativa una serie de situaciones didácticas, en las cuales se busca que el alumno interactúe con su entorno y construya el conocimiento en base a su propia experiencia. Las unidades de competencia a las que está dirigida nuestra propuesta son:

Que el alumno:

- Utilice diferentes representaciones de la parábola para resolver problemas.
- Sea capaz de pasar de uno de los registros de representación de la parábola que estudiamos, a otro cualquiera de los restantes.
- Modele problemas de contexto mediante representaciones de arcos de parábola, por ejemplo, con representaciones funcionales del tipo: $I \rightarrow R, x \rightarrow f(x) = \frac{1}{4p} x^2$, donde I es un intervalo.
- Pueda utilizar representaciones funcionales definidas por expresiones del tipo $f(x) = \frac{1}{4p} x^2$ para transformar intervalos del dominio en arcos del grafo e intervalos de la imagen, y para que pueda determinar en qué partes de intervalos del dominio se transforman en partes contraídas.
- Transforme información matemática obtenida de registros gráficos, algebraicos o funcionales de la parábola en información verbal que da solución a problemas del contexto planteados verbalmente.

Para la implementación de la propuesta, se han diseñado un instrumento de diagnóstico y actividades que deberán servir para que los estudiantes reconozcan, construyan y descubran los elementos de la parábola y sus diferentes representaciones.

- Instrumento de evaluación:* Cuestionario para evaluar el dominio que el alumno tiene sobre procesos algebraicos, conceptos básicos y construcciones geométricas, los cuales son necesarios para el desarrollo de ciertas demostraciones y ejercicios relacionados con la parábola y sus diferentes representaciones.
- Cortes en cono de unicel:* Actividad en la cual el alumno realizará cortes en conos de unicel para identificar y definir la parábola.
- Construcción de la parábola:* Actividad donde el alumno construirá e identificará la parábola y sus elementos, con la técnica del doblado de papel.
- Concepto:* A partir de la construcción el alumno podrá definir la parábola.

6. Resultados

Hasta el momento hemos aplicado solo una parte de las actividades diseñadas para la propuesta didáctica. Al finalizar el proceso de experimentación, en una muestra mayor, estaremos en posibilidad de evaluar nuestra propuesta por métodos estadísticos y determinar si *la utilización de la vía genética y diferentes tipos de representación contribuyen a que los estudiantes participen en los procesos de formación y desarrollo del concepto de parábola.*

7. Referencias

Cuellar, J. (2010). *Matemáticas III, Enfoque por competencias*. México: Mc Graw Hill.

9. Tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. En P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, pp. 61-96. México: Iberoamérica.
- Douady, R. y Parzys, B. (1998). La geometría en el salón de clases. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *ICMI Study: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century*. (Cap. 5, V. Hernández, Trad.), pp. 159-192. Kluwer Academic Publishers,
- Duval, R. (1993). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Eds.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. pp. 173-201
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (1ª ed. Traducida). Colombia: GEM
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*. 1(1), 143-168
- Gaspar de Alba, A. (2007). *Efectos y dificultades que produce en el alumno de tercer semestre de preparatoria el aprendizaje de las cónicas a través del uso de la tecnología en el contexto geométrico, con una implementación fundamentada en diversas representaciones*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México.
- Martínez, A. (2003). *Procedimiento metodológico para la generalización de conceptos de los temas Dominio Numérico y Series en la Educación Superior*. Tesis doctoral no publicada. Universidad Central Marta Abreu, Cuba
- Mata, P. (2010). *Matemáticas 3*. México: ST
- Mederos, O.B. y J. E. Martínez, (2005). La resolución de problemas y la formación y desarrollo de conceptos. El concepto de media numérica. *Números*, 62, 53-64.
- Mederos, O.B. y Mederos, B.J. (2009). *Los ejemplos y contraejemplos como herramientas para facilitar el proceso de generalización conceptual*. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23. México: CLAME.
- Tapia, F. (2002). Apolonio, el geómetra de la antigüedad. *Apuntes de historia de las matemáticas*, 1, 19-31.
- Zill, D. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Iberoamérica.