PRÁCTICAS MATEMÁTICAS ASOCIADAS AL DESARROLLO DE USOS DEL ÁREA EN EL ESTUDIO DE LA INTEGRAL DEFINIDA

Florida Pastrana Juárez, Guadalupe Cabañas-Sánchez
flor_jua_10@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero
Avance de Investigación
Prácticas del salón de clases, superior

Resumen
El artículo discute aspectos teórico-metodológicos de una investigación en desarrollo, que busca caracterizar las prácticas matemáticas que emergen en el salón de clases, durante la explicación escolar del concepto de integral definida desde una perspectiva que articula usos del área en la matemática, con la conservación del área en transformaciones analíticas. La noción de práctica es fundamental en este trabajo y se discute desde la teoría socioepistemología. Por cuanto a las prácticas matemáticas, nos sustentamos de un modelo estratégico, que distingue las prácticas de un profesor y los estudiantes a nivel macro, meso y micro. En el primero se localizan a nivel de proyecto de una lección, en el segundo, de la configuración de una situación de aprendizaje, formas de organización, comunicación e interacción en el aula, y en el último, de la gestión que el profesor hace del objeto de saber y de las interacciones de sus estudiantes.

Palabras clave: *Prácticas matemáticas, usos, área, transformaciones analíticas*

1. Introducción

En los últimos años, varias investigaciones (Cobb y Yackel, 1998; Laborde y Perrin-Glorian, 2005; Coob, 2006; Clarke, Jablonka & Mok, 2006; Cabañas & Cantoral, 2009 y Stephan & Rasmussen, 2002) se han enfocado en el estudio de las prácticas asociadas a la relación funcional que establecen un profesor y sus estudiantes en la construcción de conocimiento matemático. Este interés se deriva de razones distintas, Cabañas-Sánchez (2011b) distingue aquellas que se ocupan de:

- Evidenciar determinadas hipótesis en el proceso de la *evolución* de los objetos matemáticos;
- Problematizar las situaciones de enseñanza y la gestión que el profesor hace tanto del contenido matemático como de la interacción con los estudiantes;
- Poner bajo escrutinio las prácticas del profesor de matemáticas a fin de entender mejor el rol que desempeñan sus intervenciones en la actividad de los estudiantes;
- Comparar las prácticas de profesores de matemáticas de diferentes países, desde diferentes perspectivas y marcos teóricos.
- Comprender las complejidades que se viven en el salón de clases, al momento de poner en práctica ya sea propuestas de enseñanza o un nuevo currículum.

Independientemente del propósito de los estudios, en los últimos años hay una tendencia a comprender cómo se establece la relación funcional entre el profesor y sus estudiantes, mediante la exploración de la situación del salón de clases desde un punto de vista sistémico. Ello, en razón de que en el aula, la problemática sobre los procesos de aprendizaje es bastante compleja, como ha sido señalado por diversos autores (e.g. Laborde y Perrin-Glorian, 2005, Clarke, Jablonka & Mok, 2006, Cabañas-Sánchez, 2011b), pues está permeada de aspectos de tipo social, cultural, histórico e institucional que involucran al profesor, a los estudiantes y al propio saber matemático.

Por otra parte, es bien sabido que la problemática relacionada con los procesos de aprendizaje de nociones específicas, han sido estudiadas de manera sistemática, desde diferentes puntos de vista y marcos teóricos. Por ello, es posible encontrar explicaciones desde enfoques cognitivos principalmente, sobre cómo los estudiantes se relacionan con determinado objeto de saber. A este respecto, Laborde y Perrin-Glorian (2005), sostienen que:

> "… ahora que los procesos de aprendizaje de nociones específicas de las matemáticas son bien conocidos, las investigaciones en matemática educativa deben mirar la complejidad del salón de clases de matemáticas (Laborde y Perrin-Glorian, p. 1)…".

Postura que compartimos, ya que como afirma Cabañas-Sánchez (2011b), una buena parte de las investigaciones en nuestra disciplina, se han centrado fundamentalmente en describir y explicar dificultades o interpretar estrategias a partir de las producciones de los estudiantes o en explorar las bondades o limitaciones de un determinado diseño innovador. Importan entonces, estudios que pongan de relieve, además de las complejidades que tienen lugar en el salón de clases en el momento en que se construye conocimiento matemático, las prácticas matemáticas que emergen en ese proceso, en el que tengan cabida, aspectos de tipo social, institucional, histórico y de la cultura.

Es en este contexto que se ubica nuestra investigación. Nos interesamos por estudiar desde la situación del salón de clases de matemáticas, las prácticas matemáticas que emergen al momento en que se construye conocimiento matemático por estudiantes del segundo semestre de una licenciatura en matemáticas. Específicamente nos interesamos por reconocer y caracterizar las prácticas matemáticas que emergen en el salón de clases durante la explicación escolar del concepto de integral definida desde una perspectiva que articula usos del área en la matemática, con la conservación del área en transformaciones analíticas. La explicación del concepto de integral definida se sustenta en un desarrollo de usos del área en la matemática, como resultado de conservar una medida del área de regiones planas asociadas a funciones polinómicas de grado n ($n > 0$) continuas y positivas al realizar determinadas transformaciones analíticas.

Significa desde esta perspectiva, hacer consideraciones sobre el papel del profesor y de los estudiantes en diversos momentos de su actuación, así como la problemática asociada al saber matemático.

Los constructos teóricos provienen de la teoría socioepistemología (e.g Tuyub, 2008; Cabañas-Sánchez, 2011a, 2011 b; Cabañas y Cantoral, 2009, 2010 y de Stephan y Rasmussen, 2002).

2. Los usos del área en la matemática

Cabañas y Cantoral (2009, 2010) y Cabañas-Sánchez (2011a, 2011b) reconocen a la medición, comparación, estimación, representación y conservación del área como aquellos *usos* que la humanidad le ha dado al concepto del área. Es a partir del desarrollo de estos usos que se van a explorar las prácticas matemáticas del aula. Los autores discuten a la noción de *usos* desde la teoría socioepistemología y lo centran en los significados. Sostienen, que los objetos matemáticos por sí mismos no tienen un significado, sino más bien les son atribuidos o asociados por los grupos humanos, la socioepistemología, en palabra de los autores, le ha llamado a este proceso, *significación*. Así, una significación que los estudiantes han construido alrededor de la integral definida, es el de procedimiento, porque aprendieron una regla.

De manera particular, nos interesa que las prácticas matemáticas de los estudiantes modifiquen este tipo de significaciones que han construido, mediante los usos del área, que emergerán de conservar una medida del área de regiones planas. Al proceso en el que las significaciones se modifican, obedeciendo a cuestiones contextuales y coyunturales, los investigadores le han llamado *resignificación*.

3. Práctica y práctica matemática

Las nociones de práctica y práctica matemática son claves en esta investigación. Existe entre estas nociones una relación estrecha tanto desde el punto de vista semántico como del epistémico[1], en razón de que ambas se remiten a acciones que llevan a cabo los grupos humanos en contextos situacionales diversos (en escenarios escolares y fuera de éstos), en las que prevalece cierta intencionalidad. Más allá de las relaciones que puedan establecerse entre ambas (Cabañas-Sánchez, 2011b), el énfasis en su estudio se pone en la reconstrucción de significados funcionales y como fin último, el rediseño del discurso matemático escolar. Conviene entonces, distinguir entre una noción y otra.

a) *Práctica*

La noción de práctica en este trabajo se concibe desde punto de la teoría Socioepistemología, como un conjunto organizado de actividades o acciones objetivas e intencionales para resolver un problema dado (Tuyub, 2008). Estas prácticas son *normadas* por prácticas sociales. En este sentido, la *práctica* es inherente tanto a las acciones específicas llevadas a cabo por los actores del sistema didáctico *in actu*, como las que tienen lugar en la socialización del saber (Cabañas-Sánchez, 2011b). Esto trae consigo una relación funcional entre grupos humanos y el conocimiento mismo. En consecuencia, se atribuye a actividades o acciones objetivas, y se evidencian en comportamientos observables por los seres humanos. Excluye por tanto, los actos mentales, internos y los estados disposicionales del sujeto. Estos comportamientos, dicho sea de paso, representan roles de los individuos, y éstos a su vez, a las instituciones.

Situados en el contexto de una situación de aprendizaje, estas actividades se enlazan a las del profesor y los estudiantes, cuyo fin es la construcción de conocimiento.

Un esquema operativo de la práctica se presenta mediante la figura siguiente (Tuyub, 2008):

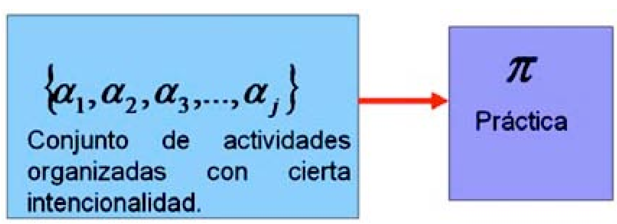

Figura 1. Esquema operativo de la práctica, donde un conjunto de actividades organizadas con cierta intencionalidad la caracterizan (Figura 2.3.1. en Tuyub, 2008, p. 23).

[1] Podemos llamar "conceptos epistémicos" a una familia de nociones que se refieren a las actividades de conocimiento y sirven para describirlas. (Villoro, 2008, p. 21). Los conceptos epistémicos están ligados al comportamiento del individuo ante el mundo (Villoro, 2008, p. 230).

b) *Práctica matemática*

La noción de práctica matemática la retomamos de Stephan y Rasmussen (2002), quienes la definen como las ideas matemáticas que surgen, se establecen y son compartidas por estudiantes dentro de un salón de clase, las cuales tienen fines de aprendizaje**.**

El énfasis se pondrá en la resignificación de los objetos matemáticos, para nuestro caso, de la integral definida —vista cómo área bajo una curva—, a través de un conjunto de prácticas matemáticas que conlleven a la conservación, comparación, medición y representación del área de regiones planas asociadas a funciones polinómicas de grado n ($n > 0$) continuas y positivas al realizar determinadas transformaciones analíticas. El centro de estas prácticas, entonces, serán los *usos del área* en la matemática ante esta clase particular de funciones.

4. Transformaciones analíticas en la conservación del área de regiones planas

Las transformaciones analíticas las entendemos en el sentido de Cabañas-Sánchez (2011b), y son las que se derivan de un conjunto de operaciones algebraicas sobre expresiones analíticas relativas a la integral definida. El resultado de tales transformaciones es un número real y positivo que representa el valor de un área, situado bajo la representación gráfica de una función continua y positiva, en un intervalo cerrado. La obtención de dicho número se fundamenta en definiciones, propiedades de los números y de objetos matemáticos como función continua, noción de intervalo, partición del intervalo, integral indefinida y definida. La interpretación geométrica de estas representaciones en el intervalo dado, revelan *cambio de forma* o de *posición* o bien ambas; la medida del área correspondiente *se conserva*.

Desde el punto de vista de la matemática, las transformaciones analíticas a las que aludimos y que comprenden la conservación del área, verifican las propiedades siguientes (Cabañas, 2011b, p. 72):

> Sea R una función de variable real de la forma $f(x) = kx^n$ con $k > 0$, $n > 0$, en un intervalo cerrado $a \leq x \leq b$, a, b $\in$ R, continua en dicho intervalo y, por tanto, diferenciables en el intervalo abierto.
>
> $A(R)$ = Valor del área bajo la curva de R.
>
> Sea T una transformación sobre R tal que $T(R)$ es nuevamente una función y $A(T(R))$ el valor del área de $T(R)$.
>
> Entonces $A(T(R))=A(R)$.

La relación $A(T(R)) = A(R)$ se verifica a partir de transformaciones sobre funciones continuas, definidas en un intervalo cerrado, en las que se localizan:

1) El método de cambio de variable.
2) El método para determinar coeficientes de una función polinómica, definida en un intervalo cerrado dado, con la condición de que el área se conserve.
3) Transformar una región de área en otra, sin que su medida se altere.
4) Determinar a partir de los parámetros de funciones polinómicas de grado n, qué familia de funciones son las que conservan el área debajo de la curva de su representación gráfica.

Mediante esta clase de transformaciones, se busca que los estudiantes establecen relaciones entre el área y la medición, y de éstos con la representación, la comparación y la conservación de áreas, lo que conlleva al desarrollo de usos del área en la matemática.

5. Método

El estudio de las prácticas matemáticas lo hemos sustentado en un modelo estratégico propuesto en Cabañas-Sánchez (2011a, 2011b), quien distingue tres niveles: *macro*, *meso* y *micro*, sin soslayar a los contextos social, institucional, histórico y cultural. Cada uno sujeto a la actividad del profesor y de los estudiantes en torno al saber matemático en diferentes períodos de su actuación. Para referimos a dichas prácticas, procuramos asociar a su explicación a los tres componentes del sistema didáctico. En términos generales, la articulación de las prácticas objeto de estudio, a estos niveles hará consideraciones a nivel macro, meso y micro (Figura 2).

Los elementos que se reconocen al momento para cada nivel son (Cabañas-Sánchez, 2011a, 2011b):

I. *Nivel macro*:

a) Contexto: Delimitación del ámbito de estudio (unidad de análisis), exploración de libros de texto de matemáticas, el escenario escolar y dimensión temporal para explicar el tema que se investiga.
b) Situación de enseñanza: Ubicación del tema en los currículo institucionales, tiempo escolar (planes anuales o semestrales).
c) Profesor: Su interés por incorporarse al proyecto, las características profesionales, su experiencia en la enseñanza y la investigación.
d) Estudiantes: Experiencia escolar de los estudiantes.

II. *Nivel meso*:

a) Contexto: Dimensión temporal de las sesiones por día y por semana, organización espacial de la actividad en el salón de clases, modalidades de comunicación, tiempos de las secuencias del diseño (etapas).
b) Situación de enseñanza: Consideraciones preliminares del objeto de saber, enfoque, estructura del diseño, contenido matemático, variables de control.
c) Profesor: Planificación de las formas de intervención del profesor en las diversas etapas de la experimentación.
d) Estudiantes: Determinación de las modalidades de las interacciones de los estudiantes con el saber así como de las formas de interacción con sus pares académicos y profesor.

III. *Nivel micro:*

a) Contexto: Trabajo en equipo, individual y en grupo, intervenciones del profesor y análisis de los procesos de aprendizaje.
b) Situación de enseñanza: Observación de los diferentes momentos de la situación de aprendizaje en el aula, estabilidad de las actividades que constituyen la situación de aprendizaje.

c) El profesor: Cómo implementa las secuencias, la trayectoria que sigue su discurso, de las preguntas o ayudas que ofrece en las diferentes etapas de su actividad, de la orientación de su discurso (hacia los procedimientos o significados o los tratamientos que ponen en juego los estudiantes), medios didácticos de que se apoya, decisiones que toma durante las lecciones, forma en que interpreta las respuestas de los estudiantes, cómo negocia significados, conflictos que encara y cómo los enfrenta, expectativas del profesor, etc.
d) El estudiante: Argumentos y tratamientos que ponen en juego, cómo negocia significados, conflictos que encara, orientación de sus argumentos (hacia significados o procedimientos), ayudas que espera de su profesor y cómo se apropia de ellas, de sus creencias y de su responsabilidad sobre su propio aprendizaje.

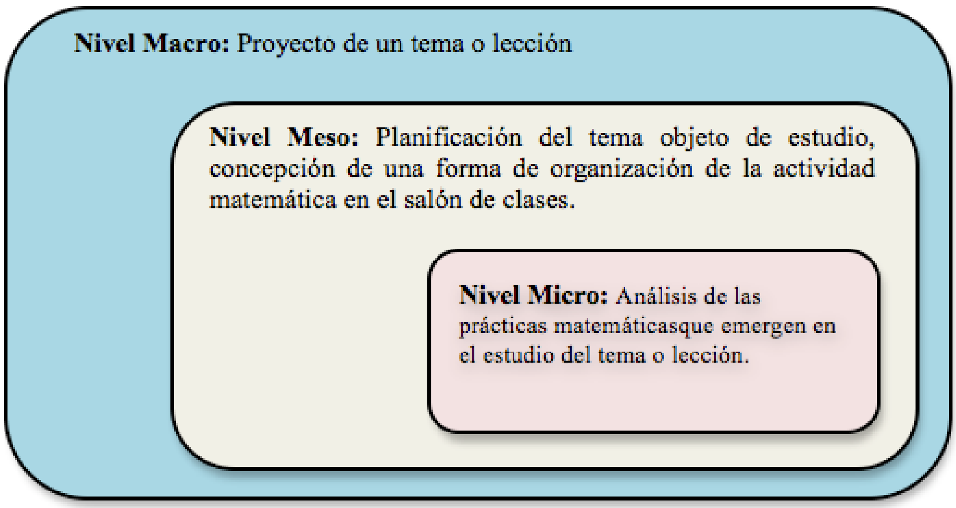

Figura 2. Niveles y momentos de análisis de las prácticas asociadas a la situación del salón de clases de matemáticas (Cabañas-Sánchez, 2011a, Cabañas-Sánchez, 2011b).

El estudio de las prácticas matemáticas en esta investigación se ubica en el nivel micro, en el que se establece la relación funcional entre profesor y estudiantes en torno a un objeto de saber.

6. Consideraciones finales

El análisis de las prácticas matemáticas a nivel *macro*, *meso* y *micro*, nos permitirá derivar explicaciones acerca de las prácticas asociadas al profesor y las correspondientes de los estudiantes, en orden *ascendente* y *descendente* en diferentes etapas y de un modo más específico, la actividad relacional que establecen profesor y estudiantes a nivel *micro*. En el entendido de que al ubicar el análisis de las prácticas en determinado nivel, sus acciones se instalan en uno previo o posterior. Es a nivel micro, en que se reconocerán y caracterizarán las prácticas matemáticas que surjan, se establezcan por los estudiantes durante la explicación escolar del concepto de integral definida, asimismo, aquellas que sean compartidas.

Por cuanto al estudio de la resignificación de la integral definida a partir de los usos del área en la matemática, contribuirá además, a ubicar explicaciones y argumentos de los estudiantes en aspectos como: *forma*, *tamaño* y *posiciones relativas*, resultado de conservar la medida de un área en regiones planas; en lugar de situar su discurso únicamente hacia conceptos, proposiciones, procedimientos, símbolos y fórmulas matemáticas, importantes sin duda; aunque en este trabajo, el centro está en la significación a partir de ello.

7. Referencias

Cabañas-Sánchez, G. (2011b). *El papel de la noción de conservación del área en la resignificación de la integral definida. Un estudio socioepistemológico* (Tesis inédita de doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.

Cabañas-Sánchez, G. (2011a). Prácticas asociadas a la situación del salón de clases de matemáticas. En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *24*, 785-792.

Cabañas, G., Cantoral, R. (2009b). Perception of the Notions of Conservation, Comparison and Measurement of the Area. A Study Through Arguments in the Classroom. *Quaderni di Ricerca in Didattica (Matematica), Supplemento, N. 4 al N. 19*, 97-104. Retrieved from http://math.unipa.it/~grim/TSG24_ICIMI_GCabanas-Cantoral_QRDM_Supl4_09.pdf

Clarke, D., Emanuelsson, J., Jablonka, E., Mok, I. (Eds.). (2006). *Making Connections: Comparing Mathematics Classrooms Around The World*. Rotterdam, Taipei: Sense Publishers.

Cobb, P. (2006). Mathematics Learning as a Social Practice. In J. Massz & W. Schloeglemann (Eds.), *New Mathematics Education Research and Practice*. Rotterdam, Taipei: Sense Publishers.

Cobb, P., Yackel, E. (1998). A Constructivist Perspective on the Culture of the Mathematics Classroom. En F. Seeger, J. Voigt, U. Waschescio (Eds.). *The Culture of the Mathematics Classroom* (158-190). USA: Cambridge University Press.

Laborde, C., Perrin-Glorian, M.J. (2005). Introduction Teaching Situations as Object of Research: Empirical Studies Within Theoretical Perspectives. In C. Laborde, M.J. Perrin-Glorian, A. Sierpinska (Eds.), *Beyond the Apparent Banality of the Mathematics Classroom* (1-12). Netherlands: Springer.

Stephan, M., Rasmussen, C. (2002). Classroom mathematical practices in differential equations. *Journal of Mathematical Behavior*, *21*,459-490.

Tuyub, I. (2008). *Estudio socioepistemológico de la práctica toxicological: un modelo de la construcción social del conocimiento* (tesis inédita de maestría). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México, D.F.

Villoro, L. (2008). *Creer, saber, conocer*. Siglo veintiuno editores: México.