

MODELACIÓN DE PROBLEMAS DE MEZCLAS EN EL CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES



Ruth Rodríguez Gallegos, Lorenza Illanes Díaz Rivera
ruthrdz@itesm.mx, lillanes@itesm.mx
Instituto tecnológico y de estudios superiores, Campus Monterrey
Avance de Investigación
Superior

Resumen

Este trabajo está centrado sobre la impartición del tema de Mezclas en un curso de Ecuaciones Diferenciales (ED), durante una sesión de hora y media en el período Académico Enero-Mayo 2011 con alumnos de ingeniería. El objetivo del estudio es conocer las dificultades de los alumnos al trabajar las etapas del proceso para modelar y establecer la representación del fenómeno. Se estudia como los alumnos enriquecen su aprendizaje al modelar situaciones nuevas para ellos, con el objetivo de encontrar elementos para el diseño y la elaboración de reactivos, así como conocer la mejor forma de enseñar a los alumnos a modelar contextos específicos. Esta investigación revela la importancia de que los alumnos conozcan el problema a modelar, que se les permita en grupos de trabajo mostrar intuitivamente la forma en que evoluciona la magnitud a modelar y plasmar el planteamiento propiamente del modelo matemático reconociendo la herramienta de una ED.

Palabras clave: *Modelación matemática, ecuaciones diferenciales, tecnología*

1. Introducción

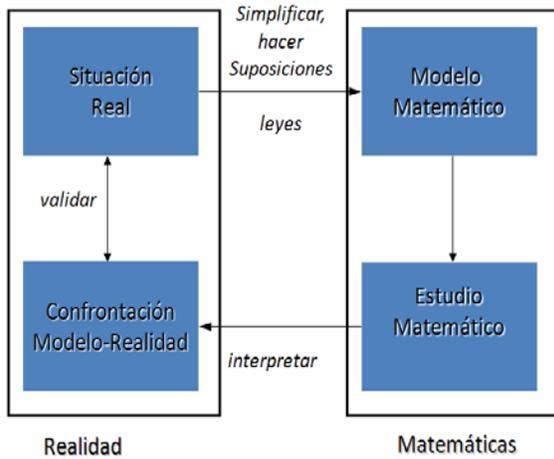
En el presente artículo se pretende desarrollar la primera parte de una investigación en curso la cual tiene como objetivo estudiar la manera en que la modelación de un fenómeno de mezclas es llevada a cabo por estudiantes de ingeniería de tercer y/o cuarto semestre de una institución de educación privada del norte de México. Nos interesa estudiar desde un punto de vista específico la manera en que la modelación puede ser visualizada por parte de los alumnos desde una perspectiva muy particular de modelación matemática en el ámbito educativo.

En un primer momento, mostraremos la perspectiva teórica sobre modelación matemática; en un segundo momento describiremos la metodología del trabajo donde se discute entre otros proyecto de rediseño departamental de un curso de ED que da lugar al diseño de esta actividad; y la descripción del entorno físico donde se llevará a cabo la implementación de la actividad y finalmente concluiremos este escrito describiendo a detalle el instrumento utilizado en la implementación en aula resaltando fuertemente sus características a la luz del punto de vista teórico sobre modelación matemática y sobre la importancia del trabajo colaborativa y del uso de tecnología como parte esencial en la actividad.

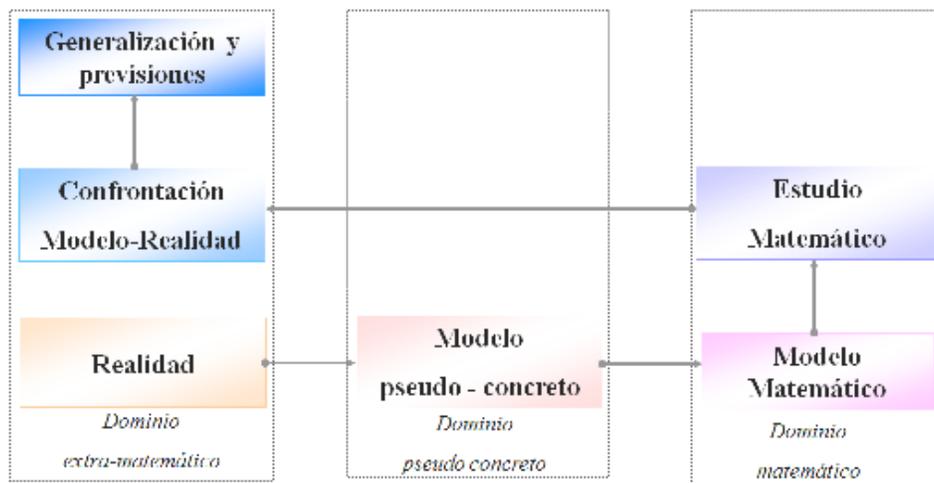
2. Sobre la modelación matemática en Matemática Educativa

En primer lugar, los antecedentes básicos que respaldan nuestra visión sobre modelación matemática para el ámbito escolar están fundamentados en los trabajos de Blum y Niss (1991) y Niss, Blum y Galbraith (2007) quienes postulan en un primer momento modelación como la relación entre matemáticas y la “realidad”.

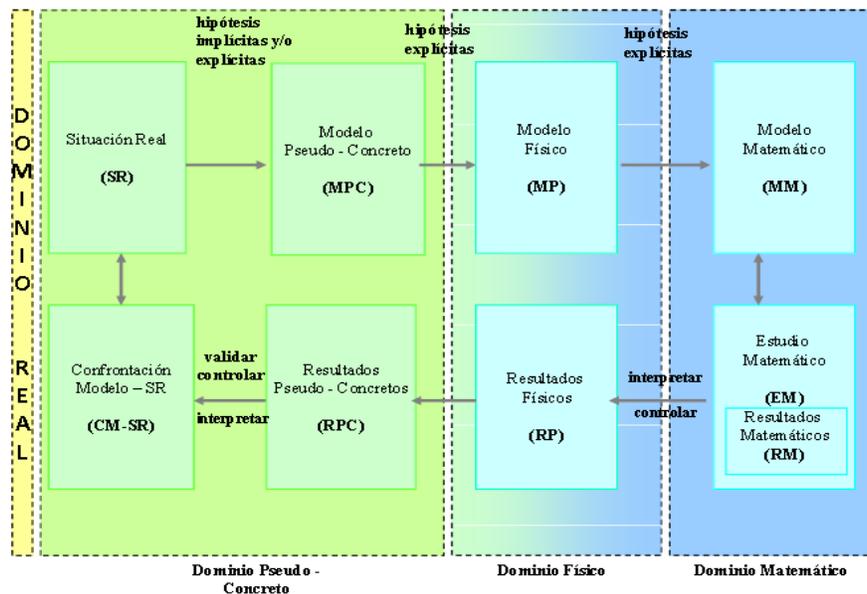
8. Modelación matemática y aplicaciones. Matemáticas en contexto



Por otro lado, autores como Henry (2001) dividen aún más esta primera acepción sobre modelación mostrando más etapas y sobre todo enfatizando la importancia de las transiciones entre las etapas. Además a diferencia de los estudio anglosajones que denominaban “*real model*” (modelo real en español), Henry (2001) acuña el término “*modelo pseudo-concreto*” para referirse básicamente a esa etapa intermedia entre la realidad o situación real y el modelo matemático.



Finalmente y posterior a un estudio más detallado de otros autores que proponen el visualizar la modelación matemática escolar desde un punto de vista, se decide continuar en este estudio adoptando la descripción de este proceso en término de etapas las cuales se muestran en la siguiente figura (ver más detalle en Rodríguez, 2007 y 2010c):



En estudios más recientes, se ha formulado un enfoque teórico preciso (Rodríguez, 2010a) para la implementación de la modelación matemática en el aula, en el cual se incorpora entre otros el papel de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas (Beichner, 2007; Ferreira, 2009, Zavala, Alarcón, Domínguez y Rodríguez, 2010), la importancia del aprendizaje colaborativo (Beichner, 2007; Collazos y Mendoza, 2009) y el desarrollo de competencias de modelación (Maab, 2006) de acuerdo a niveles específicos (Henning y Keune, 2007).

3. Sobre el rol de la tecnología en la Educación

Entre los software disponibles para la enseñanza de las matemáticas, Ferreira (2009) menciona que existen productos tecnológicos educativos (procesadores de textos, constructores de narraciones, periódicos, bases de datos educativos; software de ejercitación y practica, lenguajes de programación de estructuras geométricas y aritméticas, juegos lógicos, etc.). En cuanto a sus características, este autor establece que son herramientas sin contenido disciplinar explícito. Los alumnos y docentes deben incorporar contenidos, que sirven para producir textos, gráficos, almacenar y organizar información, el programa ofrece un espacio para el ingreso de los datos y unos conjuntos de comandos para realizar determinadas acciones sobre los datos ingresados. Su uso exige a los docentes: conocer la estructura del software y los comandos que simbolizan las diferentes operaciones que se pueden realizar, planificar la actividad otorgándole sentido al recurso, dependiendo de la actividad, hay que construir archivos de datos necesarios para implementarlos con la computadora. Además, su uso exige a los alumnos: comprender el modelo de trabajo que ofrecen y manejar los comandos necesarios para desarrollar la actividad. De acuerdo con esta realidad hemos encontrado que el software matemático especializado Maple constituye el adecuado para trabajar el estudio de la problemática de Mezclas con Ecuaciones Diferenciales.

El Maple (Symbolic Computation Group, 1988), es un lenguaje de programación interpretado que data de 1988. Las expresiones simbólicas son almacenadas en memoria como grafos dirigidos sin ciclos. Es un software muy completo que resuelve problemas de Ingeniería, educación y aplicación de las Matemáticas además que se tiene disponibilidad a tutoriales libres previamente diseñados por otros profesores de la materia. Para aplicar este software en la actividad a diseñar, debemos adecuar el uso del software al fenómeno en estudio.

4. Sobre la metodología a emplear/empleada

La parte metodológica que hasta ahora se ha desarrollado se presenta en 4 grandes secciones:

- a) Espacio físico donde se desarrolla la experimentación/implementación de la actividad
- b) La muestra de estudiantes y tipo de estudio visualizado
- c) Los antecedentes del diseño: el proyecto departamental de rediseño de Ecuaciones Diferenciales
- d) El diseño e implementación de la actividad: justificación de las características de la actividad

A continuación se explican a detalle cada una de estos apartados.

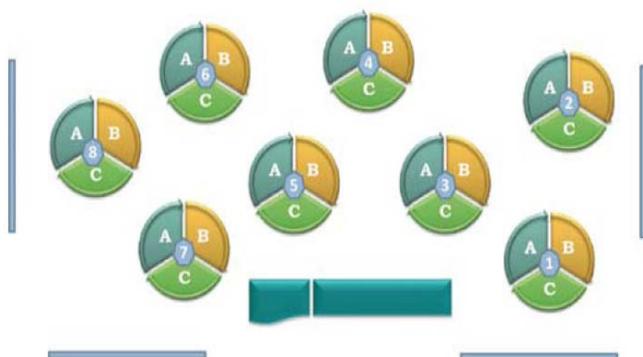
a) *Sobre el espacio físico...*

El presente estudio se lleva a cabo en un instituto de educación privada del norte de México. El objetivo del diseño e implementación de esta actividad es estudiar el tipo de dificultades de los alumnos al momento de modelar la mezcla de soluciones salinas en tanques que contengan agua

8. Modelación matemática y aplicaciones. Matemáticas en contexto

pura y/o con sal. Nos interesa observar además el papel que juega el uso de Maple y/o simulador libre para la comprensión del fenómeno a modelar y finalmente el establecimiento del modelo (gráfica y/o ecuación diferencial que modela el fenómeno).

Es importante aclarar que la actividad además se implementará en un salón especial que se está probando en la institución desde agosto 2010 el cual está físicamente formado por 8 mesas donde se trabaja por equipos de 3 personas (denominados equipo A, B ó C; cada mesa tiene 9 alumnos y por lo tanto contiene 3 equipos de 3 alumnos cada uno).



La gran importancia de este ambiente que denominados *Sala ACE* (Aprendizaje Centrado en el Estudiante, ACE, ver Zavala et al., 2010) es que es altamente colaborativo con un aprendizaje activo por parte de los estudiantes y sobre todo que está equipado con tecnología variada entre ella 1 laptop HP por equipo equipada con Internet y el software matemático Maple.

Como veremos en el siguiente apartado, este grupo en particular constituirá una variable importante a considerar en el análisis futuro de los resultados obtenidos por los alumnos en la actividad que se implementa sobre modelación en el contexto de mezclas.

b) *La muestra...*

La metodología de investigación a realizar es mixta es decir se hará un análisis cualitativo y un análisis cuantitativo. La muestra está representada en el cuadro siguiente:

| <i>Semestre Enero-Mayo 2011</i> | | | | <i>Verano 2011</i> |
|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--|---|
| Grupo 1 35 alumnos | Grupo 2 35 alumnos | Grupo 3 35 alumnos | Grupo 4 72 alumnos *Sala ACE* | Grupo 5 35 alumnos (réplica del estudio) |

En el análisis cualitativo se pretende analizar la calidad de las respuestas de acuerdo a la modelación empleada para poder ajustar el modelo por un lado y por el otro ver las áreas específicas de aprendizaje que hay que fortalecer. En el análisis cuantitativo se pretende hacer un análisis estadístico por respuesta y por grupo así mismo se establecerán los intervalos de confianza para los parámetros estimados: media y varianza para comparar estadísticamente los diferentes grupos mediante la prueba t-Student para la media y la prueba de Fisher para la varianza y tener una medida cuantitativa que confirme nuestro análisis cualitativo y nos permita

apreciar entre otras cuestiones las bondades del salón ACE (Aprendizaje Centrado en el Estudiante) para este tipo de aprendizaje, las dificultades de los alumnos frente a la actividad de modelar y la apropiación de uso de tecnología (simulador y/o Maple) para fortalecer aspectos claves de la modelación en los estudiantes.

c) *Sobre los antecedentes del diseño de la actividad...*

En este apartado se presentan brevemente algunos antecedentes importantes de un proyecto departamental (Rodríguez, 2010b) en el cual se tiene como objetivo fundamental el re-diseño del curso de ED. Este proyecto inicia en agosto 2008 en la institución donde se lleva a cabo la implementación y es un trabajo realizado de manera colegiada por 15 profesores de la Academia de Ecuaciones Diferenciales.

Entre los hallazgos encontrados en una primera fase del proyecto se encuentra que existen varias propuestas educativas donde se muestra la imperiosa necesidad de reformular la forma de enseñar ecuaciones diferenciales enfatizando por un lado la modelación (Blanchard, Devaney y Hall, 2006; Lomen y Lovelock, 2000, Zill, 2009).

Por otro lado, es importante el también considerar la tecnología disponible varia como el software matemático específico (Maple, Matematica, MatLab), uso de calculadoras que incluyan Cálculo Simbólico (CAS, ejemplo como la familia de calculadoras TI CX de Texas Instruments) y aunado a lo anterior el uso de sensores, además se recomienda el uso de recursos educativos abiertos disponibles libremente en Internet como Wolfram Alpha y/o simuladores varios (ver simulador de Cengage) de tal manera que toda esta tecnología disponible permita el diseño y que se propicie un aprendizaje significativo de las ED en tanto objeto matemático como herramienta para modelar fenómenos varios.

d) *Sobre el diseño e implementación en aula...*

Para la implementación de la actividad de modelación del problema de mezclas con ecuaciones diferenciales se siguió los siguientes pasos:

Paso 0. Organización de equipos de trabajo. Como esta es una actividad dentro del semestre que dura la impartición del curso y se utiliza aprendizaje colaborativo (Collazos y Mendoza, 2009), se pidió a los alumnos que se sentaran con sus equipos de trabajo formados por tres alumnos de acuerdo a lo físicamente solicitado en la metodología de la Sala ACE, en el resto de los grupos denominados no ACE o “tradicionales” se siguió la misma estructura de equipos.

Paso 1. Una vez que los alumnos están organizados en equipos se les muestra un breve video de 2 minutos (disponible libremente en web a través de Youtube) que trata sobre una posible situación real de un problema de mezclas a manera de sensibilización, en el video se muestra visualmente en realidad una hipótesis importante a formular en el problema para pasar al establecimiento de un modelo matemático (ED) del fenómeno (“*que la mezcla está uniformemente distribuida de tal modo que la cantidad de sal en el tanque es la misma en cualquier punto dentro del mismo*”).

Paso 2. Empieza la actividad que está constituida por 3 partes:

Parte I. Identificación de posibles variables de estudio. Se le plantea al alumno una situación problema en donde tiene que: a) identificar la magnitud de interés; b) expresar el cambio de magnitud en términos simbólicos, c) designarlas con una variable de su elección y d) graficar su

variación así como valores máximos y mínimos. La idea de esta primera parte es enfatizar el paso en el diagrama de modelación (Rodríguez 2007 y 2010c) de la situación “real” ó pseudo-concreta (texto del ejercicio) a una representación gráfica/cualitativa de la evolución de la magnitud de interés (a saber: la cantidad de sal en el tanque de agua en el tiempo t).

Parte II. Identificación del Modelo Matemático de Mezclas en su representación analítica (ED). A través de la redacción de la actividad se guía a los alumnos en la explicación teórica del modelo de tanque (diagrama->ED). Se discute principalmente sobre la forma en que cambia la concentración a través del tiempo de acuerdo a la ley de conservación de la materia. En este paso, en base al diagrama de modelación, se pasa del Modelo Pseudo Concreto (enunciado) hacia el modelo físico (diagrama de tanque) hacia finalmente el modelo matemático como una ED de primer orden de la forma

$$\frac{dx}{dt} = \left((C_e * f_e) - \left(\left[\frac{x(t)}{V(t)} \right] * f_s \right) \right)$$

$$\frac{dx}{dt} = \left((C_e * f_e) - \left(\left[\frac{x(t)}{V_o + (f_e - f_s) * t} \right] * f_s \right) \right)$$

Donde

$x(t)$ es la cantidad de sal en el tanque en el tiempo t

C_e es la concentración de sal en el agua que entra en el tanque (lb/gal ó kgs/lts)

f_e es el flujo de entrada de agua en el tanque (gal/min ó lts/min) en todo tiempo

C_s es la concentración de sal en el agua que sale en el tanque (lb/gal ó kgs/lts), justamente el término clave que desconocemos en el proceso, por lo que se DEBE representar por cantidad de sal / volumen ó $x(t) / V(t)$

f_s es el flujo de salida de agua en el tanque (gal/min ó lts/min) en todo tiempo

Posteriormente se les solicita a los alumnos analizar el tipo de Ecuación Diferencial (que es ordinaria) y su orden (primer orden) y se procede a resolverla identificando previamente el método a utilizar (modelo lineal) para finalmente solicitarle al alumno un bosquejo de su gráfica. Esta última parte corresponda a la parte en el proceso de modelación de establecimiento de modelo matemático en su representación analítica (ED) y/o gráfica (curva de la función solución). Aquí es importante señalar que esta parte de resolución de la ED constituye una parte esencial del curso sin embargo al interior de esta propuesta didáctica es tan solo una parte del proceso de modelar, esta parte que será eventualmente facilitada a través de un recurso tecnológico como lo es el uso del software matemático Maple.

Parte III. Contexto diferente e incluye el apoyo del uso de tecnología a través del uso de Maple. Además Se usa un simulador (libre en la web) de la editorial CENGAGE (Brook Cole/Cengage) el cual está asociado al libro de texto del curso de Ecuaciones Diferenciales (Zill, 2009). En el simulador es donde es posible graficar la situación problema para compararla con la gráfica inicialmente propuesta sobre la evolución de la magnitud a través del tiempo, y finalmente se le pide al alumno realizar una conclusión de la problemática inicial planteada en términos del fenómeno analizado.

Paso 3. Afirmación del aprendizaje que se realiza también de tres maneras distintas:

- A) Uso del tutorial de Maple diseñado expresamente para que el alumno aprenda a escribir, resolver y graficar soluciones de las ED en Maple. Se proponen además otras situaciones similares a las trabajadas en clase para que se resuelvan en Maple.
- B) Solución de algunas situaciones problema de Mezclas de tarea (contextos similares y/o ligeramente diferentes a los tratados en clase)
- C) Solución de un problema de mezclas en el examen parcial (corto plazo) y final (mediano plazo).

5. A manera de conclusión

Este documento tiene finalmente como objetivo el mostrar la primera parte del estudio desde los fundamentos teóricos que respaldan el diseño de la actividad y su implementación. Si bien la implementación ha tenido lugar en el presente, la presentación del análisis de datos se dará en una contribución futura. Creemos importante el mostrar a detalle que la elección de las características de la actividad mostrada tiene un fin bien particular (cada paso y etapa considerada) y que finalmente es la idea base de la modelación que se pretende transmitir que es la que rige tal diseño y posteriormente el análisis de lo observado. Sin duda alguna el papel de ambientes de aprendizaje centrados en el estudiante como la Sala ACE y el uso de tecnología que se emplea en este estudio (Maple y simulador) será de importancia que se discuta a profundidad posteriormente.

6. Referencias

- Beichner, R., Saul, J., Abbott, D., Morse, J., Deardorff, D., Allain, R., Bonham, S., Dancy, M., & Risley, J. (2007). *The Student-Centered Activities for Large Enrollment Undergraduate Programs (SCALE-UP) project*, a peer reviewed chapter of Research-Based Reform of University Physics, (Redish, E., and Cooney, P., eds.), College Park, MD: Am Assoc of Physics Teachers.
- Blanchard, P., Devaney, R. y Hall, G. (2006). *Differential Equations*. (3ª edición). Belmont: Cengage.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 37-68.
- Brook Cole/Cengage. Simulador del libro de Denis Zill. Ecuaciones Diferenciales. Recuperado en: http://www.cengage.com/math/book_content/0495108243_zill/zill_DE/project/final/publish/tool/tool.html
- Collazos, C. A. y Mendoza, J. (2009). *Cómo aprovechar el aprendizaje colaborativo en el aula*.
- Ferreira, A.F. (2009). *Las innovaciones tecnológicas y su impacto en la educación*. El Cid Editores.
- Henning, H. y Keune, M. (2007). Levels of modelling competencies. En Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W. y Niss, M. (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, 225-232. New York: International Commission on Mathematical Instruction ICMI.
- Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En Henry, M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (149-159). Besançon : Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.

- Lomen, D. y Lovelock, D. (2000). *Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. México: CECSA.
- Maab, K. (2006). What are modeling competencies?. ZDM, 38 (2). pp. 113-142. Niss, M., Blum, W. y Galbraith P. (2007). Introduction. ICMI Study 14: *Applications and Modelling in Mathematics Education*. New York: Springer, 3-32.
- Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation en Classe de Physique et des Mathématiques au lycée : une étude de manuels et de processus de modélisation en Terminale S*. Tesis doctoral. Escuela Doctoral de Matemáticas, Ciencias y Tecnologías de la Información. Universidad Joseph Fourier, Grenoble, Francia. Recuperado el 6 de febrero de 2011 de: <http://tel.archives-ouvertes.fr/docs/00/29/22/86/PDF/TheseRuthRdz.pdf>.
- Rodríguez, R. (2010a). *El desarrollo de competencias de modelación en clase de matemáticas: un enfoque teórico*. XXII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME XXII). Guatemala, Guatemala.
- Rodríguez, R. (2010b). *Diseñando un curso de Ecuaciones Diferenciales a través del Trabajo Colegiado: una experiencia docente*. Memoria de la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa. Nuevo León.
- Rodríguez, R. (2010c). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13 (4-I): 191-210. México.
- Symbolic Computation Group. (1988). MAPLE. University of Waterloo. Waterloo Ontario, [Software de Cómputo]. Recuperado de Canada.<http://www.maplesoft.com/products/Maple/features/index.aspx>
- Zavala, G., Alarcón, H., Domínguez, A. y Rodríguez, R. (2010). Sala ACE: Aprendizaje al servicio de la Educación. *Revista Ciencia Conocimiento Tecnología*. Pp. 36-40. Gobierno de Nuevo León.
- Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. (9ª. Edición). México: Cengage.