

## MODELACIÓN MATEMÁTICA DE LA RELACIÓN ENTRE LA FUERZA CORTANTE Y EL MOMENTO FLECTOR



Otilio B. Mederos Anoceto, Mariem Mederos Madrazo, Rita Roldán Inguanzo  
omederosa@gmail.com, mariem.mederos@gmail.com, rroldancu@yahoo.es  
Universidad Autónoma de Coahuila, México. Universidad de la Habana, Cuba.  
Experiencia Didáctica  
Superior

### Resumen

En este trabajo se presenta una organización del conocimiento escolar para la modelación de dos conceptos relativos a vigas y sus relaciones: fuerza cortante y momento flector. Mediante conceptos del cálculo diferencial se construyeron sendos modelos para ellos. Por medio de operadores diferenciales o integrales se modelaron dos de las relaciones entre los mismos, de tal forma que dada información de un modelo se puede determinar información por medios de los operadores del otro modelo. Se diseñaron y aplicaron tres hojas de trabajo y se realizaron tres actividades grupales, en una carrera de matemáticas aplicadas, para facilitar el aprendizaje activo y mediado de los estudiantes, respectivamente. En el trabajo se presentan, además, los resultados de su aplicación.

**Palabras clave:** *Modelación, matemática, cortante, momento*

### 1. Introducción

Un modelo matemático es un sistema, (colección de objetos y relaciones matemáticas), que se ha logrado, entre otras, mediante una de las variantes siguientes: se ha obtenido mentalmente, se ha realizado en forma material, se ha expresado verbalmente, visualmente o simbólicamente, se ha descrito mediante las leyes y principios de una ciencia. El objetivo del modelo es describir objetos, (fenómenos, medios o sistemas), con el fin de ayudar a entender mejor dichos objetos. La modelación es el proceso de construcción de modelos de objetos (Mederos y González, 2005).

En la Educación Matemática, en relación con el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) se utiliza la modelación, fundamentalmente en tres direcciones: el PEA *de, por medio de y para* la modelación. Entre la modelación y la resolución de problemas existen dos relaciones muy importantes, los problemas como herramienta para formar modelos (objetos) y los modelos como herramientas para resolver problemas (objetos).

En diferentes áreas de ciencias e ingeniería es necesario determinar las relaciones que existen entre varios conceptos, para pasar información de uno de esos conceptos a otros; pero puede ocurrir que las herramientas internas del área sean insuficientes para determinarlas. En este caso, se recurre a otras áreas, como por ejemplo la matemática o la física, para mediante procesos de modelación establecer las relaciones entre conceptos matemáticos que modelan los conceptos del área no matemática y, posteriormente, utilizar esas relaciones para determinar información matemática que pueda ser transferida a la información buscada.

En las carreras de arquitectura, ingeniería civil e ingeniería mecánica, es muy importante establecer las relaciones que existen entre cinco conceptos (parámetros estáticos) relativos a vigas de una luz: la intensidad de carga, la fuerza cortante, el momento flector, el ángulo de giro y la elástica de la viga. Desde el punto de vista disciplinar está resuelto el problema de la modelación matemática de estos cinco conceptos y de sus relaciones, así como los problemas de transferencia

de información matemática que permite conocido uno de los conceptos determinar información de los restantes.

Desde el punto de vista escolar hay que integrar conocimientos de estructuras lineales, leyes físicas y conocimientos matemáticos. Esto requiere de un trabajo interdisciplinar, que depende de la carrera en la cual se vaya a dar solución escolar al problema. Surge entonces el *problema* de investigación que planteamos en forma de pregunta a continuación:

¿Cómo organizar el conocimiento escolar, diseñar y aplicar herramientas didácticas que faciliten a los estudiantes la modelación de los cinco parámetros estáticos y de sus relaciones?

El *objeto* de esta experiencia didáctica es el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura optativa “Tópicos Selectos de Análisis Matemático”, del séptimo semestre de una carrera de matemáticas aplicadas.

Las características del objeto determinaron que se organizara el conocimiento escolar dando prioridad a los contenidos de ingeniería y de física, ya que los estudiantes tenían una buena formación matemática, pero desconocían los conceptos estáticos.

La naturaleza del problema y del objeto, condujeron a que se seleccionaran como herramientas didácticas hojas de trabajo para el aprendizaje activo y el diseño de actividades grupales para el aprendizaje mediado. Consecuentemente, se precisa que la experiencia didáctica tiene como *objetivo*: organizar el conocimiento escolar dando prioridad a los contenidos de ingeniería y de física, y elaborar y aplicar hojas de trabajo, así como desarrollar actividades grupales para facilitar el aprendizaje activo de los estudiantes y su mediación en el aprendizaje de otros.

En este trabajo presentamos la solución del problema investigación, restringida a los conceptos de fuerza cortante y momento flector en una carrera de matemáticas aplicadas.

## 2. Marco teórico

Una de las vías fundamentales para el estudio de conceptos de áreas extra matemáticas es la modelación matemática. Uno de los núcleos que conforman el *marco teórico* utilizado en este trabajo es el estudio de conceptos y relaciones entre conceptos utilizando la modelación como se presenta en (Mederos y González, 2005).

Otro de los ejes que sustentan el marco teórico es: “la dialéctica herramienta-objeto” (Douady y Parzys, 1998), que se refiere al proceso mediante el cual un conocimiento se utiliza al principio como una herramienta implícita para resolver un problema, y después, como un objeto de estudio. Más tarde, este objeto se aplica como una herramienta explícita para la resolución de otros problemas. Tanto en la matemática escolar como en la disciplinar, el conocimiento asume el estatus de herramienta (implícita o explícita) y de objeto (Douady, 2000).

## 3. Método

La asignatura “Tópicos Selectos de Análisis Matemático” de la carrera de Matemáticas Aplicadas de la UAdeC, Coahuila, México, es optativa y se desarrolla en el séptimo semestre con una frecuencia de 5 horas semanales. La población que fue objeto de estudio en la investigación fue de siete alumnos, cuatro con calificaciones anteriores excelentes, uno buenas calificaciones y dos

con bajas calificaciones. Estos alumnos habían aprobado varios cursos de cálculo y de análisis matemático, pero no tenían conocimientos suficientes relativos a los parámetros estáticos, por lo que hubo que dedicar tiempo al desarrollo de estos conocimientos.

El método que se presenta está constituido por un conjunto de pasos, para dar cumplimiento al objetivo y solución al problema de investigación.

1. Construir una organización del conocimiento escolar relativo a conocimientos de vigas de una luz, particularmente en lo concerniente a los conceptos estáticos, que facilite la modelación matemática e integración de cinco parámetros estáticos, así como el diseño de herramientas didácticas.
2. Diseñar y aplicar hojas de trabajo con actividades para aprendizaje activo.
3. Evaluar el aprendizaje de los estudiantes al dar solución a las hojas de trabajo
4. Diseñar y aplicar actividades grupales para aprendizaje mediado.
5. Evaluar el aprendizaje, y la mediación, de los estudiantes durante las actividades grupales.
6. Mediación del profesor para lograr las generalizaciones no obtenidas por los estudiantes.

Los problemas que se presentaron en las hojas de trabajo debían ser resueltos de forma independiente. Posteriormente había una actividad grupal en la que cada problema era presentado por un estudiante. Los estudiantes restantes realizaban una valoración crítica de la presentación y de las intervenciones de los alumnos que le precedieron. Finalmente el profesor hacía las generalizaciones y comentarios necesarios del problema en discusión y se procedía de igual forma con el siguiente problema.

Esta fue la primera vez que estos estudiantes tuvieron una experiencia de aprendizaje activo mediante hojas de trabajo. No estaba claro para ellos que para lograr la mediación de cada estudiante en el aprendizaje de otros, es necesario una discusión científica lo más profunda posible, lo cual implica corregir todos los errores y construir en conjunto la mejor solución, que puede distar mucho de la inicialmente presentada. Fue también la primera vez que los estudiantes utilizaron operadores diferenciales e integrales, para determinar relaciones entre conceptos de una disciplina externa a la matemática, y para integrar estos conceptos a partir de la integración de sus modelos y de los modelos matemáticos de sus relaciones.

A continuación se describen algunos de los pasos del método.

*Sobre la organización del conocimiento.* Se presenta la organización del conocimiento escolar relativa a la modelación de los conceptos de fuerza cortante y momento flector, y de dos relaciones entre ellos. Para facilitar la comprensión de los estudiantes fue necesario, además, definir los conceptos de viga de una luz y de intensidad de carga; así como realizar la modelación geométrica y analítica de estos conceptos. Consideramos que este es un aporte importante de la investigación educativa, porque no conocemos una organización del conocimiento dirigida a estudiantes de matemática como la que presentamos.

*Definición y modelos del concepto viga.* Se llama viga a todo elemento constructivo horizontal cuya longitud es “mucho mayor” que su ancho y su altura, independiente de la forma de su sección transversal recta. En el trabajo se consideran vigas que tienen una sección transversal

uniforme, el material con que se han construido es homogéneo y el sistema de cargas a las que están sometidas las vigas produce deformaciones pequeñas, una vez que dejan de actuar las vigas vuelven a su estado inicial sin que existan deformaciones permanentes.

En las figuras 1a), 1b), 2a) y 2b) se muestran un modelo geométrico tridimensional, bidimensional, en una dimensión y uno analítico de una viga horizontal de sección transversal recta y rectangular, respectivamente. El centroide de una sección transversal de una viga es un punto que define el centro geométrico de la sección. La línea de puntos que une los centroides de todas las secciones transversales de una viga, en azul en la figura 1, recibe el nombre de eje de simetría.

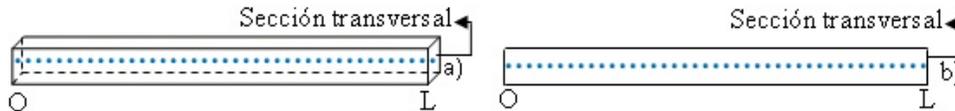


Figura 1. Modelos geométricos de una viga horizontal: a) tridimensional y b) bidimensional

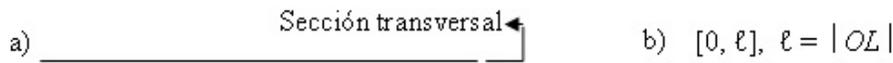


Figura 2. Modelos de una viga horizontal: a) geométrico en una dimensión, y b) analítico

*Definición y modelos del concepto intensidad de carga.* Si sobre la viga actúan fuerzas en un plano vertical que contiene al eje de simetría, la viga se deforma como se muestra en la figura 3. El eje de simetría deformado se llama curva elástica o simplemente elástica.

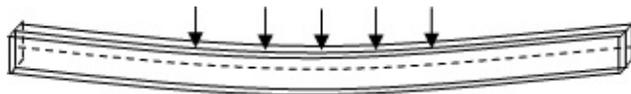


Fig. 3. Modelo geométrico tridimensional de la elástica

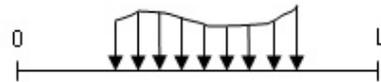


Fig. 4. Modelo bidimensional de una intensidad de carga variable

Hay diferentes formas en las cuales las fuerzas externas pueden ser aplicadas sobre una viga. En este trabajo se consideran solo las uniformemente distribuidas o las variables sobre toda la viga, o una parte de ella. En todos los casos se expresan mediante su intensidad, (fuerza/longitud). En la figura 4, se modela geoméricamente en dos dimensiones una intensidad de carga y en las figuras 5 y 6 se presentan los modelos en un sistema cartesiano y analítico, respectivamente; considerando que  $\ell = |OL|$ ,  $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ell$ ,  $q_1$  es una función real definida sobre  $[0, \ell]$  y  $\chi_{[a_1, a_2]}$  es una función característica.

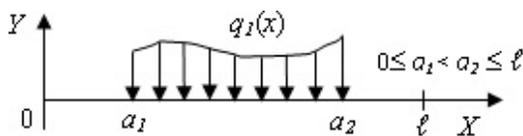


Fig. 5. Modelo de la intensidad de carga en un sistema cartesiano.

$$q: [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow q(x) = q_1(x) \chi_{[a_1, a_2]}(x)$$

Fig. 6. Modelo analítico de una intensidad de carga.

*Definición y modelos de la fuerza cortante.* Sean dados dos pedazos de la viga de la figura 1a), determinados por las secciones rectas  $mn$ ,  $m_1n_1$  y  $m_2n_2$ . Si la viga está en equilibrio, entonces las fuerzas internas en la sección  $mn$  deben ser tales que equilibren a las fuerzas externas en el pedazo  $mnn_2m_2$ . La resultante  $V$  de todas las fuerzas internas que actúan en la sección  $mn$ , se denomina *fuerza cortante en la sección  $mn$* . Esta fuerza es numéricamente igual y con sentido contrario a la resultante de las fuerzas exteriores que obran en el pedazo  $mnn_2m_2$ . En la figura 7 se muestran los modelos geométricos de los dos pedazos, y en las figuras 8 y 9 se presentan los modelos cartesiano y analítico de la fuerza cortante en el pedazo  $mnn_2m_2$ , respectivamente.

$$q: [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow q(x) = q_1(x) \chi_{[a_1, a_2]}(x)$$

Fig. 6. Modelo analítico de una intensidad de carga.

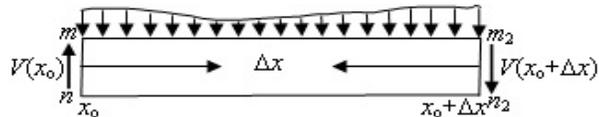


Fig. 8. Modelo cartesiano del pedazo  $mnn_2m_2$  de una viga

$$V: [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow V(x)$$

Fig. 9. Modelo analítico de la fuerza cortante

*Definición y modelo del momento flector.* Las fuerzas externas situadas a la izquierda de la sección  $mn$ , producen un momento  $M$  con respecto a  $x_0$  que recibe el nombre de momento flector y que es igual a la suma de los momentos de cada fuerza que obra sobre el pedazo de la viga a la izquierda de  $mn$ .

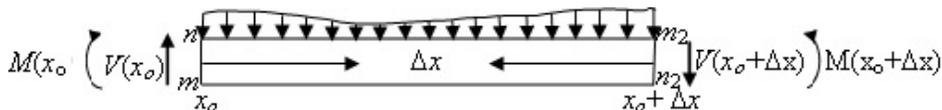


Fig. 10. Modelo del momento flector en el pedazo  $mnn_2m_2$  de una viga

$$M: [0, \ell] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longrightarrow M(x)$$

Fig. 11. Modelo analítico del momento flector

*Modelos de dos relaciones entre la intensidad de carga y la fuerza cortante.* En las figuras 6 y 9 se presentan estos modelos. En la proposición 1 se establece la relación puntual entre estos dos modelos. La demostración de esta proposición no se presenta, por un problema de espacio; pero se realiza suponiendo que la viga está en equilibrio, aplicando la ley física que establece que si la viga está en equilibrio las sumas de las fuerzas que obran en cualquiera de sus partes, por ejemplo en el pedazo  $mnn_2m_2$  es cero.

**Proposición 1.** Si  $I = [0, \ell]$ ,  $q$  es continua sobre  $I/S$  y en cada elemento  $x_i$ ,  $i=1:n$ , de  $S$  se tiene una discontinuidad evitable o de salto finito tal que  $\lim_{x \rightarrow x_i^-} q(x) = l_{i1}$  y  $\lim_{x \rightarrow x_i^+} q(x) = l_{i2}$ ; entonces la función  $V: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $x \rightarrow V(x) = \int_0^x q(t)dt$ , es continua sobre  $[0, \ell]$  y satisface las condiciones  $V'(x) = q(x)$  si  $x$  es un punto de continuidad o de discontinuidad evitable de  $q$ , y satisface las condiciones  $V'_-(x) = l_{i1}$  y  $V'_+(x) = l_{i2}$  si  $q$  tiene en  $x$  una discontinuidad de salto finito.

*Modelos de dos relaciones entre la fuerza cortante y el momento flector.* En las figuras 10 y 11 se presentan estos dos modelos, y en la proposición 2 se establecen dos relaciones entre estos dos modelos, tales que dados uno de estos modelos se puede determinar el otro.

**Proposición 2.** Si  $V$  es continuamente diferenciable sobre  $I/S$  y en cada elemento  $x_i, i=1:n$ , de  $S$  la derivada de  $V$  tiene una discontinuidad evitable o de salto finito tal que  $\lim_{x \rightarrow x_i^-} V'(x) = l_{i1}$  y  $\lim_{x \rightarrow x_i^+} V'(x) = l_{i2}$ ; entonces la función  $M: [0, \ell] \rightarrow R$ , definida por  $x \rightarrow M(x) = \int_0^x V(t)dt$ , cumple las condiciones siguientes: 1. Es continuamente diferenciable sobre  $I$ . 2. Se cumple que  $M'(x) = V(x)$  y  $M''(x) = q(x)$  si  $x$  es de continuidad. 3. Se tiene que  $M'(x) = V(x)$  y  $M''(x) = \lim_{y \rightarrow x} q(x)$ , si  $x$  es de discontinuidad evitable. 4. Ocurre que  $M'(x) = V(x)$ ,  $M''_-(x) = V_-(x) = l_{i1}$  y  $M''_+(x) = V_+(x) = l_{i2}$ , si  $x$  es de salto finito.

**Demostración.** Sea una viga en equilibrio cuyo modelo en la recta numérica es  $[0, \ell]$ . Se considera un elemento de la viga de longitud  $\Delta x$  (figura 10), determinado por dos secciones adyacentes  $mn$  y  $m_2n_2$ . Se modelan las secciones  $mn$  y  $m_2n_2$  por  $x_0$  y  $x_0 + \Delta x$ , donde  $x_0 \in [0, \ell]$ ,  $\Delta x > 0$  y  $x_0 + \Delta x < \ell$ , respectivamente. Se considera que la intensidad de carga en el intervalo  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ , está modelada por una función real  $q$  continua sobre  $(x_0, x_0 + \Delta x]$ . Entonces, por la proposición 1, la fuerza cortante en el intervalo  $[x_0, x_0 + \Delta x]$  está modelada por una función real  $V$  continua sobre  $(x_0, x_0 + \Delta x]$ .

Como la viga está en equilibrio, la suma de los momentos con respecto al punto  $x_0$  que actúan sobre el pedazo  $mm_2n_2$  de la viga es cero,  $\Sigma_m = 0$ . Por lo tanto,  $M(x_0) - M(x_0 + \Delta x) + V(x_0 + \Delta x)\Delta x + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (t - x_0)q(t) dt = 0$ . De donde resulta que  $M(x_0 + \Delta x) - M(x_0) - V(x_0 + \Delta x)\Delta x = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (x_0 - t)q(t) dt$ . Aplicando el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral al lado derecho de la igualdad anterior y evitando la discontinuidad de  $q$ , se puede asegurar que existe un  $\theta_2, x_0 < \theta_2 < x_0 + \Delta x$ , tal que  $M(x_0 + \Delta x) - M(x_0) - V(x_0 + \Delta x)\Delta x = (x_0 - \theta)q(\theta)\Delta x$ . Pasando el término  $V(x_0 + \Delta x)\Delta x$  al lado derecho de la igualdad anterior, dividiendo ambos lados de la igualdad resultante por  $\Delta x$  y hallando límite cuando  $\Delta x \rightarrow 0$  por valores positivos, resulta que

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \{(1/\Delta x)[M(x_0 + \Delta x) - M(x_0)]\} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} [V(x_0 + \Delta x) + (x_0 - \theta)q(\theta)].$$

Por tanto

$$M'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{M(x_0 + \Delta x) - M(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} [V(x_0 + \Delta x) + (x_0 - \theta)q(\theta)] = \lim_{x \rightarrow x_0^+} V(x).$$

O sea que  $M'_+(x_0) = V_+(x_0)$ . Procediendo de igual forma con el pedazo  $m_1n_1mn$  de la viga se resulta que  $M'_-(x_0) = V_-(x_0)$ , de estos resultados se obtienen, trivialmente, las restantes afirmaciones del enunciado del teorema.

En los materiales escritos con la nueva organización del conocimiento escolar, se indican por  $I_c, I_e$  y  $I_s$  los subconjuntos  $\{x \in I \mid q \text{ es continua en } x\}$ ,  $\{x \in I \mid q \text{ tiene una discontinuidad evitable en } x\}$  y  $\{x \in I \mid q \text{ tiene una discontinuidad de salto en } x\}$ , respectivamente. Se denotan por  $C(I_c \cup I_e)$ ,  $C^{(1)}(I_c \cup I_e)$  y  $C^{(2)}(I_c \cup I_e)$  las colecciones de las funciones reales continuas, continuamente diferenciables y dos veces continuamente diferenciables, respectivamente. Se expresan por  $F_s(I_s)$ ,  $C(I_s)$  y  $C^{(1)}(I_s)$  las funciones con salto finito en cada punto de  $I_s$ , continuas y con primera derivada continua sobre  $I_s$ , respectivamente.

Utilizando las proposición 1 y 2 se tienen los resultados siguientes: 1. Si  $V \in C^{(1)}(I_c \cup I_e) \cap C(I_s)$ , entonces  $q$  cumple las propiedades de la proposición 1 y se obtiene a partir de  $V$  y  $M$  por la igualdades  $q(x) = V'(x)$  y  $q(x) = M''(x)$ , asimismo  $M$  cumple las propiedades de la proposición 2 y se obtiene a partir de  $V$  mediante la relación  $M(x) = \int_0^x V(t)dt$ . 2. Si  $q \in C(I_c \cup I_e) \cap F_s(I_s)$ , entonces  $V \in C^{(1)}(I_c \cup I_e) \cap C(I_s)$  y  $M \in C^{(2)}(I_c \cup I_e)$ , y conocida  $q$  se obtienen  $V$  y  $M$  mediante las relaciones  $V(x) = \int_0^x q(t)dt$  y  $M(x) = \int_0^x \int_0^t q(s) dsdt$ .

De esta forma quedan modeladas por los operadores de diferenciación  $D$  y  $D^{(2)}$  y de integración  $\int_0^x dt$  y  $\int_0^x \int_0^t dsdt$ , dos relaciones entre las extensiones de los modelos conceptuales de la intensidad de carga, de la fuerza cortante y del momento flector, como se muestran en la figura 12.

*Sobre el diseño, aplicación y evaluación de las hojas de trabajo.* Se diseñaron y aplicaron diez hojas de trabajo (HT), tres de ellas relativas a los conceptos de fuerza cortante (FC) y momento flector (MF), y sus relaciones; a las cuales nos vamos a referir en lo que sigue. Para participar en cada HT se disponía de 55 minutos. La primera HT se diseñó para que los estudiantes participaran en la construcción de los conceptos de FC y MF y sus modelos geométricos y analíticos. Los resultados de la aplicación fueron los más deficientes de las tres.

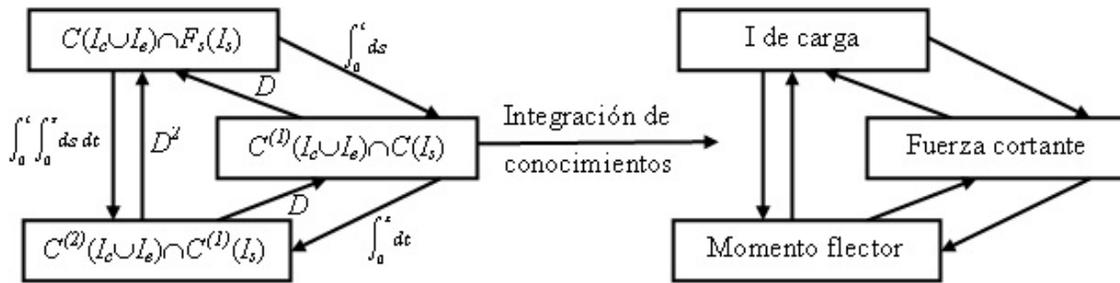


Fig. 12. Modelación de relaciones entre conceptos mediante operadores

La segunda HT se dedicó a conducir a los estudiantes, mediante problemas sencillos, en la demostración de la proposición 2, lo cual hicieron sin muchas dificultades. Al final de la actividad el profesor enunció la proposición en elaboración conjunta con el grupo. El objetivo fundamental de la tercera HT fue facilitar la participación de los estudiantes en la construcción de los diagramas de la figura 12, mediante los cuales se integran primero los modelos de la intensidad de carga (IC), la FC y el MF por medio de los modelos de sus relaciones (operadores diferenciales e integrales), para después integrar los tres conceptos estáticos. Se presentaron más dificultades de las esperadas, a pesar de que con anterioridad habían trabajado en una HT integrando los conceptos de IC y FC. Debe tenerse en cuenta que nunca antes de esta asignatura habían integrado conceptos de otras por ningún método.

*Sobre el diseño, realización y evaluación de las actividades grupales.* Se realizaron tres actividades grupales (AG), una para cada HT en los 55 minutos siguientes. Se procedió de la forma siguiente: un alumno seleccionado al azar pasaba a explicar en el pizarrón la solución que había dado de uno de los problemas de la HT, cada uno de los restantes estudiantes debía realizar una crítica de lo hecho por el estudiante y de las críticas realizadas por los compañeros que le habían precedido. Nunca antes habían realizado una actividad de este tipo. Se evaluaba en esta actividad la calidad de las intervenciones con respecto a su influencia en el aprendizaje de los

restantes compañeros. La calidad de la mediación de los estudiantes comenzó en un nivel muy bajo, entre otras razones, debida a una falsa concepción de compañerismo que le impedía hacer adecuadas críticas y a la no comprensión del sentido de su mediación. Esta situación cambió radicalmente debido a las bajas calificaciones obtenida por sus primeras participaciones; así como, a los análisis de las intervenciones de cada estudiante por parte del profesor.

*Sobre la mediación del profesor para lograr generalizaciones no obtenidas por los estudiantes.* Se ha hecho referencia anteriormente a actividades de mediación del profesor. Consideramos que las actividades de mediación más importantes y beneficiosas para los estudiantes, fueron las que facilitaron que participaran en las generalizaciones que condujeron a la integración de los modelos de los conceptos de IC, FC y MF por medio de los operadores de diferenciación  $D$  y  $D^2$ , y de los operadores de integración  $\int_0^t ds$ ,  $\int_0^x dt$  y  $\int_0^t \int_0^s ds dt$ .

#### 4. Resultados

Los resultados académicos fundamentales obtenidos por los estudiantes mediante su participación en las tres HT fue su participación en:

1. En el proceso de formación de los conceptos de  $FC$  y de  $MF$  y en su modelación mediante conceptos del cálculo diferencial e integral.
2. La integración de sus modelos conceptuales de la  $FC$  y el  $MF$  denotados por  $C^{(1)}(I_c \cup I_e) \cap C(I_s)$  y  $C^{(2)}(I_c \cup I_e) \cap C^{(1)}(I_s)$ , por medio de los modelos  $D$  y  $\int_0^x dt$  de sus relaciones, que permiten a partir de información de uno de los modelos encontrar la información correspondiente en el otro modelo.
3. La integración de estos resultados con los obtenidos anteriormente al integrar modelos de los conceptos de IC y FC en una estructura conceptual correspondiente a la parte derecha de la figura 12.
4. La integración de los conceptos de  $IC$ ,  $FC$  y  $MF$  en una estructura como la de la parte izquierda de la figura 12 utilizando la integración de sus modelos.

Los resultados de aprendizaje fueron muy importantes por las razones siguientes:

5. Comprendieron la necesidad de su participación en su propio aprendizaje (aprendizaje activo) y de su mediación en el aprendizaje de sus compañeros (aprendizaje mediado).
6. Entendieron la importancia de participar tanto en los procesos como en sus resultados.
7. Percibieron que no solo es importante la realización de una tarea, sino también la ampliación de sus estructuras mentales incluyendo el nuevo aprendizaje.

#### 5. Conclusiones

Las herramientas didácticas diseñadas y aplicadas contribuyeron a que los estudiantes participaran en su propio aprendizaje y en el aprendizaje de sus compañeros. Contribuyeron a que los estudiantes no solo adquirieran conocimiento, sino también que construyeran significados.

Los contenidos escogidos están en correspondencia con la asignatura y la carrera. Los estudiantes nunca antes habían utilizado conceptos del cálculo con extensiones del tipo  $C(I_c \cup I_e) \cap F_s(I_s)$ ,

$C^{(1)}(I_c \cup I_e) \cap C(I_s)$  y  $C^{(2)}(I_c \cup I_e) \cap C^{(1)}(I_s)$ , para modelar conceptos de otras áreas que no pueden modelarse por los conceptos con extensiones usuales, por ejemplo  $C(I)$ ,  $C^{(1)}(I)$  y  $C^{(2)}(I)$ .

Por primera vez participaron en la modelación de relaciones entre conceptos de áreas externas a la matemática, por medio de operadores diferenciales e integrales con dominios y codominios del tipo  $C(I_c \cup I_e) \cap F_s(I_s)$ ,  $C^{(1)}(I_c \cup I_e) \cap C(I_s)$  y  $C^{(2)}(I_c \cup I_e) \cap C^{(1)}(I_s)$ ; ya que solo modelaron problemas mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, en cuyos procesos quedaba solapada la modelación de operadores.

## 6. Referencias

- Douady, R. (2000). Juegos de marcos y dialéctica herramienta-objeto. En G. Castrillón (Ed.), *Ingeniería didáctica* (pp. 171-177). Santiago de Cali. [Versión electrónica].
- Douady, R. y Parzysz, B. (1998). La geometría en el salón de clases. En C. Mammana y V. Villani (Ed. ICMI Study). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21th Century*. (pp. 159-192). New York. Kluwer Academic Publishers.
- Mederos, O. y González B. (2005). *La Modelación en la Educación Matemática*. Saltillo: Talleres Gráficos de Salvador Impresor S.A. de C.V.