

POLÍGONOS: CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL CONTENIDO DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Emma Carreño, Universidad de Piura (Perú)

Nuria Climent, Universidad de Huelva (España)

RESUMEN

Las dificultades geométricas evidenciadas por los alumnos, son una constante en la educación básica y en la formación de estudiantes para profesor. Apoyados en el Modelo de razonamiento de Van Hiele, y considerando la promoción y el desarrollo de capacidades y habilidades en todo proceso de aprendizaje enseñanza, se muestra el análisis del conocimiento geométrico que tienen estudiantes peruanos en el tema de polígonos, además de dos casos en los que se ha realizado una caracterización del conocimiento del contenido que poseen y de las capacidades y destrezas que evidencian (o no) en dicho tema.

ABSTRACT

Geometrical difficulties shown by students in compulsory education and teacher education are a permanent feature. We present here the general characterization of Peruvian student teachers' geometrical content knowledge related to polygons, based on the Van Hiele model of reasoning and considering the promotion and development of capacities and skills in any teaching-learning process. The analysis of two cases and the characterization of their content knowledge and their abilities and skills in relation to polygons are added.

Carreño, E., Climent, N. (2009). Polígonos: conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 187-196). Santander: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

La geometría es uno de los componentes matemáticos de la educación básica peruana, a pesar de ello, los estudiantes muestran serias limitaciones al definir, clasificar y representar gráficamente objetos geométricos, más aún al momento de realizar alguna demostración. Así, lo observado durante la formación de pre-grado y la docencia universitaria en la asignatura de *Geometría Plana y Trigonometría*¹, permitió reparar en la reincidencia de las limitaciones antes señaladas y querer indagar sobre los conceptos y representaciones gráficas que tienen los estudiantes para profesor de matemáticas (en adelante EPM) respecto al tema de polígonos. En el estudio que aquí se presenta, que forma parte de un trabajo de fin de máster, analizamos la concepción que tienen los EPM de los polígonos y se describe en función de las capacidades que se ponen en juego (o que se omiten) al momento de razonar en torno al tema de polígonos.

MARCO TEÓRICO

Nuestro trabajo se enmarca en los estudios que, tras la diferenciación de las componentes del conocimiento profesional del profesor propuesta por Shulman y su equipo (Shulman, 1987), indagan sobre las necesidades de los profesores respecto del conocimiento de contenido matemático. En lo que se refiere a contenido geométrico, estudios tanto internacionales (Burton et al., 1986; Linchevsky et al., 1992) como nacionales (Gutiérrez y Jaime, 1996; Guillén, 2000; Contreras y Blanco, 2002; Climent y Carrillo, 2002) han detectado carencias al respecto². Nos interesa el conocimiento de contenido de los EPM que incluye el conocimiento de los elementos constituyentes de dicho contenido (como, por ejemplo, los elementos característicos de la noción de polígono). Es en ese sentido que nos acercamos más al *conocimiento especializado* que al *común del contenido*, según la diferenciación de Ball et al (2008)³.

La formación de conceptos geométricos

Gutiérrez y Jaime (1996) sostienen que en la formación de la imagen de un concepto juega un papel básico la propia experiencia y los ejemplos mostrados o usados en los contextos escolar y extraescolar. Esto se apoya en la diferenciación de Vinner (citado en Gutiérrez y Jaime, 1996) entre imagen conceptual (la representación mental que al estudiante evoca un término u objeto) y definición conceptual (enunciado verbal que un estudiante tiene en su memoria y recita cuando es requerido). Se constata que no siempre hay correspondencia entre la imagen y la definición conceptual

Fischbein (1993), por su parte, distingue respecto de las figuras geométricas tres categorías de entidades mentales, aportando a la distinción de Vinner la idea del concepto figural, entendido como una realidad mental, el constructo manejado por el

1 Es una asignatura del tercer ciclo (segundo año) de formación universitaria para profesor de secundaria con especialidad de matemática y física de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Piura (Perú).

2 Una interesante aportación a este respecto es el trabajo de Barrantes y Blanco (2004), en el que se indaga sobre las propias percepciones de los estudiantes para profesor respecto de dichas carencias.

3 La diferencia entre ambos reside en que el especializado no es necesario en otros ámbitos más que en la enseñanza de la matemática. Para estos autores, el conocimiento especializado del contenido es además un conocimiento puro de la materia, en el sentido de que puede diferenciarse (a nivel analítico) del conocimiento pedagógico, sobre los estudiantes o el propio conocimiento didáctico del contenido.

razonamiento matemático en el dominio de la geometría. Está desprovisto de cualquier propiedad concreta-sensorial (color, peso, etc.) pero exhibe propiedades figurales.

En nuestro trabajo hacemos uso de los tres primeros niveles de Razonamiento Geométrico establecidos en el Modelo de Van Hiele. Dichos niveles son etapas por las que pasa el alumno para conseguir un nivel de abstracción y formalización en su razonamiento. Estos guardan una jerarquización y secuencialidad entre ellos. A continuación se presenta una tabla, adaptada y modificada de la propuesta en Gutiérrez y Jaime (1990) que resume las características de los tres primeros niveles (los relativos a los resultados de nuestro trabajo).

Nivel	Elementos explícitos (desarrollados)	Elementos implícitos (por desarrollar)	Tipos de redes construidas
<i>I. Reconocimiento</i>	Percepción global de figuras	Conciencia de las partes y propiedades de las figuras.	Muy simples. Formadas por nombres de figuras sin conexión (subredes independientes).
<i>II. Análisis</i>	Identificación de las partes y propiedades de las figuras.	Implicaciones entre las propiedades.	Simples. Se amplían las subredes, aunque continúan siendo independientes. Las relaciones se basan en la memoria y la observación. Se establecen únicamente entre cada propiedad y las representaciones verbal o gráfica de la figura.
<i>III. Clasificación</i>	Implicaciones entre las propiedades.	Deducción formal de teoremas.	Poco complejas Permite integrar diversas subredes en una sola red, estableciendo relaciones lógicas utilizando materiales.

Tabla 1

Una propuesta de categorías para el estudio del conocimiento geométrico

Para operativizar el análisis del conocimiento geométrico del alumno, diferenciando gradientes en dicho conocimiento, nos hemos fijado en capacidades y destrezas relevantes desde el punto de vista del contenido.

Como Román y Díez (2004), entendemos que la capacidad es una habilidad general que utiliza o puede utilizar el aprendiz para aprender, su componente

fundamental es cognitivo⁴. La destreza, por su parte, es una habilidad específica, que utiliza o puede utilizar un aprendiz para aprender. Un conjunto de destrezas constituyen una capacidad.

Las categorías establecidas para analizar el conocimiento geométrico que tienen los EPM (en función de capacidades) son: Percepción de la figura (PF), Descripción de la figura (DF), Definición matemática (DM), Razonamiento matemático (RM) y Demostración matemática (DMM). La determinación de éstas se fundamenta principalmente en la descripción del Modelo de Razonamiento de Van Hiele y en consideraciones sobre el aprendizaje geométrico. Además, el diseño curricular nacional⁵ apoyan la importancia de estos procesos en el conocimiento matemático escolar. A cada una de estas categorías le hemos asociado destrezas que las detallan⁶.

METODOLOGÍA

Este estudio se sitúa dentro del paradigma interpretativo. Su objetivo era describir el conocimiento del contenido de estudiantes para profesor de matemática respecto de algunos temas geométricos, caracterizándolo en función de capacidades y destrezas derivadas de los niveles de Van Hiele (categorías de análisis construidas, explicadas en el epígrafe anterior). En lo que se refiere a este artículo, nos limitaremos a los resultados relativos a la imagen conceptual y definición de polígono.

La muestra estuvo constituida por los 12 EPM que cursaban la mencionada asignatura de Geometría Plana y Trigonometría. De ellos, se seleccionó a dos para la descripción de sus modelos mentales, tomando en cuenta la corrección (E4⁷) y el error (E2) en las respuestas vertidas.

Se elaboraron cuatro test sobre los temas ángulos, triángulos y polígonos. En dicha elaboración se tuvo como referencia las actividades y tareas de las unidades de enseñanza Polígonos y Triángulos planteadas por Corberán y otros (1994) y la investigación de Matos (1994). La aplicación de los test se realizó durante las sesiones correspondientes a las unidades didácticas propuestas en el sílabo, previo al abordaje en la asignatura de los contenidos sobre los que se les cuestionaba. En el documento que nos ocupa solo se ha considerado los ítems 1 y 2 del test N°3: Polígonos⁸.

Antes de analizar la información se establecieron indicadores en cada ítem y se asociaron estos con las categorías y destrezas señaladas en el apartado 2⁹. Luego se estableció si en cada indicador estaba presente o no dichas destrezas, o si los estudiantes evidenciaban matices peculiares, anecdóticos o extraños.

4 De los cuatro grupos diferenciados por Román y Diez (2004), nos interesan las cognitivas y dentro de éstas: comprensión simbólica, expresión simbólica, orientación espacial, inducción- deducción, razonamiento lógico, pensamiento operatorio y formal, interiorización de conceptos y planificación del conocimiento.

6 Dada la brevedad de este documento solo se tomará en cuenta las categorías: percepción (PF) y definición matemática (DM). Las destrezas consideradas en ellas son, respectivamente: representación mental, observación directa e indirecta, e identificar elementos reales y matemáticos (en PF), y rigor y precisión, uso adecuado de vocabulario, formulación adecuada y correcta, y análisis-síntesis (en DM).

7 Para referirnos a estudiantes en particular se empleará la letra "E" seguida de un número para distinguirlos entre ellos.

8 Ver Anexo.

9 Ver Anexo.

RESULTADOS

Resultados generales

En lo que se refiere al ítem 1, sólo E9 reconoció correctamente los no polígonos¹⁰ (fig. 3, 7, 10, 11, 12, 13, 14 y 16) y solo E1 y E4 señalaron además de éstas, otras figuras como no polígonos. Los no polígonos que más costó reconocer fueron las figuras 10 (pirámide), 13 (hexágono cruzado) y 14 (octágono cruzado). Además dos EPM consideran los polígonos cóncavos (2 y 6) y los polígonos “raros” (9 y 15) como no polígonos. Esto confirma que los estudiantes tienen imágenes prototípicas (Hershkovitz et al., 1990) fuertemente establecidas que originan confusión con las que se apartan de ellas.

Reconocer las figuras 3 y 16 como no polígonos, confirma que los estudiantes tienen claro que un ángulo se forma por la unión de porciones de rectas (rayos), sin que puedan intervenir líneas curvas. No obstante, hay quienes no señalan que la circunferencia no es polígono (E7 y E8).

Todos los EPM conciben los polígonos como figuras cerradas, de aquí que hayan señalado a las figuras 7 y 11 como no polígonos, mientras que solo cuatro EPM (E1, E4, E8 y E9) consideran que los lados de un polígono no se pueden intersectar.

Tres EPM (E1, E2 y E4) conciben los polígonos solo como figuras convexas.

En lo que se refiere a la definición de polígono (ítem 2) sólo cuatro de ellos (E1, E4, E6 y E10) explicitan la característica de figura cerrada (aunque observamos que todos la consideraban en el ítem 1). Igualmente, aunque E1, E4, E8 y E9 consideran que los lados de un polígono no se pueden intersectar, solo E1 y E3 lo explicitan al momento de definir.

Tres de los EPM (E1, E3 y E9) restringen, al definir polígono, que los lados de éste deben ser coplanares. Estos alumnos son coherentes en lo que se refiere a señalar la figura 10 (pirámide) como no polígono. Mientras E3 cree que el triángulo no es un polígono, sólo 3 EPM (E2, E8 y E11) explicitan que sí lo es. Finalmente, siete EPM (E4, E5, E6, E7, E8, E10 y E12) consideran en la definición de polígono alguna propiedad irrelevante.

Dos modelos mentales

Modelo mental de E4

E4 muestra un comportamiento coherente y estable en todos los test. Ha sido el segundo en dar la mayor cantidad de respuestas correctas, correctas peculiares y no ha vertido respuestas correctas con matiz extraño.

Conocimiento geométrico

E4 concibe como polígonos solo las figuras convexas y prototipos a la vez, así a la figura 15, la considera no polígono, seguramente por su forma poco usual (parece un rectángulo dentro de otro). Esta postura se mantiene en todo el test N°3 aunque en una de sus preguntas traza las diagonales de polígonos cóncavos y poco comunes.

¹⁰ Se considera que: *Un polígono es la unión de segmentos no colineales determinados por n puntos coplanares distintos ($n > 2$) en los que dichos segmentos no se intersectan, salvo en sus extremos.*

Capacidades y destrezas matemáticas

◆ Percepción de la figura

Su percepción es bastante limitada ya que concibe solo las figuras convexas como polígonos sin apelar al análisis de las figuras a la luz de las propiedades de cada cual.

◆ Definición matemática

Aunque utiliza los términos geométricos al definir, no precisa todas las propiedades necesarias y suficientes de los polígonos, incluso excluye erróneamente los polígonos cóncavos e incluye las figuras de lados cruzados como la n°13, pues no explicita que los lados del polígono no pueden cortarse. La definición dada fue: *“Es una figura geométrica convexa, cerrada y plana en cuyo interior se forman ángulos de cada vértice y desde estos parten las diagonales”*.

Lo descrito hasta aquí corrobora lo señalado en el nivel de análisis de Van Hiele, ya que cuando los alumnos definen en este nivel, se limitan a enunciar propiedades sin considerar las necesarias y las suficientes.

Modelo mental de E2

E2 se ha caracterizado por proporcionar la mayor cantidad de respuestas incorrectas. Además, más que lo peculiar, resalta en él, las respuestas con matiz extraño, tanto en aquellas que son correctas como en las incorrectas.

Conocimiento geométrico

Su concepción de polígono es limitada y contradictoria. Lo define como *“... una figura geométrica convexa de lados, formada por la unión de tres o más segmentos”*. Excluye, sin embargo, la figura 6 de los no polígonos y señala como no polígono la figura de lados cruzados 14, pero no la 13. Tampoco señala la figura 11 (abierta) como no polígono y en la justificación de las figuras consideradas como no polígonos (2, 3, 7, 10, 12, 14 y 16) afirma que los polígonos *“deben cumplir como requisito que sean convexas y que estén formadas por la unión de segmentos rectos, mas no curvilíneos”*.

Capacidades y destrezas matemáticas

◆ Percepción de la figura

La percepción adecuada de los polígonos se ve impedida por la confusa concepción que se tiene de aquel objeto, si bien afirma que los polígonos son figuras convexas, omite señalar como no polígonos las figuras 6, 9 y 13.

◆ Definición matemática

La definición dada carece de rigurosidad y precisión, por esto diferenciar entre un polígono y un no polígono le resulta complejo y contradictorio.

La siguiente tabla resume las capacidades y destrezas que evidenciaron E4 y E2 a lo largo del test N°3: Polígonos.

Comparación de las Capacidades y Destrezas Matemáticas Manifestadas		
Capacidad	E4	E2
Percepción de la figura	Limitada y prototípica.	Limitada y confusa.
	Lo que parece ser, es.	Confía más en la apariencia de la figura que en la esencia de la misma.
Descripción de la figura	Observación y análisis indirecto y poco riguroso, la identificación de elementos se reduce a lo puramente perceptual y a lo memorístico para el caso de las fórmulas.	Se reduce a lo que se percibe y solo respecto de los polígonos convexos.
Definición matemática	Utiliza vocabulario adecuado.	Carece de rigor y precisión.
	Establece demasiadas restricciones, tales como excluir los polígonos cóncavos.	Enuncia propiedades sin reparar si son necesarias y suficientes.
Razonamiento matemático.	Explicita relaciones de dependencia entre lados, vértices, ángulos interiores y diagonales de un polígono.	Explicita relaciones de dependencia entre lados, vértices, ángulos interiores y diagonales de un polígono pero solo para los regulares.

Tabla 2

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos corroboran que el conocimiento geométrico de los EPM, en general, es limitado conceptualmente y por ello, carente de redes matemáticas complejas y de relaciones inclusivas entre varios objetos geométricos.

La apariencia de las figuras y lo percibido de una representación gráfica, predomina sobre los conceptos que los EPM tienen de los objetos geométricos, de allí que no buscan establecer herramientas de control para verificar la coherencia entre la imagen conceptual y la definición formal que se tiene sobre determinado objeto geométrico (coincidiendo con los resultados de Blanco y Contreras, 2002).

El desarrollo de capacidades y destrezas, propias de un razonamiento formal, no se evidencia en las respuestas vertidas por los EPM. Antes bien, se observa una postura eminentemente intuitiva, apoyada en lo concreto, en lo experimental (manipulativo) y en lo que *parece ser*.

Establecer definiciones matemáticas es una actividad ligada a prototipos y representaciones estereotipadas, además de vincularse con la ausencia de discriminación entre propiedades necesarias y suficientes. La fuerza de las imágenes estereotipadas se

mantiene pues desde niveles de enseñanza básicos (Moriena y Scaglia, 2003; Scaglia y Moriena, 2005) hasta la formación de profesores.

Aunque nuestro objetivo no ha sido clasificar el razonamiento de los estudiantes en niveles de Van Hiele, los resultados obtenidos en el estudio completo indican que se moverían en los niveles 1 y 2 de los mismos, coincidiendo con los resultados de otros estudios con alumnos de secundaria y otros tópicos geométricos (Gualdrón y Gutiérrez, 2007).

BIBLIOGRAFÍA

- Ball, D., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barrantes, M., Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para Maestro sobre la geometría Escolar. *Enseñanza de las Ciencias*, 22 (2). 241-250.
- Burton, K.; Cooper, M. & Leedor, G. (1986). Representations of three-dimensional figures by mathematics teachers-in-training. En University of London Institute of Education (eds.), *Proceedings of the 10th PME Internacional Conference*, 81-86.
- Climent N., Carrillo, J. (2002). Ejemplificación de una propuesta formativa: El uso de situaciones de primaria en la formación inicial. En L.C. Contreras y L.J. Blanco (eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente*. Cáceres: Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones, 125-180.
- Contreras, L..C., Blanco, L. (2002). Un modelo formativo de maestros de primaria en el área de matemáticas en el ámbito de la geometría. En L.C. Contreras y L.J. Blanco (eds.), *Aportaciones a la formación inicial de maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente..* Cáceres: Universidad de Extremadura. Servicio de Publicaciones, 93-124.
- Corberán, R.; Gutiérrez, A. y otros (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de Van Hiele*. Madrid: C.I.D.E.- M.E.C.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Gualdrón, E., Gutiérrez, A. (2007). *Una aproximación a los descriptores de los niveles de razonamiento de Van Hiele para la semejanza*. En M. Camacho; P. Flores y P. Bolea (eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*. Tenerife: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM, 369-380.
- Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(1), 35-53.
- Gutiérrez, A., Jaime, A. (1996). Uso de las definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de magisterio. En J. Giménez, J. y otros (eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada: Comares, 143-170.

- Hershkowitz, R. et al. (1990). Psychological aspects of learning geometry. En P. Nesher & J. Kilpatrick (eds.), *Mathematics and cognition*. Cambridge: Cambridge University Press, 70-95.
- Jaime, A., Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el modelo de Van Hiele. En S. Llinares y M.V. Sánchez, (eds.), *Teoría y práctica en la educación matemática*. Sevilla: Alfar, 295-384.
- Linchevsky, L.; Vinner, S. & Karsenty, R. (1992). To be or not to be minimal? Student teachers' views about definitions in geometry. En W. Geeslin & K. Graham (eds.), *Proceedings of the 16th PME International Conference*, 2, 48-55.
- Matos, J. (1994). *Cognitive models of the concept of angle*. Proceedings of the XVIII PME Conference. University of Lisbon. Portugal. Vol. III, 263-278.
- Ministerio de Educación (2008). Diseño Curricular Nacional de Educación Básica Regular. Lima: Fénix
- Moriena, S.y Scaglia, S. (2003). Efectos de las representaciones gráficas estereotipadas en la enseñanza de la geometría. *Educación Matemática*, 15, 5-19.
- Román, M., Diez, E. (2004). *Diseños curriculares de aula. Un modelo de planificación como aprendizaje-enseñanza*. Argentina: Novedades educativas.
- Scaglia, S., Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, 17, 105-120.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.

ANEXO: Test N°3: Polígonos

1. Observe detenidamente cada una de las siguientes figuras. Indique aquellas que no son polígonos. Justifique en cada caso.



2. Defina qué es polígono

Test N° 3: Evaluación preliminar del conocimiento sobre polígonos		
Ítem/ Categoría de Análisis	Destrezas	Indicador
1/ Percepción de la Figura (PF)	<ul style="list-style-type: none"> Representación mental. Observación directa e indirecta. Identificar elementos reales y matemáticos. 	1. Reconoce que solo 3, 7, 10, 11, 12, 13, 14 y 16 no son polígonos.
		2. Considera que los polígonos tienen lados rectilíneos, no curvos.
		3. Reconoce que los polígonos son figuras cerradas.
		4. Sabe que los lados de un polígono no se pueden intersecar.
		5. Considera que los ángulos internos de un polígono pueden ser cóncavos.
2/ Definición matemática (DM)	<ul style="list-style-type: none"> Rigor y precisión. Uso adecuado de vocabulario. Formulación adecuada y correcta. Análisis y síntesis- 	1. Señala que el polígono es una figura cerrada.
		2. Indica que los segmentos (lados) deben ser no colineales.
		3. Reconoce que los lados de un polígono no se cortan.
		4. Señala que los lados de un polígono deben ser coplanares.
		5. Reconoce la posibilidad de ser convexas o cóncavas.
		6. Indica la necesidad de tres o más segmentos.
		7. Define evitando enunciar propiedades irrelevantes (como: suma de la medida de los ángulos internos...)
		8. Al definir explicita todas las propiedades determinantes.
		9. Define polígono regular como la figura de lados iguales y ángulos congruentes.

Tabla 3. Elementos para el análisis del conocimiento sobre polígonos