EJEMPLO DE PERSPECTIVAS DIDÁCTICAS AD HOC EN PROBLEMAS ESPECÍFICOS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Astrid Morales Soto, Marcela Parraguez González
ammorale@ucv.cl, marcela.parraguez@ucv.cl
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile
Avance de Investigación
Superior

Resumen
Presentamos un análisis desde una postura didáctica de distintos hechos didácticos específicos, a través de ejemplos. El primero se sitúa en el estudio del concepto de dimensión de un espacio vectorial real de dimensión finito, bajo un enfoque cognitivo donde se utilizan la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska como marco teórico y un diseño metodológico de estudio de caso. El segundo ejemplo aborda, bajo el enfoque de la aproximación Socioepistemológica, el tema de cómo ciertos elementos que son tratados en las ecuaciones diferenciales ordinarias suelen presentarse en forma desarticulada con una mirada al discurso matemático escolar y poniendo atención en cómo la modelación-graficación ayuda en la construcción de conocimiento.

Palabras Clave: *Modos, pensamiento, ecuación diferencial, socioepistemología*

1. Introducción

Nuestro objetivo es presentar dos tópicos que se enseñan en el nivel superior, uno de álgebra y el otro de cálculo y, a través de ellos, exhibir cómo éstos son abordados en la didáctica de la matemática desde dos perspectivas diferentes (marcos teóricos específicos) pero con un mismo objetivo, el de investigar aquellos elementos que pueden estar influyendo en la enseñanza y el aprendizaje de estos tópicos.

2. Primer Ejemplo

Desde una postura cognitiva presentamos el hecho didáctico de concebir el concepto de dimensión de un espacio vectorial real finito en modos de pensamiento, para responder y orientar la reinstalación de la definición de dimensión de un espacio vectorial real finito, en estudiantes que hacen uso de este concepto. Para este efecto se indagará desde una postura cognitiva en los modos de pensamiento que configuran las distintas interpretaciones, de la definición de dimensión de un espacio vectorial real finito que se ha instalado en los docentes y aprendices del concepto en cuestión: *"Dado un espacio de vectorial V, el cual se dice de dimensión r, si tiene una base de r vectores de V"*.

Si prestamos atención en lo específico de la definición anterior, se traduce en una perspectiva teórica y operativa, que caracteriza desde una sola interpretación –análitico-aritmético– el concepto de dimensión, excluyendo especificidades geométricas, y aún más, la definición privilegia un solo sistema de representación –el algebraico– lo que significa que él determina el tipo de manipulaciones que pueden ser puestos a disposición de los aprendices.

La formación matemática en tópicos de álgebra lineal en varias carreras de universidades latinoamericanas es hoy y ha sido por muchos años un pilar fundamental para ellas, por ende, la exigencia radica fundamentalmente en posicionar a nuestros aprendices de conceptos matemáticos, en particular el que se presenta aquí –el concepto de dimensión de un vectorial real finito– en una posición privilegiada para alcanzar el aprendizaje de este y otros conceptos matemáticos u otro tipo de tareas o problemas que evidencien su presencia.

Diversas investigaciones han indagado en cuestiones del álgebra lineal, por ejemplo, Dorier y su equipo (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 1997) hablan acerca del obstáculo del formalismo. Estos autores concluyen que “para la mayoría de los estudiantes, el álgebra lineal no es más que un catálogo de nociones muy abstractas que ellos nunca pueden imaginarse” y que manejan mecánicamente. Así también, se ha reportado que el discurso matemático escolar del álgebra lineal privilegia el tratamiento algorítmico a través de las llamadas técnicas de resolución, en desmedro de la comprensión conceptual de nociones básicas (Dorier y Sierpinska, 2001). Otras investigaciones apuntan a las dificultades que los estudiantes tienen cuando están aprendiendo el concepto de espacio vectorial y a la construcción esquema en sus tres niveles Intra, Inter y Trans del concepto espacio vectorial (Parraguez, 2010), sin embargo la instalación del concepto de dimensión de un espacio vectorial real, desde una perspectiva cognitiva a través de los modos de pensar el álgebra lineal en un ámbito universitario, se presenta como un desafío investigativo pionero, al constatar a través de un cuestionario exploratorio de 20 preguntas, aplicado en el mes de noviembre del año 2010, a 25 estudiantes de Ingeniería Civil y Construcción Civil de una universidad chilena, que el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real, es comprendido en un solo modo de pensamiento –analítico-aritmético–.

Una de las evidencias recogidas en el cuestionario exploratorio, específicamente en la pregunta 2, reafirma lo antes expuesto:

> **Pregunta 2:** Dados los subespacios de $\mathbb{R}^2$, tales que; $W=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big/ x+y=0\right\}$ y $H=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \big/ x=y\right\}$, calcular si es posible: $\dim(W+H)$. Realice las gráficas en el plano real de los subespacios anteriores. ¿Qué puede usted comentar?

Mirando las respuestas de los estudiantes se puede señalar que la falta de incorporación de otros modos de pensar en el trabajo en álgebra lineal, dejan a los estudiantes ciegos frente a realidades evidentes, como la visualización geométrica de los subespacios del plano. Es por esta razón que la pregunta termina con gráficos. Veamos una de las respuestas de los estudiantes:

Estudiante 5: Realiza una grafica como la de valor absoluto. Lo que evidencia la falta de asociación geométrica con la algebraica, de los conceptos del álgebra lineal, (ver Figura 1).

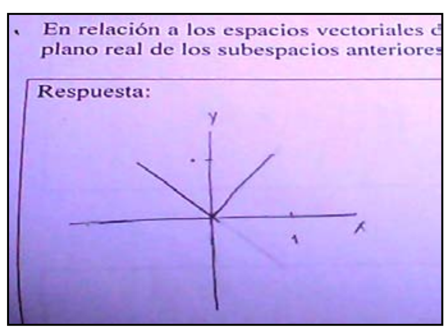


Figura 1. Gráfica que realiza estudiante 5, para la pregunta 2

Por otra parte en los cursos de matemáticas aplicadas para las carreras de Ingeniería, como por ejemplo en el curso de ecuaciones diferenciales, el concepto de dimensión aparece inserto en el espacio solución de una ecuación diferencial lineal homogénea normal de orden *n*, y es en este punto donde se evidencia la falta de comprensión a nivel estructural del concepto de dimensión.

La mirada didáctica de este hecho didáctico considera la teoría de los modos de pensamiento de Anna Sierpinska como marco teórico de la Didáctica de la Matemática.

Sierpinska, identificó tres modos de pensamiento: el sintético-geométrico, el analítico- aritmético y el analítico-estructural.

Estos modos de pensamiento pueden verse como el resultado de una superación de dos obstáculos o dos posiciones dogmáticas opuestas: una, que rechaza los números dentro de la geometría y la otra, que rechaza que la "intuición geométrica" pueda ser llevada a un dominio puramente aritmético. Estos tres modos de pensamiento es preferible considerarlos como igualmente útiles, cada uno en su propio contexto, para propósitos específicos y principalmente cuando están interactuando. La principal diferencia entre los modos 'sintético' y 'analítico' es que en el modo sintético, los objetos son dados directamente para ser descritos por la mente, la cual trata de describirlos, es decir, de manera natural, mientras que en el modo analítico estos objetos son dados indirectamente, de hecho son construidos solamente por la definición de las propiedades de los elementos (Sierpinska, 2000).

Respecto a la diferencia entre los modos de pensamiento analítico-aritmético y analítico-estructural, es que: en el pensamiento analítico-aritmético, un objeto es definido por una fórmula que permite calcularlo, y muchos razonamientos analítico aritméticos tienen una tendencia de mostrar que dos procesos o métodos conducen al mismo resultado; en cambio en el modo de pensamiento analítico-estructural, un objeto es mejor definido por un grupo de determinadas propiedades.

> Si uno está pensando en las posibles soluciones de un sistema de tres ecuaciones lineales con tres variables por visualización de las posibles posiciones de tres planos en el espacio, uno está en el modo sintético-geométrico; y si uno piensa en el mismo problema en términos de los posibles resultados de una reducción por filas de una matriz de , uno está en el modo analítico-aritmético; y si esta pensando en términos de matrices invertibles y no invertibles, podría ser un síntoma del modo analítico-estructural. (Sierpinska, 2000)

Cada uno de los tres modos de pensamiento en álgebra lineal utiliza un sistema específico de representaciones:

El modo de pensamiento *sintético-geométrico* utiliza el lenguaje de las figuras geométricas, planos y líneas, intersecciones, así como sus representaciones gráficas convencionales.

En el modo *analítico-aritmético* las figuras geométricas son entendidas como conjuntos de "n-uplas" de números que satisfacen ciertas condiciones que son escritas, por ejemplo, en la forma de sistemas de ecuaciones o desigualdades. En el modo analítico-aritmético, las componentes numéricas de los objetos geométricos, como puntos o vectores son importantes. Así, por ejemplo, un sistema general de ecuaciones podría ser escrito usando todos sus coeficientes: $a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1$, …, $a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m$.

El pensamiento *analítico-estructural* va más allá de este tipo de análisis y sintetiza los elementos algebraicos de las representaciones analíticas dentro de conjuntos estructurales. Así, un sistema puede escribirse en una forma matricial, o en forma vectorial: $x_1A_1+\ldots+x_nA_n = b$.

Con respecto a los sistemas de ecuaciones hay otra diferencia entre los modos de pensamiento analítico-aritmético y analítico-estructural (lo importante desde un punto de vista analítico-aritmético es encontrar métodos para resolver sistemas de ecuaciones).

En el modo de pensamiento estructural las cuestiones podrían referirse, por ejemplo, a las condiciones de la matriz A y el vector b para la existencia y unicidad de una solución. “Las propiedades de la matriz podrían ser más importantes que la naturaleza de sus componentes numéricos” (Sierpinska, 2000).

Con esta mirada, desde este marco teórico, buscamos aportar desde nuestra perspectiva, un análisis cognitivo de la comprensión de uno de los conceptos básicos del álgebra lineal: el concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real, y prerrequisito primordial para tópicos de matemáticas, de ciencias y de ingeniería.

3. Segundo Ejemplo

Nos aproximaremos, a través de una visión didáctica, al tema de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) con el objeto de poner como tema de reflexión ciertos aspectos que consideramos están un tanto desarticulados en la enseñanza y aprendizaje de este tópico, es así, que nos centramos en entender la relación que existe entre el modelo, sus soluciones y su respectiva gráfica. Una de las razones que motivan abordar este ejemplo tiene que ver, por un lado con la experiencia obtenida en aula por la constante dificultad que se produce en relacionar los aspectos mencionados y por otro la postura didáctica que tenemos en relación a cómo abordar este tema.

Nuestra mirada se posa en la Socioepistemología, ésta es una aproximación teórica de naturaleza sistémica que permite tratar los fenómenos de producción y difusión del conocimiento desde una perspectiva múltiple. Incorpora al estudio las interacciones entre la epistemología del conocimiento y su dimensión socio cultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2003).

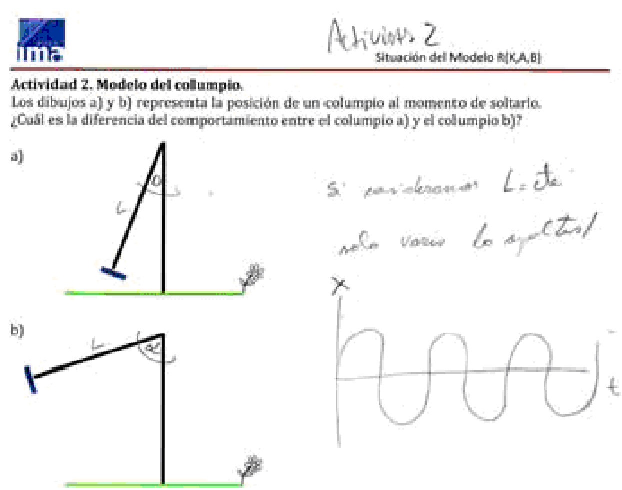
La Socioepistemológica atiende la construcción social del conocimiento matemático y aborda esta construcción con una mirada crítica al discurso matemático escolar (DME) resaltando el hecho de que éste se centra en los conceptos, dejando de esta manera la matemática en un nivel utilitario y no en un nivel funcional[1]. Es así como manifiesta que el DME en la actualidad maneja los contenidos de manera separada, carentes de interacción y significado, provocando que el proceso de adquisición del conocimiento se logre de manera particionada (Morales, 2009), proceso que no ayuda al entendimiento y confección de modelos, es por eso que nuestro objetivo es buscar mecanismos que provoquen vincular los contenidos con el fin de lograr la construcción de conocimiento matemático asociados a un modelo.

[1] Matemática funcional quiere decir un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y que le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario

En este caso si observamos, a *grosso modo*, el DME, podemos mencionar que la manera como se abordan las ecuaciones diferenciales ordinarias, en un curso de matemática, suele ser desarticulada. En general el modelo es presentado y sus soluciones son simple resultado de una algoritmia; la gráfica asociada a una solución es simplemente una representación de la función y el comportamiento de ellas (todas las soluciones) no se analiza, es por ello que se elaboró una situación basada en un planteamiento con fundamento socioepistemológico que reconoce a la modelación-graficación como práctica que genera conocimiento donde la argumentación gráfica tiene un estatus que la reconoce como una práctica que ayuda a resignificar conocimiento matemático (Cordero, 2008). Nos interesa investigar de qué manera un estudiante puede relacionar estos tres aspectos (mencionados anteriormente) involucrados en las EDO, es así que usando *variación de parámetros* y *comportamiento tendencial* formulamos una situación específica e intencional con el objeto de conectar las gráficas con el movimiento del péndulo, saltándonos de esta forma el procedimiento algorítmico al punto de no explicitar las funciones soluciones del modelo sino que sólo sus gráficas. Creemos que las gráficas de las soluciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias ayudan a comprender el modelo matemático asociado al movimiento del péndulo.

La situación planteada consistió en tres actividades, el modelo utilizado fue el del péndulo (representado por un columpio). La actividad 1 está basada en variación de parámetros. Al estudiante se le presentaron varias gráficas y se pide identificar el comportamiento de las gráficas de acuerdo a los parámetros. En esa identificación no se explicita el modelo matemático en cuestión sino que se usa una notación alternativa formal $R(K, A, B)$. La actividad 2 tiene como objetivo identificar el movimiento del péndulo con las gráficas para determinar el parámetro asociado a la posición del péndulo o a la velocidad inicial. La actividad 3 pretende identificar un parámetro del modelo con el roce vía el comportamiento tendencial de las soluciones. El roce en este caso es interpretado tanto para detener el movimiento del péndulo como para entrar en resonancia.

Es así que el rol de las gráficas es muy importante en nuestra situación, creemos que a través de gráficas que representan el modelo del péndulo, provoca la articulación entre dicho modelo con sus respectivas soluciones; dando sentido a las soluciones en conexión con la dinámica del péndulo. A continuación se muestra una respuesta formulada por un grupo de estudiantes de física (ver Figura 2).



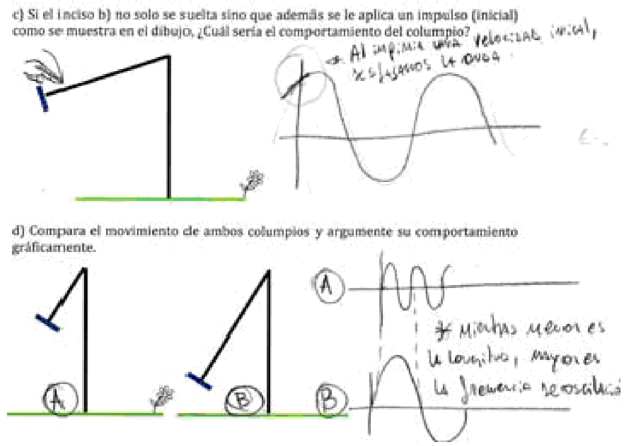


Figura 2. Respuesta de un grupo de estudiantes de física

De esta forma la situación rompe el discurso matemático escolar y valida a la gráfica como argumento para construir conocimiento, en este caso, nos referimos al entendimiento de las partes (parámetros) del modelo y la comprensión total de éste.

Si nos focalizamos en el DME, la gráfica es concebida como una simple ilustración –a nivel de visualización– que ayuda a una explicación pero en sí no es un objeto matemático (contenido, conceptos, etc.) que nos sirve para argumentar matemáticamente; en otras palabras, para los profesores de matemáticas la argumentación gráfica y las gráficas no son válidas en un proceso, por ejemplo de evaluación de contenidos. Sin embargo, en términos epistemológicos, las gráficas han sido sistemáticamente utilizadas para comprender las distintas ideas de las ciencias (ecología, crecimiento de poblaciones, economía, sistemas dinámicos, en particular en la matemática misma).

La relación que pueda existir entre la gráfica y el entendimiento de un modelo se potencia al trabajar la variación de parámetros (Cordero, Mena, Montalto, 2010). A través de la variación de parámetros y el comportamiento tendencial de las funciones (Cordero, 2001) la gráfica logra un estatus importante y una vía para argumentar y entender un modelo.

Actualmente diversas investigaciones han abordado el tema de la graficación y consideran que el gráfico forma parte integral de un modelo que se está construyendo. Para dar una breve ilustración mencionamos los siguientes antecedentes:

- Oresme ya en el siglo XIV usa la graficación para modelar la variación, generando gráficas de variaciones *uniformemente uniformes* (rectángulos), *uniformemente deformes* (triángulos y trapecios) y *deformemente deformes* (serie de polígonos diferentes que van mostrando las variaciones de la gráfica.
- Newton en el siglo XVII hace uso de su método de las fluxiones (derivadas) para encontrar las tangentes a diferentes tipos de gráficos. Oresme y Newton fueron precursores en el uso del análisis gráfico de funciones.

Por otro lado, desde el punto de vista de la Socioepistemología, existen investigaciones que abordan el tema de las gráficas, algunas investigaciones al respecto son:

Cen (2010) quien reporta el uso de las gráficas en la parábola, en bachillerato. Esta investigación sin duda que marca un punto importante para pensar lo que ocurre en el nivel superior, lo realizado por Lara (2007) es ver las gráficas usadas en Cálculo Diferencial e Integral resignificadas en la Mecánica de Fluidos, en el ámbito de Ingeniería y reporta algunos usos de las gráficas.

Por otro lado, Suárez (2008) reporta que la graficación-modelación resignifica la variación, y además que ese binomio es una categoría que está conformado por tres elementos: a) los datos epistemológicos de la modelación del movimiento, b) los elementos propios de la modelación-graficación (realizaciones múltiples, identificación de parámetros, realización de ajustes, desarrollo del razonamiento) y c) las argumentaciones conformadas por significados, procedimientos y procesos.

Campos (2003**)** nos muestra un marco de referencia que da evidencias que se puede construir conocimiento matemático a través de las gráficas. Diseña una situación para resignificar la transformación de la parábola cuya argumentación es el comportamiento tendencial de las funciones. Ponen en juego varios momentos: el geométrico, el funcional con relación a la variación y comportamientos al infinito.

Por otro lado, Cordero y Solis (2001**)** tratan el tema de funciones y sus gráficas donde sostiene que las gráficas de las funciones formulan argumentos del cálculo, la idea es poder dar una nueva mirada a las funciones proporcionando una conceptualización de función que relaciona la representación de una curva completa y la función prototipo a través de variar los parámetros de la función para buscar comportamientos, con ello provee argumentos específicos al analizar las funciones en diferentes situaciones, el comportamiento tendencial de las gráficas y de las expresiones analíticas de las funciones son el punto central de estos argumentos. En otras palabras la “curva completa” y la expresión se relacionan a través de construir significados a los coeficientes

Desde este punto de vista queremos aportar con elementos que creemos importantes para la construcción de conocimiento matemático, y en particular poder analizar y estudiar cómo es que a través de nuestro planteamiento, descrito brevemente en esta situación, pueda entregar herramientas y nuevas miradas que ayuden a la reflexión de cómo enseñar y aprender ciertos tópicos de la matemática. Un aspecto interesante de mencionar que tiene relación con lo mencionado es que los estudiantes de física en relación a los estudiantes de matemática que desarrollaron esta situación tuvieron diferentes modos de proceder al momento de abordar lo planteado y eso nos lleva a pensar en la formación disciplinaria, en el rol de las gráficas, etc..

4. A modo de Conclusión

El análisis del primer ejemplo dio información respecto al modo de pensar geométricamente los vectores, así como también la escasa relación de la manera en que se los presenta con las estructuras matemáticas que sustentan al concepto de dimensión finita de un espacio vectorial real. Observamos también que los estudiantes solo utilizan un modo de pensamiento y no recurren a los otros aún cuando la situación matemática lo requiera. Asimismo, los participantes en la investigación evidencian dificultades en el modo de pensamiento analítico-estructural pues no consideran, por ejemplo, las propiedades del subespacio vectorial y su ortogonal (pregunta 2).

En relación al segundo ejemplo, pudimos constatar la desarticulación que existe en la presentación del discurso matemático escolar entre los tres elementos mencionados en las ecuaciones diferenciales ordinarias y cómo las gráficas cobraron fuerza en los estudiantes ya que ellas pasaron de ser un simple dibujo ilustrativo a un argumento en esta situación específica. Por otro lado, el hecho de plantear esta situación a estudiantes de matemática y de física resulta muy interesante para analizar el uso de conocimiento que muestran, y cómo es que estos estudiantes de diferentes disciplinas manifiestan distintos comportamientos frente a la misma situación.

5. Referencias

Campos, C. (2003). *Argumentaciones en la transformación de las funciones cuadráticas. Una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(1), 27 – 40.

Cordero, F y Solís, M. (2001). Las gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo. Grupo Editorial iberoamericana.

Cen, C. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: Una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(2).*

Cordero, F., Mena, J., Montalto (2010). *Il ruolo Della giustificazione funzionale in una situazione di risignificazione dell'asintoto. Línsegnemento Della matematica e Delle scienze integrate*, 33 B(4), 457-488.

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4(2),* 103-128.

Cordero, F y Solís, M. (2001). Las gráficas de las Funciones como una Argumentación del Cálculo. Grupo Editorial iberoamericana.

Dorier J.-L., Robert, A., Robinet, R. y Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire : L'obstacle du Formalisme à travers diverses recherches de 1987 à 1995. En J.-L. Dorier (Ed), *L'Enseignement de l'Algèbre Linéaire en Question* (pp. 105-147), Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Dorier, J. L. Sierpinska A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In Derek Holton (Ed.). *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*. Kluwer Academic Publishers: Netherlands, 255-273.

Lara, G. (2007). *Categorías de Uso de Gráficas en libros de texto de Mecánica de Fluidos*. Tesis de Maestría no publicada, Cinvestav-IPN, México.

Morales, A. (2009). *Resignificación de la Serie de Taylor en una situación de modelación del movimiento: de la predicción del movimiento a la analiticidad de las funciones*. Tesis de doctorado no publicada. CICATA-IPN. México.

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. Linear Algebra and its Applications, 432(8), 2112-2124.

Sierpinska A. (1996). Problems related to the design of the teaching and learning process in linear algebra. Research Conference in Collegiate Mathematics Education, Central Michigan University.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (Ed.). On the Teaching of Linear Algebra. Kluwer Academic Publishers, 209-246.

Suárez, L. (2008). *Modelación – Graficación, Una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis doctoral. México: Cinvestav-IPN.