

## PROPUESTAS DIDÁCTICAS EN ÁLGEBRA. UN ESTADO DEL ARTE COMO ALTERNATIVA PARA SU ENSEÑANZA



Rosario Peraza Chablé, María Gpe. Ordaz Arjona  
 peraza\_chable@hotmail.com, oarjona@uady.mx  
 Universidad Autónoma de Yucatán  
 Avance de Investigación  
 Medio Superior

### Resumen

En este trabajo se presentan los avances de investigación que tiene por objetivo analizar los estados del arte de propuestas didácticas centradas en la construcción del conocimiento matemático, caracterizar las propuestas para generar un estado del arte que favorezca la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra en el nivel medio superior. Esto por medio de un estudio documental de carácter descriptivo, el cual consistió en la revisión de los últimos diez años de revistas en el área de Matemática Educativa, Educación matemática o Didáctica de la matemática, para seleccionar artículos con propuestas centradas en la construcción del conocimiento matemático, se observó que la mayoría de las propuestas de interés se encuentran en las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, trabajan el tema Ecuaciones y las propuestas su mayoría realizadas en México.

**Palabras clave:** *Estado del arte, propuestas didácticas, Álgebra*

### 1. Introducción

La matemática es de las materias que por lo general menos entusiasmo a los estudiantes, rechazándolas en la mayoría de los casos al tacharlas de difíciles. Es por ello que un mayor acercamiento o vinculación del contenido matemático a la realidad, a través de la utilización de métodos de enseñanza aprendizaje que la vinculen a la resolución de problemas de la vida, ayuda a eliminar tal rechazo a la matemática (Ruiz, 2008).

Existen investigaciones realizadas como la de Hernández y Andonegui (2003) donde reportan que entre los temas a desarrollar en el currículum matemático, el álgebra constituye uno de los obligados tópicos a estudiar teniendo como su antecesora la aritmética. El paso de la aritmética al álgebra es causa de dificultades y frustraciones en las matemáticas escolares, ya que antes de iniciarse en el álgebra, el alumno sólo ha estudiado una matemática en la que prevalece el dominio de expresiones aritméticas. En cambio, los nuevos conceptos algebraicos le exigen el dominio de un lenguaje, abstracto; que implica el uso de símbolos y convenciones a las cuales el alumno no se ha enfrentado anteriormente. En este sentido, algunas de las dificultades que tienen los alumnos de distintos niveles educativos respecto a los conceptos algebraicos se encuentran en las diversas interpretaciones que hacen del uso de las letras, los convenios de notación, los diferentes usos del signo igual, la naturaleza de la respuesta, y otras similares

En Ruiz (2008) se menciona que el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática se ve afectado por factores como:

- Poca vinculación de su contenido con la realidad.
- Poca utilización de la matemática en el proceso de enseñanza aprendizaje de otros contenidos pertenecientes a otras disciplinas de un mismo plan de estudio.
- La vinculación del contenido matemático a realidades ajenas a la del estudiante.

Esto se refiere a los casos en que el docente utiliza ejemplos en sus clases que aplican más a sociedades que nada tienen que ver con la realidad del país al cual pertenece el estudiante y sobre cuya sociedad está llamado a actuar para transformar. En ocasiones, incluso se utilizan libros de textos y materiales pedagógicos portadores de esos ejemplos ajenos a la realidad que vive o para la que se debe preparar el estudiante. Por lo que los profesores de matemáticas tenemos siempre el reto de mostrar la utilidad de las matemáticas a nuestros alumnos, es decir, que nuestros estudiantes entiendan que las matemáticas les van a ser útiles para su vida. Cuando explicamos álgebra esta relación parece menos visible, pero no por ello es menos tangible. Debemos mostrarles el álgebra como una herramienta útil para resolver situaciones problemáticas-

Tal como lo reportan en su trabajo Peralta y Martínez (2003). Es de vital importancia que el alumno se apropie de estructuras algebraicas que le permitan ampliar su visión de las matemáticas y por tanto, que le faciliten desarrollar habilidades y destrezas cuando se enfrenten a la solución de problemas que lo involucren. Por su parte, González y Diez (2002) reportan que es necesario un cambio en la forma de presentación del tema para que los alumnos descubran mediante la generalización progresiva de casos particulares. De este modo la información será obtenida por ellos mismos, pues al ser encontradas por la propia búsqueda del alumno, éste las conocería y sabría cuál es su dominio de aplicación.

Por lo anterior es de importancia la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra que trae consigo varias problemáticas, una es cuando no se relaciona con otras ramas tanto intramatemáticas como extramatemáticas, es decir, usar las matemáticas en una variedad de contextos, así como el hecho de que su enseñanza no se relaciona con situaciones significativas para los estudiantes, por ejemplo, cuando no se muestran distintas representaciones, y para lograr distintas representaciones existen distintos recursos o materiales didácticos en las cuales se pudiesen apoyar en la enseñanza de dicha rama y así lograr un aprendizaje significativo para el estudiante.

Por todo lo anterior este trabajo de investigación tiene como objetivo generar un estado del arte a partir de las propuestas didácticas de Álgebra centradas en la construcción del conocimiento matemático, generadas en matemática educativa en los últimos diez años y caracterizar dichas propuestas.

## 2. Elementos teóricos

Algunas corrientes psicológicas coinciden en afirmar que los estudiantes de matemática, al iniciarse en álgebra, necesitan trabajar con modelos y representaciones concretas de los conceptos y principios matemáticos antes de que ellos puedan comprender significativamente las formas matemáticas, abstractas y simbólicas, que corresponden a tales representaciones o modelos. Estas aseveraciones se apoyan en resultados teóricos según los cuales los estudiantes aprenden mejor las ideas y los conceptos cuando se les permite que lo descubran a través de experiencias relacionadas con el mundo físico o el entorno socio-ambiental, o manipulando modelos representativos de dichas ideas y conceptos, pues estos modelos contribuyen a darle sentido a los símbolos y al vocabulario abstracto de la matemática; además, los procesos se hacen así más significativos. (Hernández y Andonegui, 2003). Entonces es posible mejorar los métodos para introducir el simbolismo matemático. Los alumnos son capaces de redescubrir con su propia experiencia el camino recorrido por un concepto o una técnica matemáticos hasta llegar a adquirirlo y poderlo manejar en su estado actual (Jiménez, 1990).

Cedillo (2003) reporta que las investigaciones realizadas en los últimos treinta años sobre el aprendizaje de las matemáticas ha proporcionado un conocimiento importante que plantea la necesidad de nuevas formas de enseñanza, nuevos paradigmas para la formación de profesores, un nuevo currículo y nuevas formas de evaluación. Los resultados de esas investigaciones han influido en el diseño de los planes y programas de estudio de la enseñanza básica y, por lo mismo, supone nuevas exigencias en el desempeño de los profesores. En particular, en México se incluyeron las líneas temáticas de Preálgebra así como la presentación y tratamiento de la información en los programas de estudio.

Los nuevos parámetros en las formas de enseñanza no sólo conllevan a atender recomendaciones primarias, tales como proponer a los estudiantes la resolución de diferentes tipos de problemas o promover que tengan una mayor intervención en la clase. Los resultados de investigaciones y el desarrollo de las teorías socioconstructivistas demandan a los profesores que cambien profundamente su conocimiento de lo que significa aprender y enseñar matemáticas. El constructivismo social parte, entre otras premisas, de que cada estudiante llega al salón de clases con sus propias ideas y que el profesor debe proporcionarle nuevas experiencias que le induzcan a coleccionar datos para afirmarlas o refutarlas. Esa nueva perspectiva de enseñanza requiere que el docente conozca el estado de desarrollo del pensamiento matemático de sus estudiantes, que construya materiales y propicie un ambiente de trabajo en el cuál el razonamiento de los alumnos pueda ser apoyado y motivado.

En Morales (2008) se reflexiona que el aprendizaje se produce en los que aprenden, si el objeto de conocimiento tiene algún significado para ellos y si pueden relacionarlo con otros conocimientos previamente obtenidos. Es lo que se llama sujeto situado, que es el aprendiz ubicado en su realidad, en su medio, en un contexto, ya sea este físico, ambiental o cultural.

De esta forma se enseña al aprendiz a pensar y actuar sobre contenidos significativos y contextualizados, mediante procesos activos donde el sujeto cognitivo aporta y no solo funciona como un simple receptor de conocimientos. Además, lo que aprende debe tener alguna aplicación, ya sea para educar el pensamiento, para agilizar los procesos posteriores de razonamientos, o para resolver algún problema o situación problemática o alguna función cognitiva.

Por todo lo reportado anteriormente es que se muestra que existe un motivo por el cual se debe de esclarecer o combatir las problemáticas en la enseñanza aprendizaje del Álgebra, y este motivo se ve reflejado en el trabajo de Badilla, Chaves, Herrera, Morales, Poveda, Román y Sánchez (2004) en el cual reportan que los resultados obtenidos en las pruebas nacionales de segundo de bachillerato reflejan que la matemática es la asignatura que manifiesta la tasa más baja de aprobación. Estos bajos rendimientos en la prueba nacional de Bachillerato se deben, en gran medida, a que en secundaria no existe un aprendizaje de conceptos matemáticos de una manera significativa y más bien, se enseña matemática con una clase expositiva en donde no se crean espacios para interiorizar los conceptos básicos. Así por ejemplo, los estudiantes pueden aprender los algoritmos para factorizar un polinomio, técnicas de graficación y propiedades de algunas funciones, entre otros, pero no comprenden el concepto factorización o calcular el valor de la imagen de una función, o más aun, que una gráfica de una función está formada por los pares ordenados  $(x, f(x))$ .

### 3. Método

Nuestro trabajo consistió en un estudio documental de carácter descriptivo, el cual se llevó a cabo en distintas etapas que a continuación se expresan:

- Revisión documental de revistas en área de Matemática Educativa, Educación matemática o Didáctica de la matemática, en búsqueda de artículos de investigación que contengan propuestas relacionadas con algún tema de álgebra.
- Seleccionar los artículos que contenían una propuesta didáctica centrada en la construcción del conocimiento matemático.
- Generación del estado del arte de las propuestas didácticas en Álgebra
- Caracterizar las propuestas didácticas
- Realizar las conclusiones y reflexiones de nuestro trabajo de investigación.

Nuestro trabajo de investigación se encuentra en proceso, actualmente, nos encontramos trabajando en la tercera etapa y se ha empezado a trabajar en el diseño de un marco de referencia para el análisis de las actividades.

### 4. Resultados Parciales

La primera etapa consistió en una revisión documental de los últimos diez años de revistas en el área de Matemática Educativa, Educación matemática o Didáctica de la matemática, para encontrar artículos de investigación que contienen propuesta didáctica relacionada con la materia de álgebra, de las revistas analizadas se encuentran: la revista *Premisa*, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (RELIME), *Revista Iberoamericana de Educación Matemática* (UNIÓN), *Revista digital Matemática educación e internet*, *Números Revista de didáctica de las Matemáticas*, así como se realizó la revisión de las *Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa* y el libro *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* de Cantoral, Covián, Farfán, Lezama y Romo (2007), los cuales contenían artículos de distintos lugares como: México, España, Chile, Argentina, Venezuela, Brasil, Colombia, Costa Rica, etc.

Los artículos con propuestas dirigidas a un tema en particular de álgebra que se encontraron fueron 32; la segunda etapa inicia con la distinción de las propuestas centradas en la construcción del conocimiento matemático que a continuación se ejemplificará.

Seleccionamos dos artículos tomados de las *Actas Latinoamericanas de matemática Educativa*, para ejemplificar la realización de la segunda etapa; en el primer artículo mostramos una propuesta didáctica centrada en la construcción del conocimiento matemático, mientras que en el segundo presentamos un trabajo en el que se parte de una matemática ya construida:

- A) “Una aproximación al primer momento de lo logaritmo con estudiantes de bachillerato” de los autores Ferrari y Farfán, llevado a cabo en México, dirigida al nivel medio superior.
- B) “Sistema de ecuaciones lineales: secuencia didáctica para su enseñanza” de Genecio, Hernández y Porcinito, de Argentina, dirigida al nivel medio superior.

A continuación mostraremos las actividades que se proponen en cada artículo:

A) En el primer artículo se propone lo siguiente: En la primera sesión se les entregó a los alumnos la hoja de trabajo así como las fichas logarítmicas que consisten en cuatro rectángulos de foami (ver figura 1) con los números escritos siguiendo una progresión geométrica en la parte superior y una progresión aritmética en la inferior.

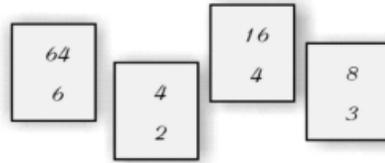


Figura 1: Fichas logarítmicas en base 2

En esta primera sesión de la actividad en que los alumnos manipularon las fichas para percibir los patrones de crecimiento, relacionarlos y así acercarse a las propiedades de logaritmos, cabe aclarar que los alumnos pudieran dar distintos resultados y esto llevaría a una discusión con el equipo de trabajo; el profesor toma el papel de guía en la actividad, solo hace intervención si es necesario para aclarar dudas acerca de la misma.

En la segunda sesión se le pide al alumno construir fichas que cumplan con un patrón dado, apoyándose en lo que realizaron en la actividad de la primera sesión, cabe mencionar que el profesor nuevamente funge como guía.

En la tercera sesión se les deja libres para resolver el siguiente problema: *Calcular la cantidad de mosquitos que habría en un cierto tiempo así como el tiempo en el que se tendría 10000 mosquitos.* Una vez que hayan discutido el problema planteado se les invita a comentar con sus compañeros lo que desarrollaron. Para terminar el profesor institucionaliza el concepto de logaritmos.

B) Las actividades propuestas en el segundo artículo son las siguientes:

1- Susana va de paseo a Córdoba y decide recorrer distintos lugares de la capital. En la Terminal de ómnibus le entregaron 2 folletos con propaganda de empresas que realizan viajes en auto. La empresa "RAPITAXI" promociona sus servicios rápidos y económicos diciendo que cobra la módica suma de \$0,75 por km. recorrido más un adicional fijo de \$ 2,5. En cambio la competencia de esta empresa, "ECOTAXI", ofrece servicios confiables pagando tan solo \$ 1 por km. recorrido y con un costo inicial de \$ 1.

a) Si Susana quiere realizar un viaje de 4 Km. ¿qué empresa le conviene utilizar y cuánto debe pagar? ¿y si el viaje es de 10 Km.? b) ¿Cuándo saldrá lo mismo utilizar cualquiera de las dos empresas y cuánto debe pagar? c) Encuentra una ecuación que exprese el precio que deberá pagar Susana si utiliza los servicios de "RAPITAXI" y "ECOTAXI" respectivamente. d) Representa en un mismo sistema de ejes coordenados cartesianos ambas ecuaciones. e) Valida las respuestas de los ítems a) y b)

Imagen 2

En esta actividad se pretende que el alumno se familiarice con la simbología de un enunciado y recuerde la representación gráfica de una ecuación lineal. La propuesta continúa con una actividad donde se ve la necesidad de plantear y resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. La secuencia continua con la realización de problemas de sistemas de ecuaciones, donde el sistema tiene una solución única, cuándo no tiene solución y el caso en que se tiene infinitas soluciones. Se debe establecer la vinculación con lo visto anteriormente sobre solución de un sistema, ecuación de la recta y representación gráfica.

Con los conocimientos logrados a partir de la actividad anterior, se le pide al alumno que resuelva el sistema:  $ax + cy = e$ ;  $bx + dy = f$ . Aquí se ve la necesidad de sistematizar las operaciones para determinar el valor de las variables; es en este momento donde el docente presenta la noción de determinante, su forma de calcularlo y la notación usada para introducir el método de sustitución, se plantea el siguiente problema:

*Beatriz y Amalia viajan, en auto, a una localidad de la Provincia de Tucumán. A fin de no cansarse, maneja un tramo cada una. Cuando llegan a destino, el cuentakilómetros marca que recorrieron 300 km. Sabiendo que Beatriz manejó el doble de km. que Amalia, a) Escribe el sistema de ecuaciones que simboliza la situación planteada. b) Sin usar los métodos vistos encuentra otra estrategia para determinar la cantidad de kilómetros que manejó Amalia y la cantidad de kilómetros que manejó Beatriz.*

### Imagen 3

La última actividad tiene por objetivo que el alumno reinvierta todo lo aprendido sobre sistemas de ecuaciones lineales. Se incluye una gran variedad de ejercicios para que el docente, según el grupo de alumnos, seleccione aquellos que considere conveniente. Algunos de estos contienen datos innecesarios a fin de que el alumno sepa hacer la distinción entre los datos necesarios y los irrelevantes. Finalmente se presenta una serie de juegos, cuya finalidad es practicar y afianzar los conceptos vistos.

Una vez dada la explicación de las actividades de cada propuesta podemos decir que la primera está centrada en la construcción del conocimiento, por el hecho de que el alumno no tiene conocimiento alguno del concepto con el que va a trabajar, además de que es él el que realiza todo el trabajo, es decir él analiza, interpreta, propone soluciones para la actividad haciendo uso de los conocimientos que tiene sin la intervención del profesor, además que no se les da la información para que sepan en que trabajar, es decir, no se les limita para que todos lleguen a un mismo resultado, en cambio en la segunda propuesta al plantearle el problema el alumno percibe que está trabajando con sistemas de ecuaciones lineales.

Para concluir la segunda etapa, con los artículos seleccionados que contienen propuestas centradas en la construcción del conocimiento, se generó una tabla, cuyo contenido se aprecia mostrando una parte de la misma:

### 3. Currículum matemático

	REVISTA	AÑO	ÁREA	TEMÁTICA	TÍTULO	AUTOR	VOL.	LUGAR	PÁGS.
1	ALME	2004	Álgebra	Factorización	Factorización de expresiones algebraicas: una innovación en su enseñanza	María Rey Genicio; Graciela Lazarte; Clarisa Hernández y Silvia Forcinito	17	Argentina	607
2	ALME	2004	Álgebra	Operaciones algebraicas	Imágenes para el álgebra	Emilia Barreda y Felipe Saavedra	17	Chile	793
3	ALME	2005	Álgebra	Ley de los exponentes	Una Alternativa para la Construcción Aritmético-Algebraica de las Convenciones Matemáticas Presentes en los Exponentes	Rocío Antonio y Gustavo Martínez	18	México	466
4	ALME	2005	Álgebra	Ecuaciones de la recta	Ecuación De La Recta: Una Ingeniería Didáctica Para Su Enseñanza	María Rey Genicio, Silvia Porcinito, Graciela Lazarte y Clarisa Hernández	19	Argentina	48-54

Como se menciona al inicio de este documento, esta es una investigación en curso por lo que aún no podemos hablar de conclusiones del trabajo, pero de los datos obtenidos hasta el momento tenemos, que de las 32 propuestas encontradas 14 están enfocados a la construcción del conocimiento matemático y del análisis de la tabla se obtuvo que la mayoría (70%) de las propuestas de interés provienen de las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa, y referente a la temática en el 30% se trabaja el tema Ecuaciones, y el 58% de las propuestas proviene de México, perteneciendo todas a diferentes autores y todas las propuestas son dirigidas al nivel medio superior.

Lo que se espera de esta investigación es que una vez seleccionados los artículos de interés, proceder a caracterizarlos y así generar un estado del arte adecuado para abordar la enseñanza y el aprendizaje del álgebra.

### 5. Referencias

- Badilla, J., Chaves, L., Herrera, D., Morales, Y., Poveda, R., Román, J. y Sánchez, A. (2004). Propuesta didáctica para la enseñanza y aprendizaje de álgebra y funciones: clases tipo taller. Investigación documental de campo no publicado. Universidad Nacional Abierta. San Fernando de Apure.
- Cantoral, R., Covián, O., Farfán, R., Lezama, J. y Romo, A. (2007). *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. México DF: Díaz de Santos.
- Cedillo, T (2003). El Álgebra como lenguaje alternativo y de cambio en las concepciones y prácticas de los profesores de Matemáticas. *Perfiles Educativos*, 25(101), 50-65.
- González, J. y Diez, B. (2002). Dificultades en la adquisición del significado en el uso de las letras en Álgebra. Propuesta para la interacción didáctica. *Revista Complutense de Educación*. 13(1), 281-302.
- Hernández, M. y Andonegui, M. (2003). Una experiencia didáctica referente a la introducción del tema Ecuaciones en educación básica. En J. Delgado Rubí (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16, 176-182. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Jiménez, J. (1990). *Elementos de Álgebra que se conocen en la escuela. Una investigación en el marco de la formación del profesorado*. Comunicación Presentada al primer Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Sevilla.
- Morales, M. (2008). La factorización de polinomios. Una experiencia docente. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 21, 299-307. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Peralta, B. y Martínez, C. (2003). El paso de la letra como objeto a la letra como número generalizando una experiencia de aula en el CED San Bernardino. En J. Delgado Rubí (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 16, 464-469. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ruiz, J. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*, 3(47), 1-8.