UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA EL TRATAMIENTO DE LOS VALORES EXTREMOS EN FUNCIONES QUE MODELAN SITUACIONES DE MOVIMIENTO

Elizabeth Marín, Leslie Torres
eliza_8877@hotmail.com, torres_leslie09@hotmail.com
Universidad Autónoma de Yucatán
Reporte de investigación
Medio Superior

Resumen
La idea básica de esta propuesta fue la elaboración y aplicación de una secuencia de actividades didácticas que ofreciera al estudiante la libertad de discutir sobre el comportamiento de diversas curvas y la forma en que debería ser el movimiento de un cuerpo para obtener las representaciones planteadas, de tal manera que fuera posible generar puentes que los lleven a analizar los comportamientos de las funciones, de manera global y en las vecindades cercanas a los valores extremos. Para ello se consideró el empleo de un sensor de movimiento, que permitiera una mejor visualización del movimiento y a su vez, el establecer relaciones entre diversos registros de representación; gráfico, verbal y escrito, produciendo con ello la comprensión de las relaciones entre variables y los fenómenos descritos.

Palabras clave: *Valores extremos, función, movimiento*

1. Introducción

El Discurso Matemático Escolar es entendido como la manifestación del conocimiento matemático normado por creencias de los actores del sistema didáctico (alumno, profesor y saber), de lo que es la enseñanza y la matemática, teniendo como consecuencia, el que se ejerza el proceso de enseñanza–aprendizaje considerando a la matemática como un conocimiento acabado, tratando a los conceptos matemáticos en las acciones de enseñar como actos repetitivos o de memorización, sin atender al contexto histórico y social de su construcción (Cordero y Flores, 2007). Pese a ello, se considera importante la inclusión de un contexto en la enseñanza de las matemáticas debido a que parte de los descubrimientos en esta ciencia han sido resultado del desarrollo de determinadas técnicas en contextos concretos que se relacionan con otras prácticas de referencia. Por ello, la escasa unión en el ámbito de la enseñanza de la matemática con otras disciplinas científicas y tecnológicas puede privarla de sus características básicas desde el punto de vista científico, haciendo más difícil su asimilación (Sánchez, García y Sánchez-Pérez, 1999 citado en Marcolini y Perales, 2005).

Bajo esta línea, se ha identificado que uno de los problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es su ejercicio de forma rutinaria y descontextualizada, lo cual produce que los estudiantes identifiquen a la matemática como algo carente de sentido y significado. Este tipo de enseñanza, que induce a conductas mecánicas e imitativas, produce, entre otras cosas, interpretaciones erróneas sobre conceptos matemáticos. Dicho problema, es uno de los más graves que afronta la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos.

Al respecto, Hiebert y Lefevre (1986), citados en Moreno y Cuevas (2004), mencionan que, mientras los procedimientos algorítmicos se aprenden más o menos, o incluso bien, los conceptuales carecen de significado, lo que conduce a un conocimiento procedimental sin sentido. Este hecho queda en evidencia cuando los estudiantes se enfrentan a problemas no rutinarios; en este sentido, Orton (1983), citado en Moreno y Cuevas (2004), menciona que la mayoría de los errores se cometen cuando se resuelven problemas de cálculo diferencial asociados con aspectos conceptuales, en particular con los conceptos de máximos y mínimos, pues durante su enseñanza, se emplean de manera mecánica procedimientos matemáticos en la resolución de problemas; por lo que los estudiantes no dotan de significado a tales conceptos.

Ante esto, se presenta una propuesta didáctica como alternativa al tratamiento escolar dado a los valores extremos en funciones, implementando actividades que involucren la modelación con sensores de movimiento. Teniendo como propósito identificar e interpretar los valores extremos, máximos y mínimos, de funciones, a través del análisis gráfico y numérico de los datos obtenidos en la modelación de una situación de movimiento con sensor, para resolver e interpretar problemas de optimización.

2. Fundamentación

El interés particular de esta propuesta, es atender algunos errores asociados a los conceptos de máximos y mínimos de una función, debido a que uno de los problemas más graves que afronta la enseñanza de las matemáticas en todos los niveles educativos es que usualmente se enseña con una fuerte carga operativa, en deterioro de la parte conceptual. Tanto el docente como el alumno ponen énfasis en la parte operativa y dejan de lado la parte conceptual (Amit y Vinner 1990; Oaks, 1987/1988,1990; Schoenfeld, 1985; Hiebert y Lefevre, 1986, citado en Moreno y Cuevas, 2004). Produciendo que los estudiantes conozcan los algoritmos de la resolución de problemas pero ignoren el significado de los conceptos.

Por ello puede decirse que un problema en el aprendizaje de las matemáticas, se encuentra en el hecho de que la enseñanza no logra transmitir ideas matemáticas para encarar los problemas que plantea el campo de las ciencias experimentales. Por tanto, se propone hacer uso de elementos como la visualización, la predicción, el reconocimiento de patrones, el recurso de la analogía, la inducción, los diversos modos de validación y todo aquello que permitió, en algún momento, la elaboración del conocimiento, construcción y transmisión de información socialmente útil y que hoy puede estar omitida en la enseñanza (Marcolini y Perales, 2005).

Con el fin de indagar la forma en que se determinaban los valores máximos y mínimos de las funciones, se analizó la manera en la que estos eran concebidos, empleados, institucionalizados o determinados en cierta época y cultura científica.

En este análisis se identificaron dos momentos importantes en las interpretaciones de máximos y mínimos las cuales fueron presentadas por Leibniz (1684), L'Hospital (1696) y Agnesi (1748), citados en Castañeda (2006).

Leibniz (1684) hace una descripción del comportamiento infinitesimal, en el que caracteriza al máximo, usando dos diferentes criterios. El primero, a través de la comparación de estados, donde precisa que el máximo queda determinado por la línea GF (la mayor de las ordenadas). El segundo, a través de una condición geométrica, explica que la tangente sobre la curva en el punto máximo es paralela al eje de las abscisas (Figura 1).

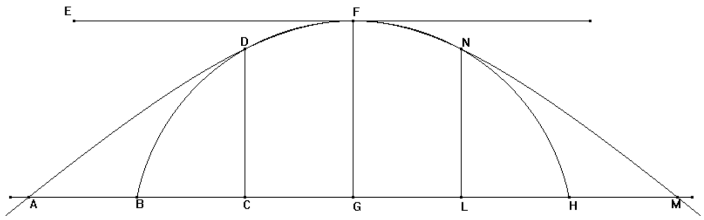


Figura 1

En las obras de L'Hospital (1696) y Agnesi (1748) se presenta una nueva versión del cálculo para su difusión, que se distingue de la expuesta por Leibniz, debido a la intencionalidad con la que fueron escritas.

L'Hospital (1696), menciona en sus argumentaciones al menos tres aproximaciones distintas que muestran el significado asociado a la noción de máximo o mínimo. La primera, está basada en la noción de tamaño; centra su propiedad en discriminar, entre un conjunto de ordenadas, la que cumpla con la característica de ser la más grande o la más pequeña. Explica:

> Sea MDM una línea curva cuyas ordenadas PM, ED, y PM sean paralelas entre sí, tal que al incrementarse continuamente la abscisa AP, la ordenada PM crece también hasta cierto punto E, después del cual disminuye. Entonces, la línea ED será denominada la mayor o la menor ordenada (Figura 2) [L'Hospital, 1696, p.41]

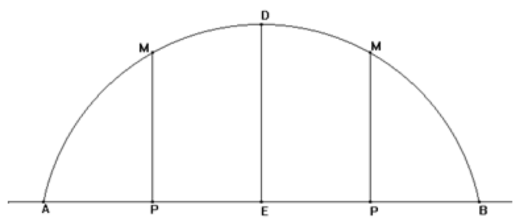


Figura 2

La segunda se fundamenta en identificar el signo de las diferencias, en una región muy cercana al máximo.

> Si al crecer APPM también crece, es evidente que su diferencia Rm será positiva con relación a la de AP y que, por lo contrario, cuando PM disminuya al crecer la abscisa AP, su diferencia será negativa (Figura 3) [L'Hospital, 1696, p.41-42]

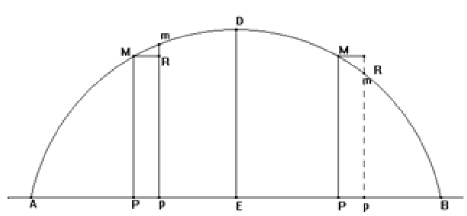


Figura 3

Afirma L'Hospital que una diferencia no puede convertirse de positiva a negativa si no se hace pasar por cero, o por infinito. De esta manera, el máximo es nombrado como un punto por el que las diferencias cambian de signo.

El tercer argumento se sustenta en observar la posición relativa que guarda la subtangente y la tangente, a medida que se consideran nuevos máximos en los puntos. El máximo se alcanza cuando la tangente se vuela horizontal y paralela a la subtangente; de manera análoga, esto pasa con el mínimo. Explica:

> Supóngase una tangente en el punto M, y su respectiva subtangente PT si la subtangente PT aumenta [hacia la izquierda] a medida que MP se acerca a DE, es claro que cuando se construya la tangente en el punto D, la subtangente tiene una magnitud infinita. De esta forma, cuando AP rebasa a AE, la subtangente PT se vuelve de positiva a negativa, o al contrario.

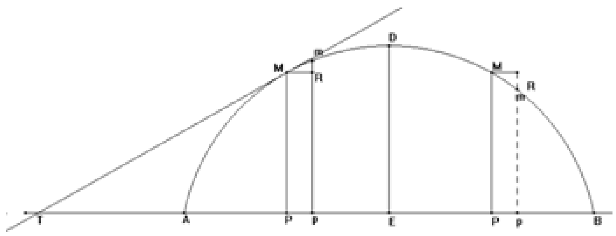


Figura 4

Agnesi (1748), distingue cuatro caracterizaciones sobre los conceptos de máximos y mínimos, la primera hace un reconocimiento de lo variacional; la segunda, a la que Castañeda (2006) denomina *signo de las diferencias infinitesimales* (sobre un argumento analítico), destaca que muy cerca del máximo las diferencias pasan de un signo a otro; la tercera alude a la propiedad infinitesimal (analítico) donde explica que cerca del máximo ocurren las variaciones más pequeñas, mientras que la cuarta; denominada propiedad analítica, explica una regla: *en un máximo se determinan diferencias nulas o infinitas.*

La existencia de varios argumentos acerca de una misma idea es un rasgo que distingue al discurso de L'Hospital y Agnesi. Sobresale el tratamiento geométrico-analítico, en el que se explica el comportamiento de las diferencias en vecindades muy pequeñas sobre las curvas geométricas. Para este tratamiento se hace uso de la graficación como una de las estrategias más fecundas para el análisis de las funciones en contextos matemáticos y extramatemáticos (Flores, 2007) ya que, la gráfica de una función permite ver características globales como las variaciones, el crecimiento, la continuidad, la concavidad, los máximos y los mínimos, etc.

Además Torres y Suarez (2005), proponen la representación gráfica por medio de la simulación de un fenómeno físico, donde los dispositivos transductores registren los datos y las calculadoras con poder de graficación los convierten en tablas y gráficas que los estudiantes puedan modificar al cambiar las características de su movimiento, identificando los cambios que se producen en la gráfica. De esta forma se analiza un fenómeno y al mismo tiempo su representación.

El empleo de la tecnología en la educación matemática ofrece entre otras cosas la posibilidad de que los estudiantes manipulen e interactúen con las situaciones planteadas y con ello generen y validen conjeturas que los conduzcan hacia la construcción del conocimiento, dotando de sentido y significado a cada uno de los conceptos desarrollados.

3. Método

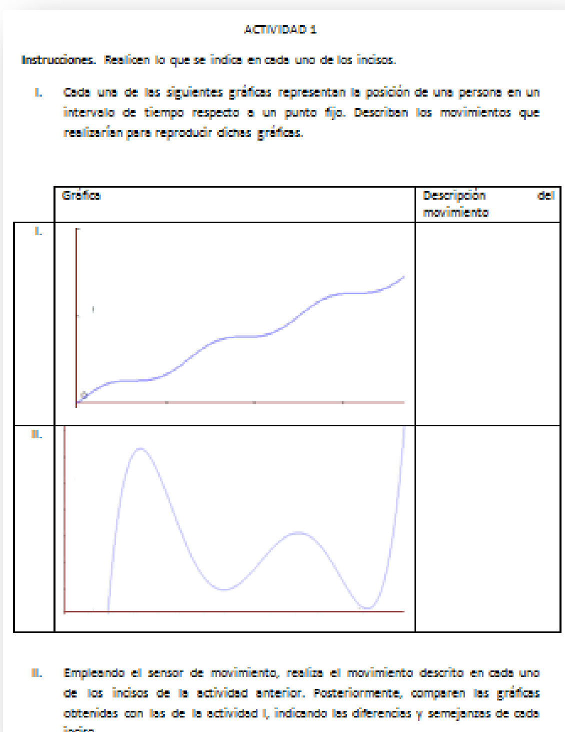
El interés particular de esta propuesta, es atender errores asociados a los conceptos de máximos y mínimos de una función producidos por la falta de significado asociado, por parte de los estudiantes, a dichos conceptos. Para ello se propone la implementación de una secuencia didáctica desarrollada a partir de una ingeniería didáctica.

La ingeniería didáctica es una metodología que permite el diseño y evaluación de secuencias didácticas a través de diversos análisis y fases. El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases: Análisis preliminares, Concepción y análisis a priori de las situaciones didácticas, Experimentación y Análisis a posteriori y validación (De Faria, 2006).

Con base en los análisis preliminares se realizó el diseño de una secuencia didáctica, la cual constó de dos actividades gráfico-variacionales a realizar en equipos de tres personas. Tales actividades se desarrollaron en dos sesiones de 1:20 min.

La actividad I tuvo como propósito que los estudiantes analicen el comportamiento de una curva construida a partir de su propio movimiento, esto mediante el empleo de un sensor de movimiento, esperando con ello dotar de sentido a las gráficas.

La actividad II se centró en analizar de manera más puntual el comportamiento de las gráficas en los valores extremos, mediante el apoyo de una animación en el programa Sketchpad 4.0 de geometría dinámica, utilizando diferentes tratamientos para los valores extremos.



ACTIVIDAD 1

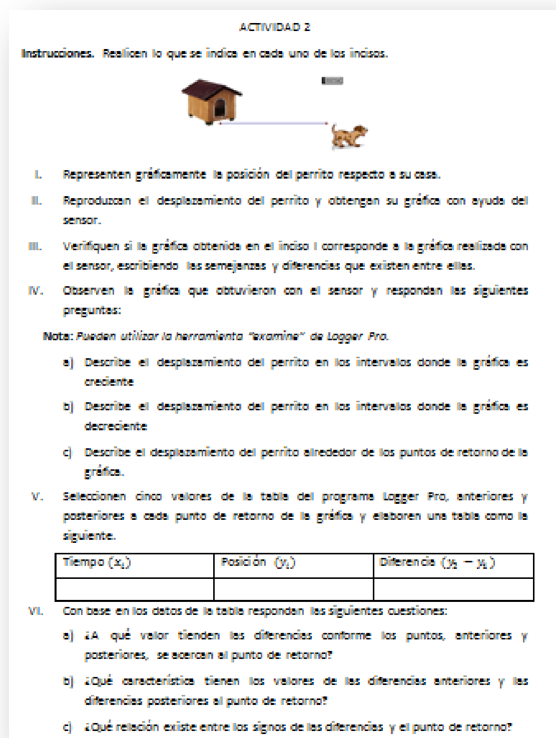
Instrucciones. Realicen lo que se indica en cada uno de los incisos.

I. Cada una de las siguientes gráficas representan la posición de una persona en un intervalo de tiempo respecto a un punto fijo. Describan los movimientos que realizarían para reproducir dichas gráficas.

	Gráfica	Descripción del movimiento
I.		
II.		

II. Empleando el sensor de movimiento, realiza el movimiento descrito en cada uno de los incisos de la actividad anterior. Posteriormente, comparen las gráficas obtenidas con las de la actividad I, indicando las diferencias y semejanzas de cada inciso.

Figura 5



ACTIVIDAD 2

Instrucciones. Realicen lo que se indica en cada uno de los incisos.

I. Representen gráficamente la posición del perrito respecto a su casa.

II. Reproduzcan el desplazamiento del perrito y obtengan su gráfica con ayuda del sensor.

III. Verifiquen si la gráfica obtenida en el inciso I corresponde a la gráfica realizada con el sensor, escribiendo las semejanzas y diferencias que existen entre ellas.

IV. Observen la gráfica que obtuvieron con el sensor y respondan las siguientes preguntas:

Nota: *Pueden utilizar la herramienta "examine" de Logger Pro.*

a) Describe el desplazamiento del perrito en los intervalos donde la gráfica es creciente

b) Describe el desplazamiento del perrito en los intervalos donde la gráfica es decreciente

c) Describe el desplazamiento del perrito alrededor de los puntos de retorno de la gráfica.

V. Seleccionen cinco valores de la tabla del programa Logger Pro, anteriores y posteriores a cada punto de retorno de la gráfica y elaboren una tabla como la siguiente.

Tiempo (x_i)	Posición (y_i)	Diferencia ($y_2 - y_1$)

VI. Con base en los datos de la tabla respondan las siguientes cuestiones:

a) ¿A qué valor tienden las diferencias conforme los puntos, anteriores y posteriores, se acercan al punto de retorno?

b) ¿Qué característica tienen los valores de las diferencias anteriores y las diferencias posteriores al punto de retorno?

c) ¿Qué relación existe entre los signos de las diferencias y el punto de retorno?

Figura 6

El instrumento se aplicó a tres grupos de estudiantes de tercer año de bachillerato. Cada grupo conformado por tres estudiantes. Al término de cada actividad se promovía la discusión de las respuestas para observar la forma en que los participantes explicaban sus razonamientos.

En la aplicación del instrumento se video-registraron las producciones verbales, escritas y gestuales de los participantes.

4. Resultados

Para el análisis de resultados se empleó la siguiente notación. E_1 la cual hace referencia al equipo uno y A_1 que se refiere al alumno uno del equipo correspondiente. Por ejemplo, E_2: A_3: corresponde al alumno tres del equipo dos.

De la Actividad I se observó que los estudiantes consideran las variables: velocidad, aceleración, distancia y tiempo para describir los movimientos; inicialmente, se centraban en la velocidad y la aceleración pero conforme analizaban los movimientos que debían realizar para obtener las gráficas se percataban que la distancia y el tiempo eran fundamentales, por tanto eran incluidas en sus argumentos. Asimismo, mencionan el cambio de sentido en el desplazamiento cuando hablan de un punto de regreso, haciendo referencia al punto de retorno. Por ejemplo:

> $\boldsymbol{E_2}$: $\boldsymbol{A_1}$: *Me mantengo un tiempo quieto…* $\boldsymbol{A_2}$: *...luego avanza rápido* $\boldsymbol{A_3}$: *si se mantiene fijo, fíjate, es como empezar a correr, corrió hasta aquí (punto más lejano) y otro poco caminó.* $\boldsymbol{A_1}$: *No, velo bien. Esa es una misma distancia, ...entonces retrocedió, eso significa no parar, regresar una distancia que ya diste.* $\boldsymbol{A_3}$: *Si retrocedió, ...partió de aquí (señala su hoja), corrió esto hasta acá y regreso, obviamente sabes que regresó.* $\boldsymbol{A_1}$: *Corrió en sentido opuesto.*

Además, identifican el significado de los ejes en la situación planteada, esto es, se percatan que el eje x corresponde al tiempo y el eje y a la distancia. Pese a ello, uno de los equipos no logra identificar lo que representan los ejes, ellos mencionan la velocidad y el tiempo. Hablan de un punto fijo al que algunos llaman centro dejando ver la idea del origen en las gráficas.

> $\boldsymbol{E_1}$: $\boldsymbol{A_2}$: *...de un punto estático, aumentar la velocidad, disminuirla, aumentar la velocidad a la mitad de la primera, bajar la velocidad hasta casi un punto estático y después dispararla al máximo.*

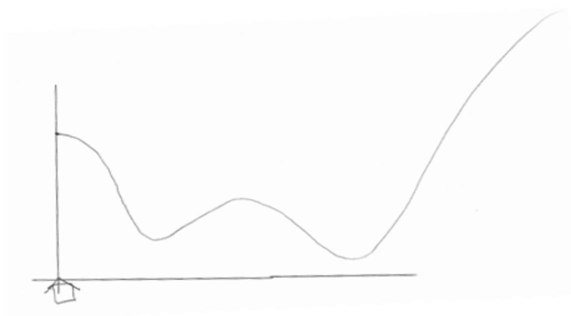
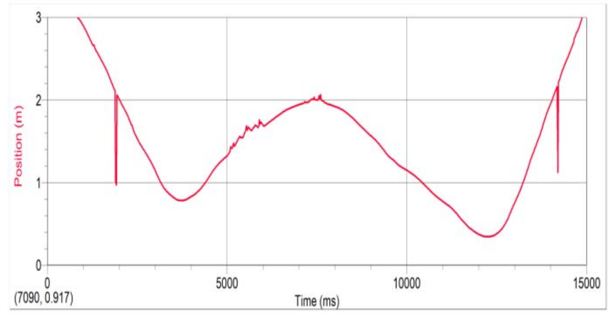
> $\boldsymbol{E_3}$: $\boldsymbol{A_2}$: *...se mueve (hace un movimiento rectilíneo con la mano),* $\boldsymbol{A_1}$: *...no es cierto, no se mueve…esto es distancia, tiempo (señala los ejes de la gráfica).*

En el apartado 2 de la actividad 1, se observó cómo los estudiantes, mediante el empleo del sensor, le dan un significado a las gráficas, se identifica la relación entre distancia, tiempo y velocidad en una curva y explican con mayor convicción lo que representan los ejes. Logrando realizar, a través del movimiento, las curvas dadas.

> $\boldsymbol{E_1}$: $\boldsymbol{A_1}$: *...no sabía que registraba también mi distancia pensé que solamente la velocidad como la del coche.*

> $\boldsymbol{E_3}$: $\boldsymbol{A_1}$: *...estás en medio, lo alejas hasta acá y lo acercas todo (realiza el movimiento con la mano), lo vuelves a alejar todo.* $\boldsymbol{A_3}$: *...comenzó diferente, comenzó acá (señala eje) y no acá (señala el otro eje), por eso te dije que en el sensor no (se refiere a que no debía comenzar cerca del sensor),* $\boldsymbol{A_1}$: *ah! Ya! Espera un tiempo que empiece a trabajar el sensor y realiza el movimiento.* $\boldsymbol{A_3}$: *...espero, empiezo, me alejo, me acerco, me alejo hasta aquí, me acerco y me alejo hasta donde quiera.*

En la actividad II, se observó que el trabajo realizado con el sensor en la actividad anterior, permitió que se obtuviera una gráfica adecuada que represente el desplazamiento de la animación. Esto se ilustra por ejemplo en lo realizado por el Equipo 2.

	
Gráfica realizada por los estudiantes con base en la observación del movimiento de la animación.	Grafica obtenida con el sensor de movimiento al reproducir el desplazamiento de la animación.

Los argumentos empleados por los estudiantes del Equipo 2 para la elaboración de la gráfica que represente el movimiento de la animación fueron:

> $\boldsymbol{A_1}$: *...Aquí esta su casa, punto cero, regresa, no llega se queda cerca.* $\boldsymbol{A_3}$: *Pero va muy lento tienes que alargar esa onda.* $\boldsymbol{A_2}$: *Más inclinado.*

De igual manera se observó que cuando se les plantea una pregunta matemática dentro de un contexto extramatemático los estudiantes dan respuestas en la matemática olvidando el contexto planteado. Esto se observa en la respuesta dada por los estudiantes del equipo 3 cuando se les cuestiona acerca del comportamiento gráfico ante cierto movimiento de la animación.

Pregunta: ¿Qué comportamiento tiene la gráfica cuando el perrito se aleja, se acerca y cambia de sentido?

> $\boldsymbol{A_3}$: *creciente (señala la animación mientras se mueve el perrito),* $\boldsymbol{A_2}$: *se aleja,* $\boldsymbol{A_3}$: *decreciente,* $\boldsymbol{A_2}$: *se acerca, ...¿sabes qué hace? ... cerca del punto de retorno disminuye su velocidad.* $\boldsymbol{A_1}$: *sí, disminuye su velocidad y se cambia el signo,* $\boldsymbol{A_2}$: *¿Se cambia qué?,* $\boldsymbol{A_1}$: *el signo, porque se aleja y regresa.* $\boldsymbol{A_2}$: *no puede cambiar de signo el perrito, disminuye su velocidad para que pueda tomar su retorno.* $\boldsymbol{A_3}$: *Se cambia de creciente a decreciente.* $\boldsymbol{A_1}$: *... el perrito cambia de sentido.*

En la parte 2 de esta actividad los estudiantes realizan un análisis numérico en las vecindades cercanas a los valores extremos, identificando que alrededor de estos se da un cambio en el signo de las diferencias y éstas tienden a cero.

> $\boldsymbol{E_1}$: *...Se van acercando al cero, del positivo se va acercando a cero y el más negativo se va haciendo cero, ...depende de que punto de retorno, de aquí van de positivo a negativo y en el otro al revés, ...el punto de retorno sería en el que las diferencias están más cercanas a cero y en la que las diferencias de un lado son positivas y del otro negativas.*

5. Conclusiones y reflexiones

Se concluye que al implementar la propuesta, los estudiantes logran identificar las variables involucradas en la situación y al mismo tiempo establecer una relación existente entre las mismas. De igual manera realizan un tránsito entre la situación y la graficación empleando diversos registros de representación como el verbal, escrito, gráfico y numérico.

Asimismo, se considera que esta propuesta puede ser empleada para una mejor comprensión del concepto función ya que en su aplicación, se observa como algo dinámico, donde los estudiantes establecen relaciones entre las variables y analizan diferentes formas de representarla.

De igual manera, el empleo de la tecnología, mediante el sensor de movimiento y animaciones, produce una mayor motivación y atención por parte de los estudiantes a las actividades planteadas; los estudiantes indican que con este tipo de actividades es más sencillo entender el tema, que es más divertido porque se aprende haciéndolo, ya que es más difícil imaginar gráficas que hacer el movimiento para obtenerlas.

Sin embargo, una desventaja del empleo del sensor, es que los datos numéricos obtenidos presentan ruido, lo que podría dificultar el análisis numérico e incluso dar resultados erróneos; en este caso se propone que el profesor apoye en la selección de los datos a emplear.

Agradecimientos

Agradecemos al LEM. Alejandro López Rentería por su apoyo en el diseño e implementación de la propuesta.

6. Referencias

Castañeda, A. (2006). Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L'Hospital y de María G. Agnesi. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9 (2)*. 253-265.

Cordero, F y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 10* (1), 7-38.

De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*. 1(2).

Flores, C. (2007). Formas básicas de graficación y su relación con situaciones de movimiento. En C. Crespo Crespo (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 20*. 485-489. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Marcolini, M y Perales, J. (2005). La noción de predicción: análisis y propuesta didáctica para la educación universitaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 8(1), 25-68.

Moreno, S. y Cuevas, C. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo Diferencial. *Revista Educación Matemática, 16 (002)*. 93-104.

Torres, A. y Suárez L. (2005). La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología. En J. Lezama, M. Sánchez y J. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18*, 645-650. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.