LAS COORDENADAS POLARES: ALGUNOS DE SUS USOS EN DISCIPLINAS DE INVESTIGACIÓN ESPECÍFICAS

Tomás Ramírez Analco, Marcela Ferrari Escolá
tom_ragati@hotmail.com, marcela_fe@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma de Guerrero. México
Avance de investigación
Superior

Resumen
El sistema de coordenadas polares como objeto a enseñar se presenta como un sistema alternativo de dos dimensiones, que si bien es cierto se exhibe en cursos de geometría analítica vuelve a tener cabida hasta en cursos de cálculo multivariable particularmente para el cálculo de integrales. En este caso sólo presentaremos algunos usos que se hace de las coordenadas polares en áreas de investigación específica puesto que nuestra intención es recolectarlos, analizarlos y dar cuenta de ellos, abriendo la posibilidad que algunos pudieran ser considerados para la didáctica de las coordenadas polares.

Palabras clave: *Socioepistemología, coordenadas polares, usos*

1. Introducción

En este trabajo se presentarán avances de una investigación (tesis de maestría) en la cual reportaremos algunos “usos” que se hace de las coordenadas polares, tanto escolarmente como en algunas áreas específicas de investigación. La problemática que consideramos abordar, es aquella que atañe a la distancia entre los significados y usos asociados a ciertos objetos y conceptos matemáticos en el contexto escolar, y, algunos otros significados que se construyen desde su uso y funcionalidad asociada fuera de dicho contexto. De esta manera consideramos que al dar cuenta de algunos usos de las coordenadas polares y analizar los argumentos que los sustentan, generaríamos un acercamiento robusto y aspectos interesantes para rediseñar el discurso matemático actual.

Algunos aspectos relevantes relacionados con la problemática escolar de las coordenadas polares se hallan en investigaciones como Dolores y Cuevas (2007) y; Cordero, Cen, y Suárez, (2010) en las cuales se han reportado dificultades que se presentan en estudiantes cuando se trabaja con gráficas, observándose que la mayoría de las investigaciones en esta dirección se han realizado considerando el sistema cartesiano (polinomios, funciones trigonométricas, racionales) a comparación con las coordenadas polares, que naturalmente pasan a un segundo plano, punto que también ha sido remarcado en Vicario (2007).Por su parte en Montiel, Vidakovic, Elstak y Wilhelmi (2009) se reporta que las coordenadas polares son consideradas como un elemento complejo de trabajar por parte de los estudiantes al momento de su introducción, y que debido al sentido flexible que tienen para generalizar, éstos tienden a usar ciertas nociones y procedimientos que son válidos en el sistema cartesiano usándolostambién para el sistema de coordenadas polares.

Nosotros nos abocaremos a analizar a las coordenadas polares como herramientas que emergen, y cómo son usadas en ciertos contextos específicos.

Hemos adoptado a la socioepistemología (Cantoral, Farfán, Lezama y Martínez, 2006) como aproximación teórica para realizar nuestra investigación, considerando que desde esta visión el interés está puesto en cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático situado, estableciendo así a las prácticas sociales como normativas de la construcción del saber (Cantoral, 2010), es decir, esta teoría da énfasis en aquello que permite la construcción de conocimiento en contextos y situaciones específicas.

En los aspectos metodológicos, cabe mencionar que hemos comenzado una revisión bibliográfica misma que vamos a proseguir en el transcurso de la investigación. También nos apoyaremos en metodologías utilizadas en la Teoría de las Representaciones Sociales, tales como grupos focales o entrevistas a profundidad, para indagar sobre los usos que ciertas comunidades hacen de las coordenadas polares en sus actividades cotidianas. Reportaremos entonces un primer análisis del diálogo entablado con investigadores biomatemáticos de la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAGro), ingenieros del Tecnológico de Acapulco, así como profesores y estudiantes de ambas entidades educativas. Todo ello con la finalidad de encontrar ciertos elementos que pudieran dar pautas para el rediseño del discurso matemático escolar alrededor de las coordenadas polares. Buscamos incluso elementos para hacer un análisis sobre las herramientas, las prácticas, los conocimientos y rigor que les podría demandar a los estudiantes el uso de las coordenadas polares ya imaginándolos haciendo algún tipo de investigación en alguna comunidad específica.

2. La exploración

Hasta este momento sólo hemos analizado algunas investigaciones sobre las coordenadas polares para las que hemos considerado las categorías de: coordenadas polares en el ámbito escolar (como objeto de investigación didáctica), uso de la visualización enel sistema de coordenadas polares, y coordenadas polares en otros campos específicos.

- **En el ámbito escolar**

En esta dirección situamos a dos investigaciones que fueron realizadas con fines específicamente didácticos alrededor de las coordenadas polares. Nos referimos a Vicario (2007) y a Montiel, Vidakovic, Elstak y Wilhelmi (2009).

Vicario (2007), fuente bibliográfica que consideramos básica para nuestra investigación, fue realizada bajo la teoría de la transposición didáctica, y reporta una primera aproximación a un análisis epistemológico y didáctico de las coordenadas polares donde respectivamente expone:

- tres etapas a saber: surgimiento, desarrollo y formalización de las coordenadas polares, concluyendo que tienen sus orígenes desde la época de los griegos cuando se les encuentra relacionadas con algunos problemas clásicos de dicha época, siendo la espiral de Arquímedes un elemento que pondría los indicios para este sistema de coordenadas, cerrando su discusión proponiendo a Euler como el matemático que sentaría las bases para la formalización del sistema de coordenadas polares tal como lo conocemos hoy día;
- y, se hace un análisis de programas de estudios de algunas escuelas de nivel superior en el estado de Guerrero, y de libros de texto que en dichos programas se recomiendan, de esta parte se concluye que:

> "las coordenadas polares se presentan para representan puntos en un plano diferente al que se representa en el sistema coordenado rectangular, el cual es determinado por una distancia y un ángulo…" (Vicario, 2007 p.116)

Montiel, Vidakovic, Elstak y Wilhelmi (2009), es una investigación realizada bajo el enfoque onto-semiótico, en la que se menciona que una de las posibles complicaciones que surgen o que pueden surgir al trabajar con el sistema polar, es provocada porque los estudiantes tienden a trasladar y usar en el sistema polar algunas nociones y procedimientos que son válidos en el sistema cartesiano. Como un caso específico que se analiza es sobre la nociónintuitiva de función y el uso de la prueba de la recta vertical que se utiliza para ver si una gráfica en el plano cartesiano representa o no a una función, ya que ésta pruebano funcionapara el caso del sistema de coordenadas polares.

Por ejemplo considerando que $f(\theta) = a$(donde $r = f(\theta)$) es una manera de representar a la función constante en el sistema polar(en el sentido de que para todo elemento θ del dominio se asocia con el mismo elemento a saber, "a",), teniendo como representación gráfica una circunferencia de radio "a" y centro en el origen, por lo que aunque limitásemos $0 \leq \theta \leq 2\pi$, la idea gráfica de función que se tiene en el sistema cartesiano parece no ser obvia en este caso , sin embargo, se puede ver que sí es una función, cuando nos apoyamos en la noción de que a cada elemento del dominio le corresponde uno y solo uno del contradominio. Cabe mencionar que como sabemos en el sistema cartesiano una función constante f(x)=c puede ser representada por una recta paralela al eje de las abscisas por lo que al usar la prueba de la recta vertical se deduce que sí representa a una función. Se comenta que en una investigación realizada anteriormente (Montiel, Vidakovic&Kabael, 2008) se había propuesto una actividad a alumnos de nivel pre-univesitario donde se pretendió analizar como reaccionaban los estudiantes ante la noción y las representaciones gráficas de función en el sistema polar. Sin embargo en Montiel *et al*. (2009), se realiza ésta misma actividad pero ahora con estudiantes de nivel superior que ya habían llevado cursos de cálculo multivariable. Y, en este caso dichos estudiantes no recayeron en la situación de considerar válida la prueba de la recta vertical para el caso de curvas en el sistema polar, y sí reconocieron a ésas como funciones (claro utilizando lenguajes distintos: para cada θ hay solo un r, utilizando el test de la línea radial, etc.).

Entre las cuestiones que presentan a los estudiantes está la siguiente: dadas las gráficas (Figura 1) en el sistema de coordenadas polares, ¿Cuándo r es considerada una función de θ (r=$\rho(\theta)$)? Encierra tu respuesta y explica la razón.

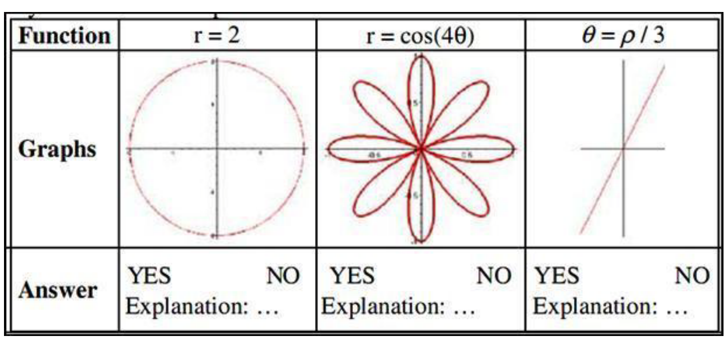

Figura 1

> …of the questions presented to the students… in the question firs… the objective was to determine if the students could distinguish when a relation between r and θ was a function or not, taking θ as the independent variablione and r as the dependent variable… (Montiel *et al*., 2009 p.145)

- **Uso de la Visualización en el sistema de coordenadas polares**

Tres son las investigaciones que reportamos en esta sección, a saber Vicario (2007), Pérez (2006) y Quijano (2010). En particular éstas tienen en común el tratar sobre la espiral señalándole respectivamente como elemento fundamental en los indicios de las coordenadas polares, (enfatizando) su no aparición en las clases de matemáticas a pesar de sus numerosas apariciones en la naturaleza, y, (siendo considerada) como “obra de arte rupestre” haciendo un estudio de ciertas obras de este estilo en una comunidad del país Colombiano.

En Vicario (2007) se señala a la espiral como una herramienta que permite dar solución a dos de los problemas clásicos de la época: la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, y a la vez se le señala como elemento que provee los primeros indicios en el que se hace uso de las coordenadas polares. Por lo que podríamos decir se hizo uso de la visualizacióndе alguna manera en el tipo de análisis que se realizó involucrando a la espiral. Consideramos a la visualización, como la habilidad para representar, transformar, generar, comunicar, documentar y reflejar información visual (Cantoral y Montiel, 2001)

También se menciona el uso de las coordenadas polares en áreas como la navegación, la artillería y en la ubicación de personas.

> … los estudios de rectificación de curvas, comparación de curvas, radio de curvatura y trazado de tangentes, hicieron que se profundizara el estudio de las disciplinas que estaban emergiendo en la matemática, apareciendo así el sistema de coordenadas polares… (Vicario, 2007, p.67)

En Pérez (2006) enfatiza que la preferencia que se le ha dado al sistema de coordenadas cartesiano deja ciertas limitaciones para imaginar por parte de los estudiantes que además de las figuras presentadas en geometría plana (triángulos, rectángulos, círculos, etc.) y de ciertas curvas trabajadas en el plano cartesiano, hay otras curvas que tienen lugar en formas de presentarse la naturaleza (espirales, concoides, cicloides entre otras) y que pueden ser vistas y analizadas desde la matemática.

> ... A pesar de estar el universo físico que nos rodea lleno de curvas, en nuestras aulas sucede algo muy extraño: El mundo casi siempre es un plano, cartesiano; El espacio tridimensional sólo llegará hasta bachillerato… ;Las líneas siempre son rectas, las figuras polígonos (regulares a ser posible) y los cuerpos prismas, cilindros, pirámides o conos… los más improbables… salid de la ciudad a una zona no habitada… buscad allí una recta, una superficie plana, un polígono regular o uno de los sólidos citados… realmente os va a resultar difícil encontrarlos… (Pérez, 2006, p.3)

En este trabajo (Pérez,2006) se hace una “exposición” de varias curvas que tienen relación alguna con las coordenadas polares tales como la espiral logarítmica, la curva de las conchas (concoide), la concoide de rosetón (pétalo geométrico) y la cardiode.

Sobre las espirales enfatiza sus diversas apariciones en la naturaleza y su no aparición en las clases de matemáticas de secundaria y de universidad.

> … el origen de la espiral logarítmica tiene que ver con la navegación… donde los navegantes sabían que sobre la superficie terrestre la distancia más corta entre dos puntos es un arco de círculo máximo. … Pues bien la proyección de la esfera sobre un plano convierte a la loxodrómica en una... **espiral equiangular**… (Pérez, 2006, p.15)

Mientras que en el contexto matemático,

> … Descartes fue el primero en descubrirla como curva mecánica…, él estaba buscando una curva creciente con una propiedad similar a la de la circunferencia,que en cada punto la tangente forme con el radio vector siempre el mismo ángulo. (Pérez, 2006, pp. 15-16)

Sin embargo es a Jacob Bernouilli a quien se le considera como el padre de esta espiral pues descubrió varias propiedades de esta curva entre ellas el hecho de que la espiral logarítmica es la única curva que verifica que su evoluta, su involuta, su caustica y su podaria son, a su vez, una espiral logarítmica. Y además descubrió la auto-semejanza, que relaciona directamente esta espiral con los objetos fractales. Sin olvidar esta espiral como la que más se prodiga en la naturaleza debido a sus numerosas apariciones en el reino animal y en el mundo vegetal, respectivamente en las conchas de los caracoles, en los moluscos, en cuerno de un rumiante, entre otros; en la distribución de las pipas en cualquier girasol, en las escamas de cualquier piña, en una simple margarita, en cualquier piña de los pinos, entre otros; también se les encuentra en las galaxias, las borrascas y huracanes nos brindan muestras espectaculares de espirales logarítmicas (Pérez, 2006).

Por otra parte en Quijano (2010) se presenta un estudio matemático realizado referente a la figura de la espiral en obras de arte rupestre precolombinas en el que se pretende refutar ciertas afirmaciones sobre un cierto desconocimiento de las propiedades matemáticas, que no supieron ni grabarlos, que son indicio de una escritura cualquiera… Para ello realiza un estudio estadístico de una muestra de espirales halladas en obras rupestre del Mpio. De Pasto ubicado en los Andes de Nariño.

> … El diseño de la espiral corresponde a una curva plana y abierta que da vueltas indefinidamente alrededor de un punto denominado origen, alejándose de él o aproximándose (Trejos, 2008); y dependiendo del giro que hacen, éstas se clasifican en dextrógiras, cuando viran hacia la derecha, o levógiras, cuando lo hacen hacia la izquierda… De las 44 espirales examinadas en el mpio de Pasto, 23 de ellas son dextrógira (52.3%), mientras que 21 son levógira (47.7%). (Quijones, 2010 p.56).

Figura 2

- **Usos en otras disciplinas**

En este sentido hemos analizado la investigación Valvuena, Segura y Bolaños (2006), que podríamos decir tiene fines didácticos (en el sentido de que se propone una actividad que podría ser considerada para estudiantes de electromagnetismo) y que tiene también como otro de los propósitos el resaltar el trabajo de un investigador (Miranda, s/a) quien propone una forma de calcular el campo magnético usando la ley de Biot- Savart en el centro de alambres cuya forma se puede expresar en coordenadas polares.

La ley de Biot Savart puede ser resumida de la forma que sigue:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\vec{s} * \hat{r}}{r^2} \qquad (1)$$

… la ecuación (1) nos permite calcular el campo magnético ***B*** *en un punto situado O a la distancia r de un pequeño elemento de corriente del conductor, en principio, de forma arbitraria.*
Denotando por $\emptyset$ *el ángulo entre los vectores ds y* $\hat{r}$*, se observa que* $\theta = \varphi - \pi/2$ *, donde* θ *hace referencia al ángulo polar, un cambio infinitesimal en* θ *se puede escribir como:*

$$d\theta = \frac{|d\vec{s} * \hat{r}|}{r} \qquad (2)$$

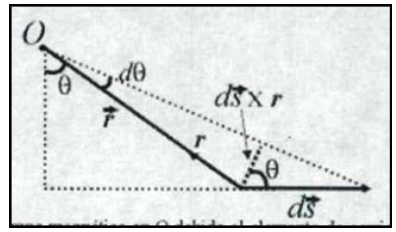

Figura 3

Reemplazando (2) en (1) e integrando se obtiene, para la magnitud del campo magnético;

$$d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint\frac{d\theta}{r} \qquad (3)$$

… para éste trabajo se propone el cálculo de B para alambres con formas curiosas, cuyas ecuaciones polares son fácilmente encontradas en libros de cálculo… (Valvuena, Segura y Bolaños, 2006, p.751)

En esta misma dirección hemos encontrado otras investigaciones que muestran el uso de las coordenadas polares en distintas disciplinas. Y en este momento nos permitimos citar a Dare, Kouri, Zimmerman& Thomas (2010), siendo ésta una investigación que tiene cabida en la disciplina de Biomédica y que es publicada bajo el título: *DifferentiatingPlasmodiumfalciparumallelesbytransformingCartesian X, Y data to polar coordinates*, donde se menciona los beneficios de la tecnología para el diagnóstico de enfermedades infecciosas, sobre todo cuando para este tipo de análisis se cuenta con un gran número de datos en las variables. Como caso particular se enfatiza que el uso de las coordenadas polares en lugar de las coordenadas cartesianas para el análisis de PlasmodiumfalciparumdihidrofolatoreductaseSNPs asociados con la resistencia a un fármaco…, permite obtener resultados de diagnóstico de mejor confiabilidad.

> We have observed that the diallelic SNP data resulting from analysis of P. falciparum mutations is more accurately diagnosed when a simple polar transform of the (X, Y) data into (r,θ) is used. The development of high through-put methods for genotyping P. falciparum SNPs and the refinement of analytical approaches for evaluating these molecular diagnostic results significantly advance the evaluation of parasite population diversity and antimalarial drug resistance. (Kouri et al., 2010 p.1)

3. Consideraciones finales

En el ámbito escolar, particularmente para el discurso matemático escolar, las coordenadas polares se dotan de más sentido y significado cuando la visualización en este sistema hace su aparición (con todas las dificultades que ello conlleve debido a: el cambio de coordenadas, la manera de graficar y analizar gráficas, etc.), y por su puesto esa dotación se fortalece cuando se deja ver el uso de éstas en otras disciplinas, particularmente como una herramienta ante cierta situación y en cierto contexto.

4. Referencias

Apostol, T. (1973). *Calculus*. Tomo I. México: Reverte S.A.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales. (Un estudio epistemológico)*. Tesis Doctoral, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (2010). Tendencias de la investigación en matemática educativa: del estudio centrado en el objeto a las prácticas**.** En P. Lestón (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa,* 23, 1043-1052. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Farfán, R-M., Lezama, J., Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Número Especial, 83-102.

Cantoral, R. & Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y pensamiento Matemático*. México, Prentice Hall.

Cordero, F., Cen, C., & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13(2), 187-214.

Dare, JT., Kouri, DP,. Zimmerman PA., & Thomas PJ. (2010). Differentiating Plasmodium falciparum alleles by transforming Cartesian X,Y data to polar coordinates. *BMC Genetics*, 11(57).

Dolores, C y Cuevas I. (2007). Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*, 10 (1), 69-96.

Montiel, M., Vidakovic, D., Elstak, I., Wilhelmi, M. (2009). Using the ontosemiotic approach to identify andanalyze mathematical meaning when transiting between different coordinate systems in a multivariate context. *Educational Studies in Mathematics*.72(), 139-160.

Pérez, A. (2006). Las ecuaciones de las flores. *Sociedad, ciencia, tecnología y matemáticas*. (Sctm06). Disponible en http://webpages.ull.es/users/sctmates/modulo1lp/2/aperez.pdf, recuperado el 05 de Enero de 2011.

Quijano, A J. (2010). Estudio matemático del diseño precolombino de la espiral en el arte rupestre del noroccidente del municipio de pasto (Colombia). *Revista Académica Colombiana de las Ciencias*. 34(130), 53-69.

Valvuena, C., Segura, M., y Bolaños, W. (2006). Cálculo del campo magnético de alambres planos en coordenadas polares. *Revista Colombiana de Física,* 38(2), 750-753

Vicario, M. (2004). *Las coordenadas polares: un acercamiento didáctico y epistemológico.* Tesis de Maestría, UAGro, Guerrero, México.

Wooton, W., Beckenbach, E F., Fleming, J F. (1985). *Geometría Analítica Moderna.* México: Publicaciones Culturales, S. A de C. V.