UNA APROXIMACIÓN AL TEOREMA DEL ISOMORFISMO DE GRUPOS

Arturo Mena Lorca
arturo.mena@ucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Avance de Investigación
Superior

Resumen
El teorema del isomorfismo de grupos, TIG, afirma que Si G,G' son grupos y $f:G\rightarrow G'$ un homomorfismo de grupos de núcleo $N(f)$ e imagen $Im(f)$, entonces $G/N(f)\simeq Im(f)$. La importancia del teorema para el estudiante de pregrado es manifiesta. Ello no obstante, diversas investigaciones indican que el TIG no es comprendido por la mayoría de los aprendices. Presentamos una breve reseña de la investigación al respecto y proponemos una aproximación diferente a la que se puede encontrar en la literatura, vía una *descomposición genética* del teorema, descompuesto previamente en una parte sin estructura y otra propiamente algebraica.

Palabras clave: *Grupo, isomorfismo, APOE, descomposición genética*

1. Introducción

En distintos sentidos, tanto para un profesor de Matemáticas como para un licenciado en Matemáticas, los cocientes y el TIG proveen de aspectos fundamentales de las competencias que precisan. Generalmente, el TIG es el primero de una decena de teoremas de homomorfismo de la teoría de grupos, muy relacionados, utilizando los cuales el aprendiz puede construir grupos a partir de otros conocidos (los grupos cíclicos y algunos sistemas numéricos, e. g.), identificar otros, adentrarse en su estructura (la red de sus subgrupos, por ejemplo), entender la resolución de ecuaciones por radicales, etc.

Ello no obstante, diversas investigaciones indican que el TIG no es comprendido por la mayoría de los estudiantes: ellos no entienden qué es el cociente G/N, ni que su estructura depende de la normalidad de N en G, ni pueden definir funciones desde G/N, de manera que el teorema queda fuera de su alcance. De hecho, según nuestros datos, la buena definición de la operación en G/N y la de la función definida desde él son ignorados por el alumno común, quien se apresura a comprobar que la operación en las clases, que no cuestiona, es, digamos, asociativa, o que una función definida (no importa si *bien*) en el cociente 'preserve' las operaciones de los grupos. Las representaciones visuales de carácter geométrico de los conceptos que el instructor tiende a utilizar no ayudan como este supone (Nardi, 1996).

Lo anterior se relaciona con el problema de mayor amplitud que comporta la enseñanza de álgebra abstracta en pregrado, acerca de la cual hay consenso en que, en general, dista de conseguir los objetivos que se propone (Clark, De Vries, Hemenway, St. John, Tolia y Vakil, 1997).

Ahora bien, los grupos cocientes y el propio TIG son más accesibles para el estudiante si se separan los aspectos conjuntísticos de los propiamente algebraicos: el aprendiz posee una idea ingenua tanto de relación de equivalencia como de partición, que utiliza con profusión en distintos ámbitos, pero es ese un recurso que no se aprovecha debidamente en la enseñanza de la Matemática. En efecto, el TIG tiene un 'teorema de isomorfismo' subyacente que se puede expresar 'sin estructura': si G, G' son conjuntos y $f{:}G \rightarrow G'$ una función, entonces el cociente G/R_f está en biyección con $Im(f)$ –la relación de equivalencia que induce $N(f)$ en G es $aR_f\, b$: $a^{-1}b \in N(f)$, es decir, $f(a)=f(b)$ –. (Todos menos uno de los restantes teoremas de homomorfismo para grupos poseen versiones conjuntísticas).

2. Marco teórico

La literatura en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra abstracta es, comparativamente, menor que en otras áreas de la Matemática, y es inevitable coincidir con Asiala y otros (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996); hay trabajos relacionados ya sea con la comprensión de diversos aspectos de esa materia o bien propuestas para su enseñanza, pero son muy escasos los dedicados a esa enseñanza explícitamente vinculados con la investigación. Los estudios del grupo RUMEC acerca del álgebra abstracta son una excepción, y, claramente, los más completos (Nardi, 1996, por ejemplo, es la única que trata el TIG), si bien no ofrecen, propiamente, las *descomposiciones genéticas* propuestas por la teoría.

Los estudios de Dubinsky y otros (Dubinsky, Dauterman, Leron y Zazkis, 1994) confirman que, a veces, esta materia produce una detención en el aprendizaje. La dificultad parece estar en la naturaleza abstracta de los objetos involucrados (Cf. Hazzan y Leron, 1996). Nardi (1996, 2000) advierte que la representación visual de carácter geométrico de los conceptos que el instructor tiende a utilizar no ayuda como este supone.

Por otra parte, entender un isomorfismo de grupos requiere de los conceptos de grupo, función y cuantificador (Leron, Hazzan y Zazkis, 1994, 1995; Leron y Dubinsky, 1995; y Nardi, 2000) están de acuerdo en que la idea de que dos cosas que son diferentes pueden ser vistas como similares bajo un acto de abstracción apropiado, contiene una dificultad que está en el corazón de la de los estudiantes para entender la relación de isomorfismo.

Nardi (1996) reporta que los estudiantes se afligen por definir: una función entre dos grupos; una nueva relación entre conjuntos de elementos de estos grupos, y un tipo de homomorfismo entre estos conjuntos o entre elementos del grupo y conjuntos de elementos. Encuentra evidencia de una conceptualización mecánica, sin entendimiento conceptual, del isomorfismo definido en las clases.

2.1 La teoría APOE

Los proponentes de APOE han venido publicando sus resultados desde la década de los 80's; su metodología ha sido validada por diversos trabajos del grupo RUMEC y otros; APOE y RUMEC fueron generados por Ed Dubinsky. La presentación que sigue se puede encontrar, por ejemplo, en Dubinsky et al. (1994); Asiala, Dubinsky, Mathews, Morics y Oktaç (1997); y Brown, De Vries, Dubinsky y Thomas (1997).

Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de ella o mecanismos: *interiorización*, *coordinación*, *encapsulación*, *generalización*, *reversión*. Estos originan diferentes construcciones (mentales): *acciones*, *procesos*, *objetos*, *esquemas* (de donde APOE).

Tomemos un fragmento F de conocimiento matemático. Un individuo posee una *concepción acción* de F si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él *interioriza* la acción en una *concepción proceso* de *F* si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. (Puede *coordinar* dos o más procesos o revertir uno para obtener un nuevo proceso). Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad ha *encapsulado* el proceso en una *concepción objeto* de *F*. Si necesita volver desde el objeto al proceso que lo forma, lo hace *desencapsulando* el objeto. Un *esquema* de *F* es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. La *coherencia* es la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Al tratar un problema matemático, el individuo evoca un esquema y lo *desenvuelve* para tener acceso a sus componentes, utiliza relaciones entre ellas, y trabaja con el conjunto. Un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha *tematizado*

Una *descomposición genética* de F, DG, describe en detalle los aspectos constructivos de *F* para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que el aprendiz pueda seguirlo para tener buen éxito. Tal DG no es única, pues depende de los caminos de construcción y de las estructuras mentales previas del individuo.

2.2 RUMEC en relación a aspectos del teorema

Los proponentes de RUMEC han estudiado el tema.

Dubinsky et al. (1994) confirman que el aprendizaje de las coclases de *G/N* es extremadamente difícil. Una concepción acción requiere no solo realizar las manipulaciones involucradas, sino hacerlas con fórmulas o recetas precisas; parece, entonces, realizable solo en situaciones familiares y donde hay fórmulas explícitas a disposición; además, es difícil si el orden *n* de *G* es demasiado grande e imposible si *G* es infinito. Se evoluciona hacia un proceso cuando, en el caso finito, se escribe la clase de *a* módulo *H* como $\{ah_1, ah_2,\ldots, ah_n\}$; entender un ejemplo concreto simple no parece ayudar mucho en la extensión al caso general.

Asiala et al. (1997) observan semejanzas en la descomposición genética de la formación de coclases y la de su multiplicación (o suma).

El concepto de normalidad consiste de la coordinación de tres esquemas generales: el de subgrupo, el de coclase y la noción general de que un objeto tenga una propiedad. En las muestras realizadas por Asiala et al. (1997), la mayor parte de los individuos mostró entender las coclases, pero no la normalidad.

El concepto de grupo cociente consiste en la coordinación de tres esquemas: el de coclases, el de operación binaria y el de grupo. La coordinación consiste en seleccionar construcciones específicas de los esquemas subsidiarios y aplicarlos a la situación del grupo cociente. Según los datos obtenidos por Dubinsky et al. (1994), único trabajo que aborda los cocientes en esta perspectiva en la literatura, un porcentaje alto de los alumnos entrevistados parece perdido y puede terminar desconectándose aquí del curso (Ibíd., p. 24). La construcción del producto de coclases se apoya en los esquemas de operación binaria y de coclase, y considera el método de representantes y el del producto de conjuntos. El esquema de grupo cociente los coordina través del concepto de normalidad (Ibíd).

Del esquema de grupos se obtienen la propiedad de normalidad y el hecho de que si H es normal en G entonces G/H es un grupo.

Para Leron et al. (1995), el concepto de isomorfismo es muy complejo, e inseparable de la noción abstracta de grupo. En su construcción se requiere la concepción objeto de función, la de isomorfismo y la de cuantificación múltiple. El proceso de trabajar con un isomorfismo en abstracto es muy diferente de lidiar con uno concreto (Dubinsky, E. y Zazkis, R., 1996).

Nos parece que el planteamiento de RUMEC es bastante completo: incluye investigación, estrategias pedagógicas a partir de esa investigación, análisis de datos que confirma o rectifica los diseños propuestos. El recurso decidido a auxiliares electrónicos (el programa ISETL, expresamente diseñado) para permitir disponer de una abundancia de cálculos y de situaciones ha mostrado ser particularmente interesante, máxime en un área en la que tal uso específico es bastante desconocido por el público. RUMEC reporta que: logra que las versiones institucionalizadas del conocimiento no sean totalmente ajenas al estudiante; que la actitud de estos respecto del álgebra abstracta mejore, y que tengan buen éxito en la asignatura correspondiente (Clark et al., 1997), en particular, respecto a normalidad y cocientes (Asiala et al., 1997).

2.3 Nuestra aproximación

Lo anterior no obstante, el propio RUMEC ha manifestado dificultades en su manera de abordar el problema. Desde nuestra perspectiva, ellas se originan en los aspectos que reseñamos a continuación.

En primer lugar, vía ISETL, cuando el cardinal del grupo es 'grande', la construcción de los conceptos se hace difícil y eventualmente impracticable desde las acciones; el caso infinito es, en cierto sentido, imposible de abordar. Cuando se dispone de una presentación simple del grupo, el alumno puede abordar fácilmente el estudio desde las acciones; en caso contrario, la construcción de las clases se hace difícil aun con auxiliares electrónicos. Por otra parte, los alumnos declararon que algunas actividades que debían realizar vía programación les parecieron extremadamente difíciles, y los investigadores dudan de la permanencia en el tiempo del concepto de cociente de un grupo.

Creemos que se puede avanzar desde los trabajos de RUMEC. La ‘relación’ entre las relaciones de equivalencia y las particiones en los conjuntos sobre los cuales están definidas es una idea sumamente natural, y no se debería desperdiciar. En particular, la encapsulación de las clases en cuanto conjuntos no pasa, entonces, necesariamente por un proceso algebraico y, llegado el caso de la relación de equivalencia R_N definida por N normal en G, estarían disponibles para construir el objeto matemático G/N. Para ello, habría que lograr primero la encapsulación de un conjunto cociente como el resultado de definir una relación de equivalencia en el conjunto G, y estudiar luego el caso de R_N en G. Hay que notar que la relación de equivalencia definida por $N(f)$ en G induce la partición que reúne en clases a los elementos de G que tienen la misma imagen según f.

RUMEC parece entender que la normalidad debe ir primero que la construcción del cociente. Si bien desde el punto de vista de la teoría de grupos ello es indiscutible (el cociente entendido como un grupo), cabe preguntarse si desde el punto de vista cognitivo no resulta más natural construir primero cocientes y luego examinar la posibilidad de inducir en ellos, para el caso de un grupo *G*, una estructura en el cociente que resulte compatible con la operación de *G*. De esta manera, el caso para grupos será más sencillo de abordar –de modo análogo al hecho de que, comprendido este último, los correspondientes para anillos y módulos, e. g., son también más fáciles de tratar: la función está definida y es un homorfismo de grupos, y resta solo comprobar que ella preserva el resto de la estructura, cosa que el alumno muestra hacer de forma más bien expedita (Mena, 2011)–.

3. Método

Nuestro objetivo era diseñar una DG factible, que apoyase la reflexión sobre el aprendizaje del teorema del isomorfismo para grupos y que especificara un modelo cognitivo en el cual se puedan sustentar propuestas de enseñanza. La nuestra difiere necesariamente de otras que se puedan hacer, dada la escisión que comporta en ciertos aspectos matemáticos del teorema mismo; en particular, no trabaja con las clases de equivalencia de la manera en que lo hacen la enseñanza habitual del álgebra abstracta y el propio RUMEC.

En cualquier caso, no conocemos DG alternativas del teorema; en particular, RUMEC no da propiamente una explícita del teorema del isomorfismo para grupos, sino más bien elementos para elaborar una.

Compartimos el dictamen de Dubinsky (1991) de la relación cercana entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente de un individuo, y el de Trigueros (Trigueros, 2005) de la conveniencia de comenzar una DG desde la reflexión matemática acerca de los conceptos. Hemos elaborado sobre esos juicios y considerado antecedentes de carácter propiamente matemático y epistemológico –tanto en su acepción histórica como genética–.

Hicimos una revisión de la literatura de enseñanza del álgebra abstracta desde sus inicios, y luego de programas de estudio y utilización de textos específicos en nuestro país. Además, usamos como referente nuestras observaciones en el aula. Se hicieron encuestas y entrevistas en tres regiones de Chile, en distintas universidades. Se realizaron además entrevistas a personas de diversa formación que no necesariamente estudiaron o estudiarán el teorema. Parte de esas entrevistas fueron registradas por escrito y/o en video. Incluimos alumnos que comienzan su carrera de pedagogía, por ejemplo, para observar sus reacciones ante la presentación de algún concepto o ante alguna reflexión que se les propuso y que comportaba un desarrollo eventual, todo ello en relación con nuestro teorema; hemos propuesto, además, los temas de relaciones de equivalencia contemplados en nuestra propuesta a media docena de cursos terminales sucesivos de una carrera de Arquitectura, incluso a un par de abogados, para cuestiones específicas.

3.1 Esquemas necesarios

Para nuestra descomposición genética, en particular, es evidente, según lo que venimos describiendo, que el estudiante debe disponer de esquemas de cierta coherencia de la noción de grupo, cuya construcción requiere de esquemas previos de conjunto y de operación binaria. (Cf., para un caso similar, Trigueros y Oktaç, 2005). A su vez, el esquema de operación binaria necesita del de función.

Otros esquemas que se necesitan son los de: satisfacer una propiedad, de axioma; de implicación; de cuantificadores universal y existencial; igualdad, unión e intersección de conjuntos; función, operación binaria; grupo y subgrupo. Por supuesto, ocasionalmente, no se requiere la concepción esquema de alguno de los conceptos señalados en la lista anterior, sino la concepción proceso, pongamos por caso.

4. Resultados

Si bien queremos hacer un nuevo refinamiento de la DG propuesta, de acuerdo al ciclo de investigación de APOE, nuestros resultados indican que el Teorema del Isomorfismo para grupos es mejor comprendido por los alumnos que han seguido la estrategia propuesta.

Una mayoría perceptible trata, como cabría esperar, de mantenerse en situaciones y ejemplos concretos; sin embargo, algunos de entre los estudiantes son capaces de construir el teorema para conjuntos, y de (re)construir el teorema para grupos.

Ello contrasta notablemente con el hecho de que los alumnos no sometidos a esta estrategia, casi sin excepciones (en las muestras realizadas), ignoran la necesidad de la buena definición de la operación del cociente y de la función definida desde el cociente (o bien, si se les ha insistido en esto último, consideran que hay algo importante que hacer, pero “no se acuerdan”).

5. Conclusiones

El teorema bajo estudio es el primero de una decena de teoremas de homomorfismo de la teoría de grupos, muy relacionados, utilizando los cuales el aprendiz puede adentrarse en su estructura. En la teoría de anillos (y de A-módulos, de grupos topológicos, etc.), esos teoremas sirven de base para un conjunto similar de teoremas análogos.

Avanzar en el aprendizaje de normalidad, cocientes e isomorfismos definidos desde un grupo cociente es difícil, y la historia de la Matemática muestra ejemplos notables del grado y la naturaleza epistemológica de la dificultad (Sophus Lie y Félix Klein estudiaron juntos el tratado de Jordan acerca de la obra de Galois que introduce subgrupos normales y grupos cocientes; Klein declara que les pareció ‘un libro con siete sellos’). Cualquier progreso, sin embargo, enriquece los esquemas de grupo, de subgrupo, de anillo, de ideal, de *A*-módulo, etc., que el aprendiz posee.

Agradecimiento

El autor expresa su reconocimiento a la doctora Asuman Oktaç por su guía paciente y certera durante el estudio parte del cual presentamos aquí.

6. Referencias

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld y E. Dubinsky (Eds.) *CBMS Issues in Mathematics Education,* 6, 1-32.

Asiala, M., Dubinsky, E., Mathews, D., Morics, S. y Oktaç, A. (1997). Development of students' understanding of cosets, normality, and quotient groups. *Journal of Mathematical Behavior,* 16 (3), 241-309.

Brown, A., De Vries, D., Dubinsky, E. y Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 187-239.

Clark, J., De Vries, D., Hemenway, C., St. John, D., Tolia, G. y Vakil, R. (1997). An Investigation of students' understanding of Abstract Algebra (binary operations, groups and subgroups) and the use of abstract structures to build other structures (through cosets, normality and quotient groups). *Journal of Mathematical Behavior*, 16(3), 181-186.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall, (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, pp. 95-123. Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E., Dauterman, J., Leron, U. y Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 267-305.

Dubinsky, E. y Zazkis, R. (1996). Dihedral Groups: A Tale of Two Interpretations. Research in Collegiate Mathematics Education II, *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 61-82.

Hazzan, O. y Leron, U. (1996). Students' use and misuse of mathematical theorems: the case of Lagrange's Theorem. *For the Learning of Mathematics*, 16, 23-26.

Leron, U. y Dubinsky, E. (1995). An Abstract Algebra Story. *American Mathematical Monthly*, 102(3), 227-242

Leron, U., Hazzan, O. y Zazkis, R. (1994). Student's Constructions of Group Isomorphisms. *Proceedings of the 18th Annual Conference of the International Group for Psychology in Mathematics Education*, Lisbon, Portugal, vol. 13, pp. 152-159.

Leron, U., Hazzan, O. y Zazkis, R. (1995). Learning group Isomorphism: A Crossroads of many Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 153-174.

Mena, A. (2011). *Estudio epistemológico del teorema del isomorfismo de grupos*. Tesis doctoral. Centro de Investigación en Ciencia Avanzada y Tecnología Aplicada, Instituto Politécnico Nacional, México.

Nardi, E. (1996). *The novice mathematician's encounter with mathematical abstraction: tensions in concept-image construction and formalisation*. Thesis, University of Oxford. http://www.uea.ac.uk/~m011/thesis.

Nardi, E. (2000). Mathematics undergraduate's responses to semantic abbreviations, 'geometric' images and multi-level abstractions in Group Theory. *Educational Studies in Mathematics*, 43(2), 168-189.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17 (1), 5-31.

Trigueros, M. y Oktaç, A. (2005). La théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 157-176.