LA ENSEÑANZA DE LAS FUNCIONES CUADRÁTICAS Y SUS DIFERENTES REPRESENTACIONES CON EL DERIVE

José Alberto Méndez Méndez, Leticia Sosa Guerrero,
Leticia Adriana Ramírez Hernández
pierli3@hotmail.com, lsosa19@hotmail.com,
leticiaadrianaramirez@hotmail.com
Educación Media Superior a Distancia (EMSaD-CECyTEZ), Unidad Académica de Matemáticas (UAZ)
Experiencia Didáctica
Medio superior

Resumen
La inclusión de las tecnologías y en especial de los software CAS, es una realidad en la enseñanza de las matemáticas. En este trabajo se elabora una secuencia didáctica que sugiere el uso del software Derive para la enseñanza de las funciones cuadráticas, para potenciar en los alumnos el contacto con sus diferentes representaciones (algebraica, tabular y gráfica). La secuencia fue elaborada considerando como metodología los lineamientos para una ingeniería didáctica. Los resultados fueron alentadores pues los alumnos fortalecieron las transiciones entre los diferentes registros de representación y además, otro resultado relevante consiste en el hecho de que al presentar a los estudiantes más de una representación dentro del sistema de representación semiótica algebraica, potenció las relaciones con los demás sistemas de representación. Además ayudó a resolver dificultades en las transiciones entre éstos.

Palabras clave: *Secuencia didáctica, representaciones semióticas, cuadráticas*

1. Introducción

El concepto función no es solamente importante para las matemáticas sino para cualquier otra ciencia, desde la perspectiva de que es la manera más sencilla de establecer o representar nexos entre objetos de estudio, siendo esta actividad parte de la naturaleza del ser humano; pues, dado que dentro de su capacidad de crear herramientas - como lo son el de habla, razonamiento abstracto, hacer arte, etc.-, encontramos una característica común a estas actividades: *asociar elementos de cierta categoría con elementos de otra categoría*, que le faciliten algún trabajo. Cuando hablamos asociamos un sonido y una significación a lo expresado, que describe o tiene alguna relación con el mundo que nos rodea. Las funciones cuadráticas heredan su importancia del concepto función, además las funciones cuadráticas representan un concepto que en el currículo actual se aborda en tres momentos en el Centro de Estudios de Educación Media Superior a Distancia “El Saucito”. El primer acercamiento se presenta en el primer semestre como relación de las ecuaciones cuadráticas; el segundo momento es en el tercer semestre, en el análisis de las cónicas; y, finalmente, en cuarto semestre en el análisis de funciones polinomiales. De ahí nuestro interés en abordar la problemática de la enseñanza-aprendizaje de este concepto.

El problema de investigación se refiere, específicamente, a la comprensión de las funciones cuadráticas, entendiendo comprensión en términos de Hierbert y Carpenter (1992, citado en Hitt 2001), es decir, se concibe un grado de entendimiento de acuerdo a las relaciones o conexiones que logra desarrollar el estudiante entre los distintos sistemas de representación del concepto matemático. Por ello es necesario hacer una exploración de las dificultades que presentan los estudiantes para desarrollar transiciones entre las distintas representaciones; para esto se elaboró y validó una secuencia didáctica que contempló el uso del software Derive, como apoyo en las actividades realizadas por los alumnos, fortaleciendo las conexiones entre las distintas representaciones semióticas con las que cuentan esas funciones.

2. Marco teórico

Las teorías que dan soporte a esta investigación son: primero, la Teoría de Representaciones semióticas de R. Duval (1998), dicha teoría se eligió como apropiada, puesto que mide el nivel de entendimiento en función de las transiciones efectivas que realizan los alumnos entre los distintos registros de representación de los conceptos matemáticos; segundo, la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986), dicha teoría estudia y modela fenómenos didácticos que ocurren cuando un profesor se propone enseñar una noción, un teorema o un procedimiento a sus estudiantes (Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís y Garza, 2005). Dado que el objetivo de esta investigación fue diseñar una secuencia didáctica para enseñar el concepto función cuadrática y que los estudiantes lo comprendan, ahí emergió la necesidad de adentrarnos un poco en la literatura de la Teoría de Situaciones. Por último, pero no menos importante, consideramos como apoyo teórico el uso de las Tecnologías de la Información en la Enseñanza de las Matemáticas, en nuestro caso utilizamos el software Derive perteneciente a los programas CAS (Sistemas de álgebra computacional), que por sus bondades nos permitió en general la manipulación simbólica, es decir, hacer álgebra, pero además, lo más importante fue que este programa brindó la oportunidad a los estudiantes de llevar a cabo la vinculación necesaria de manera dinámica a través de su interface, de las distintas representaciones de las funciones cuadráticas en sus registros de representación, lo que posibilitó que tuvieran acceso a las representaciones de los objetos matemáticos y a las ideas que éstas representan, dotando así de herramientas para que fortalecieran su pensamiento matemático y las transiciones entre los diferentes registros de representación y dentro de un mismo registro. Reforzando lo afirmado por Duval (1993 y 1995), Janvier (1987) y Kaput (1998) citados en la página Web de Tesis de Doctorado en Matemática Educativa en México.

De tal manera que se combinaron los tres marcos para lograr la comprensión de las funciones cuadráticas y detectar además las dificultades a las que se enfrentaron los estudiantes.

3. Método

Se eligió la elaboración de una secuencia didáctica, en la que participaron tres estudiantes de segundo semestre que solo han trabajado una vez el concepto función cuadrática en el aula y seis de cuarto semestre que al participar en esta investigación, trabajarían por tercera vez con el concepto. Cabe mencionar que ambos previamente trabajaron con el software DERIVE, para identificar los trabajos de cada uno, usamos los pseudónimos alumno 1, alumno 2,… hasta el alumno 9. Los estudiantes cursan su bachillerato en el Centro de Servicios de Educación Media Superior a Distancia “El Saucito”, Zacatecas.

La metodología para diseñar la secuencia didáctica, respetó las fases de una ingeniería didáctica, lo que nos brindó la sistematización necesaria para nuestras actividades, pero además nos proporcionó las etapas de análisis de información tanto *a priori* como *a posteriori*, etapas que permitieron desarrollar la fase de validación de la secuencia, confrontando estos dos análisis, la estructura que se ejecutó se presenta en el siguiente cuadro:

SECUENCIA DIDÁCTICA			
Análisis preliminar	Concepción y Análisis *a priori*	Experimentación ó Aplicación	Análisis *a posteriori* y Evaluación
Dimensión Epistemológica Dimensión Cognitiva Dimensión Didáctica	Variables Macro didácticas globales Micro didácticas globales	Puesta en escena	Validación

Para integrar los análisis preliminares consideramos las dimensiones propuestas en De Faria (2006, n/p) que fueron:

Dimensión Epistemológica: Se manejó un recuento histórico de la evolución del concepto función cuadrática por culturas.

Dimensión Cognitiva: En esta dimensión se pretendió mostrar a que problemas se enfrentan los estudiantes al momento de tratar de aprender el concepto de funciones cuadráticas, podemos mencionar que los problemas se pudieran heredar del concepto de función.

Dimensión Didáctica: En esta dimensión presentamos los temas que anteceden al concepto de funciones cuadráticas, además añadimos las propuestas y sugerencias de cómo enseñarse todos los temas concernientes a los programas de matemáticas.

El diseño de la secuencia didáctica constó de cuatro secuencias de actividades nombradas secuencia cero, secuencia uno, secuencia dos y secuencia tres.

El objetivo de plantear las actividades de la Secuencia Cero, es obtener el punto de partida: identificar la información o conocimientos que los estudiantes tienen respecto a las funciones cuadráticas. Con dichas actividades se espera explorar qué tanto puede transitar entre las diferentes representaciones de estas funciones; de tal manera que al realizar los ejercicios, pongan en juego, tanto como se pueda, la coordinación entre los diferentes registros de representación con los que cuentan las funciones cuadráticas y la relación de las diferentes representaciones semióticas en un mismo registro.

La secuencia uno se distingue primero por tener como objetivo lograr articular el tránsito entre la Representación Gráfica y la Representación Algebraica en los estudiantes. Es necesario mencionar, que esta secuencia se dividió en cinco secciones que se definieron y ordenaron pensándolas como las etapas en las que se logra la identificación entre representaciones, además de su grado de dificultad. Se propusieron actividades como:

En el derive en una misma pantalla grafica las siguientes funciones cuadráticas:

$$f(x) = 1/10x^2; \quad f(x) = 10x^2; \quad f(x) = -1/100x^2; \quad f(x) = -100x^2$$

Observa cómo solo varía el coeficiente de x^2.

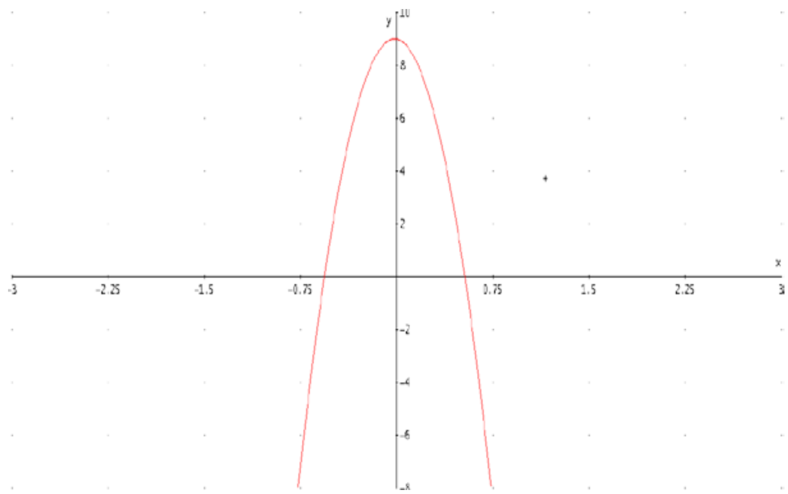
Describe lo que pasa con las parábolas, de acuerdo con la variación del coeficiente de la x^2.

Ahora responde a las cuestiones siguientes, trata de abundar en tú respuesta.

¿Qué sucede con las ramas de las parábolas cuando a es positivo?
¿Qué sucede con las ramas de las parábolas cuando a es positivo y más lejano de cero?
¿Qué sucede con las ramas de las parábolas cuando a es positivo y más cercano a cero?
¿Qué sucede con las ramas de las parábolas cuando a es negativo?
¿Qué sucede con las ramas de las parábolas cuando a es negativo y más cercano a cero?
¿Qué sucede con las ramas de las parábolas cuando a es negativo y más lejano de cero?
¿Qué puedes deducir entonces del comportamiento de la función cuadrática con respecto a la variación de a ?

Este tipo de actividades y análisis se implementó para cada uno de los coeficientes y término lineal que pueden influir en el comportamiento de la gráfica de una función cuadrática. Evaluando los avances de los jóvenes con la siguiente actividad.

II. *De acuerdo con la siguiente gráfica y suponiendo que le asignamos la siguiente expresión algebraica $f(x) = ax^2 + bx + c$ describe las características de cada uno de los coeficientes.*



5.1.- ¿Describe cómo debe ser a para que corresponda a esta función cuadrática?
5.2.- ¿Describe cómo debe ser b para que corresponda a esta función cuadrática? (Lo que puedas escribir)
5.3.- ¿Describe cómo debe ser c para que corresponda a esta función cuadrática, pudieras dar el valor exacto dar el valor exacto de éste término?

En la secuencia de actividades dos se dividió en tres secciones, en la primera sección se hace un breve recuento de las partes de la parábola, cómo inciden cada uno de los coeficientes y término independiente en la gráfica de las funciones cuadráticas.

En la segunda sección les presentamos a los estudiantes otra representación algebraica de las funciones cuadráticas (forma canónica). También mostramos cómo se puede transformar una expresión algebraica en otra. En particular se desarrolló el proceso de transitar de la forma canónica $(f(x) = a(x-h)^2 + k)$ a la forma general de una función cuadrática $(f(x) = ax^2 + bx + c)$, esperando que con el tránsito entre estas representaciones dentro de un mismo registro de representación, se fortalezca o active simultáneamente, el tránsito de la representación gráfica a la representación algebraica.

Por último el objetivo de la secuencia tres fue evaluar las diferentes transiciones entre los registros que elegimos para analizar, esta secuencia resultó ser bastante extensa pero cumplió con las expectativas generadas en ella.

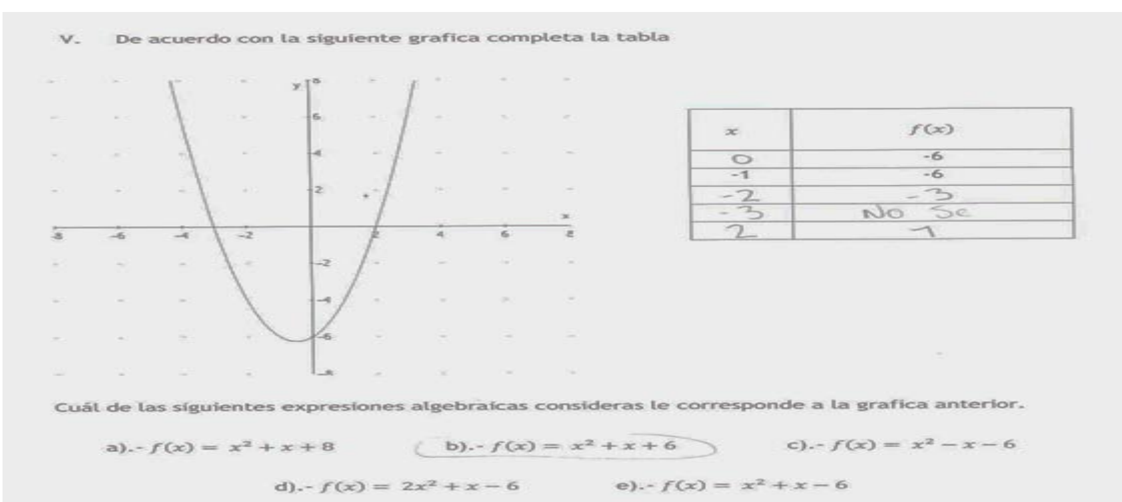
Las variables que se analizaron en el desarrollo de las actividades de las secuencias y en la validación de éstas son:

- La transición entre la Representación Tabular y la Representación Gráfica y viceversa.
- La transición entre la Representación Tabular y la Representación Algebraica e inversamente.
- La transición entre la Representación Algebraica y la Representación Gráfica y recíprocamente.
- La transición entre las representaciones Algebraicas dentro de éste mismo registro.

4. Resultados

A continuación presentamos de manera sucinta las aportaciones más relevantes que obtuvimos de este estudio enseguida por secuencia los resultados de acuerdo a las variables definidas para analizar cada una de las secuencia de actividades.

En la secuencia cero (punto de partida) los estudiantes si identificaron las funciones cuadráticas y la relacionan con la palabra parábola. No realizan correctamente operaciones numéricas. Cometieron errores debido al mal manejo de las leyes de los signos y potencias, lo que provocó que no realizaran correctamente el cálculo del valor de la función en algunos puntos, a partir de la expresión algebraica. En cuanto a las transiciones quienes lograron acertar en el cálculo de los valores si identificaron los puntos en el plano cartesiano para trazar la gráfica correspondiente, en las transiciones entre los registros de representación gráfica - tabular y viceversa, los jóvenes en términos generales si las lograron (se supusieron las más sencillas), para la transición entre los registros gráfico y algebraico se detectaron dificultades como las que se muestran.



Presentamos las siguientes tablas para su análisis, en su contenido se presentan las respuestas tal y como contestaron los estudiantes (conservando las faltas de ortografía) las cuestiones finales de la secuencia uno que se presentaron en este reporte.

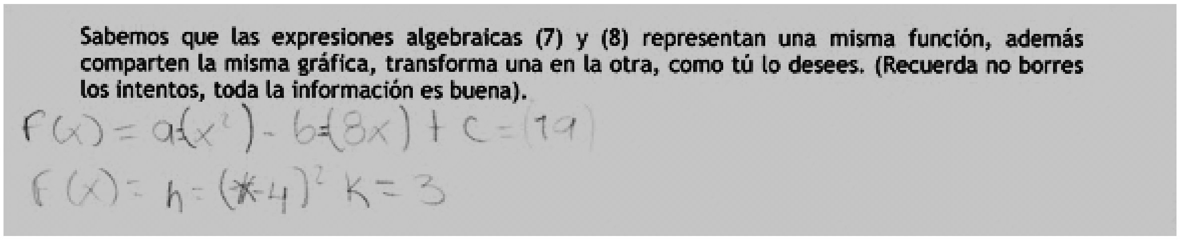
Alumno/Sección 5.1	**¿Describe cómo debe ser a para que corresponda a esta función cuadrática?**
Alumno 1	Creo que a debe tener un valor positivo de $\frac{1}{2}$.
Alumno 2	a *deve* ser negativo para que así abra hacia abajo.
Alumno 3	Debe tener el signo negativo.
Alumno 4	a *debe* ser (positiva) y elevada al cuadrado la x negativa -8.
Alumno 5	Negativa.
Alumno 6	9 para que pase por el nueve.
Alumno 7	$c = A + x$.
Alumno 8	$\neq 0$ y $= c$ negativa.
Alumno 9	a *debe* ser negativa para que la grafica abra hacia abajo.
Respuesta esperada	a debe ser negativo.

Alumno/Sección 5.2	**¿Describe cómo debe ser b para que corresponda a esta función cuadrática? (lo que puedas escribir)**
Alumno 1	Creo que debe tener un valor positivo de 8.
Alumno 2	b no debe de existir o debe de *se* $b = 0$.
Alumno 3	b donde toca los ejes x (corrigió)
Alumno 4	Lineal sin elevarse al cuadrado y positiva 0.75.
Alumno 5	$b = 0$.
Alumno 6	0.5 para que queden igual.
Alumno 7	$B = c + x$.
Alumno 8	$= 0$ y $= c$ negativa.
Alumno 9	Podría ser negativa o positiva $-ax^2 \pm bx + c$.
Respuesta esperada	Debe ser cero.

Alumno/Sección 5.3	**¿Describe cómo debe ser c para que corresponda a esta función, pudieras dar el valor exacto de este término?**
Alumno 1	Creo que debe tener un valor positivo de 9.
Alumno 2	c *debe* ser positivo pues c define el punto en el que va a cortar a la grafica en eje y.
Alumno 3	Es donde la grafica toca o cruza el eje x en este caso 9.
Alumno 4	Un numero o termino independiente 9.
Alumno 5	$c = 9$.
Alumno 6	No *se*.
Alumno 7	c *debe* ser mas grande.
Alumno 8	$\neq 0$ y ser 9 positiva.
Alumno 9	c *debe* ser positiva.
Respuesta esperada	Debe ser nueve.

Podemos afirmar que los estudiantes han mejorado con respecto al tránsito entre el registro gráfico y el registro algebraico, al observar en las respuestas de los estudiantes que identificaron las características del coeficiente cuadrático, incluso para el término independiente lograron encontrar el valor exacto de éste (seis alumnos de nueve), se percibió además dificultades para describir el coeficiente del término lineal. Para fortalecer el tránsito antes mencionado se aplicó la secuencia dos.

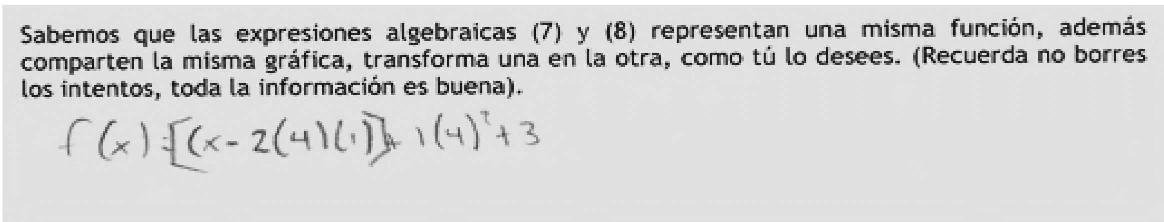
Luego del análisis de la secuencia dos los resultados fueron desalentadores al recibir respuesta en la mayoría de los casos como la siguiente.



Sabemos que las expresiones algebraicas (7) y (8) representan una misma función, además comparten la misma gráfica, transforma una en la otra, como tú lo desees. (Recuerda no borres los intentos, toda la información es buena).

$f(x) = a(x^2) - b(8x) + c = (19)$

$f(x) = h = (x4)^2 \; k = 3$

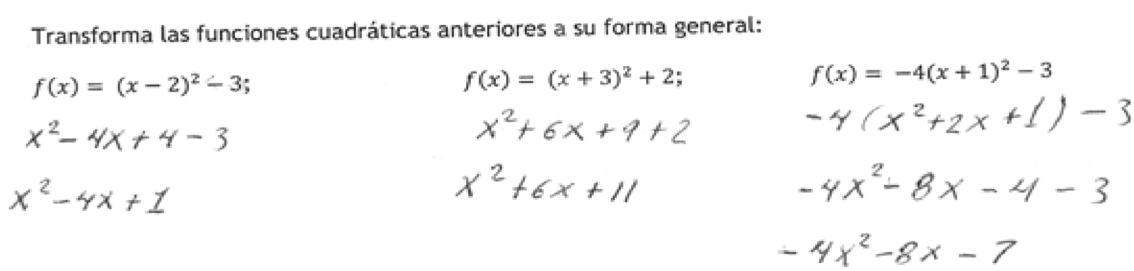


Sabemos que las expresiones algebraicas (7) y (8) representan una misma función, además comparten la misma gráfica, transforma una en la otra, como tú lo desees. (Recuerda no borres los intentos, toda la información es buena).

$f(x) = [(x - 2(4)(1)] + 1(4)^2 + 3$

Lo anterior nos proporciona información suficiente para afirmar que los estudiantes no fortalecieron el tránsito entre dos representaciones dentro de un mismo sistema de representación semiótica.

Para el comienzo de la secuencia tres los estudiantes ya sólo mostraron problemas en la transición de representaciones en un mismo registros pero de índole procedimental, ya que siete de los nueve participantes lograron este tránsito e identificaron que de la gráfica de las funciones cuadráticas se obtiene más información acerca de las características de los valores participantes en la forma canónica para luego transitar a la forma general, al detectar que se trata de la misma función pero representada de diferente manera.



Transforma las funciones cuadráticas anteriores a su forma general:

$f(x) = (x-2)^2 - 3;$

$x^2 - 4x + 4 - 3$

$x^2 - 4x + 1$

$f(x) = (x+3)^2 + 2;$

$x^2 + 6x + 9 + 2$

$x^2 + 6x + 11$

$f(x) = -4(x+1)^2 - 3$

$-4(x^2 + 2x + 1) - 3$

$-4x^2 - 8x - 4 - 3$

$-4x^2 - 8x - 7$

Este es el resultado de unos de los estudiantes que logró desde un inicio la transición las representaciones algebraicas y lo mejoro en la secuencia tres.

Al final de esta secuencia los alumnos mostraron en sus respuestas que fortalecieron las transiciones entre diferentes registros, pero más en el que consideramos el más difícil, la transición del registro de representación gráfica al registro de representación algebraica, aunque la transición efectiva no la lograron, nos pudimos percatar que ocurrió porque los jóvenes incurren en muchas fallas al momento de realizar operaciones con números reales, además tienen problemas con el desarrollo de binomios al cuadrado, situación que perturba las conexiones entre registros.

5. Conclusiones

Para la comprensión de un concepto matemático y en nuestro caso las funciones cuadráticas, fue necesario que los alumnos conocieran las diferentes representaciones semióticas que tiene dicho concepto dentro del registro de representación algebraico, lo que permitió ampliar el panorama de relaciones y conexiones con el registro de representación gráfico, fortaleciendo y contribuyendo a aumentar el grado de entendimiento de las funciones cuadráticas en nuestros estudiantes.

Las secuencia didáctica cumplió favorablemente con sus objetivos, el apoyo del Derive fue fundamental al reforzar con su aplicaciones las actividades que se sugirieron realizar, puesto que en la validación de la secuencia los alumnos mejoraron y en algunos casos con la ayuda del derive rodearon o subsanaron los problemas con las operaciones de números enteros, el desarrollo de binomios, etc.

La investigación revela que los problemas que arrastran consigo los estudiantes para realizar con éxito las operaciones con números reales y potencias representan un obstáculo para que logren las transiciones entre los diferentes registros de representación semiótica efectivas, aún así la esencia de las actividades y las relaciones entre representaciones en un mismo registro y entre distintos registro la reconocieron, lo que frustro la efectividad en las transiciones.

Consideramos necesaria mayor interacción del asesor a cargo de la Secuencia Didáctica, puesto que él puede orientar más, tanto las actividades de los alumnos de acuerdo a los objetivos de cada actividad, como a los propios estudiantes, lo cual permitiría que los alumnos escriban o expresen con más fidelidad lo requerido.

Se puede percibir poca la interacción de los alumnos con el Derive, pero los resultados fueron muy significativos, puesto que en la fase de validación de la secuencia, la comparación del punto de partida con el resultado final, no permite mencionar que el 70 % de los jóvenes mejoraron sustancialmente sus transiciones entre registros de representación semiótica de las funciones cuadráticas.

6. Referencias

Brousseau G. (1986). *Fundamentos y Métodos de la didáctica de la Matemática*. Facultad de Matemática, Astronomía y Física.Universidad Nacional de Córdoba, (p. 37)

Cantoral R. Farfan R., Cordero F., Alanis J., Rodriguez R., Garza A., (2005 reimpresión 2008). *Desarrollo del pensamiento matemático*. (pp. 41-52), Trillas, ITESM, Uniersidad virtual.

De Faria E., (2006). Ingeniería didáctica, *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Año 1, número 2.

Duval, R., (1998). Registro de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 173-201). Grupo Editorial Iberoamérica: México.

Educación Matemática –Universidad de Sonora-, extraída el 19 de Marzo de 2011, desde: http://fractus.uson.mx/Papers/Varios/DoctCinvest.html

Hitt, F., (2001). *El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en educación matemática*. Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav- IPN. México. En Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro (P. Gómez & L. Rico Editores). Universidad de Granada, pp. 165-177.