

## NOCIONES Y HABILIDADES MATEMÁTICAS ASOCIADAS AL PENSAMIENTO VARIACIONAL. ANÁLISIS DE UN DISEÑO DIDÁCTICO



Landy Sosa Moguel, Eddie Aparicio Landa, Irene Pérez Oxté  
smoguel@uady.mx, alanda@uady.mx, carolina\_azul.18@hotmail.com  
Universidad autónoma de Yucatán  
Reporte de Investigación  
Medio Superior

### Resumen

En este escrito se reportan los resultados de un estudio exploratorio en el que se analizan los conocimientos y habilidades que movilizan estudiantes de bachillerato en actividades en las que la modelación de lo cambiante se establece como eje rector de dichas actividades. En particular, se pone especial atención en tareas de conceptualización, operación y formalización de lo variacional ejemplificadas para el caso de la modelación lineal. A partir de los resultados obtenidos se deduce la importancia de centrar la atención en la actividad humana y en las situaciones de naturaleza variacional para construir conocimiento matemático asociado al Precálculo escolar.

**Palabras Clave:** *Actividades, práctica, nociones, habilidades, Precálculo*

### 1. Introducción

Esta investigación se enmarca en un proyecto en el que se estudian las variables socioculturales de contexto que permitan sentar condiciones para un rediseño de contenidos matemáticos en bachillerato y de las prácticas educativas con el objeto de otorgar mayores posibilidades al estudiantado de realizar una “auténtica” actividad matemática. Una instrucción que proporciona los objetivos, números, palabras y sintaxis en un contexto restringido, limita el conjunto de opciones y contextos para que el estudiante ejecute un procedimiento o desarrolle un discurso que apoye su pensamiento y por consiguiente, lo conduce a una actividad matemática artificial carente de sentido y funcionalidad. En la medida en que los estudiantes sean capaces de usar normas culturales como las establecidas por la comunidad matemática, para analizar situaciones y crear los contextos de resolución de problemas en que trabajen, podrá decirse que su participación en las actividades de construcción de conocimiento en el aula de matemáticas será más o menos auténtica (Mc Nair, 1999).

Se asume que en un rediseño del discurso matemático se hace necesario considerar el contexto en que los seres humanos desarrollan procesos de pensamiento, aprendizaje y construcción conceptual en matemáticas. Entiéndase por contexto al “conjunto de condiciones y circunstancias de carácter sociocultural en las que física o simbólicamente se sitúa un hecho o persona, y supone la especificidad de los fenómenos o situaciones, pues éstos han de combinarse de manera única e irrepetible para tener influencia en lo que él acontece” (Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, 2010).

Al respecto, uno de los componentes de los contextos de construcción de conocimiento matemático lo constituyen las experiencias de cada ser humano. Hoy se sabe que experiencias matemáticas de argumentación, justificación o co-construcción de una definición podrían preceder las formas de discurso en el aula y apoyar el pensamiento matemático del estudiante. Empero, su abstracción y comprensión será posible si éstas tienen lugar en actividades que lo involucren. En términos globales, es el tipo de experiencias que tienen los estudiantes en las aulas lo que determina el tipo de marco de las matemáticas que desarrollarán, el cual a su vez guiará las

decisiones que toman y sus procesos de construcción de aquello que les permita reflexionar sobre lo que da sustento a su pensamiento (O'Connor, 1999).

Por ejemplo, en Torres y Aparicio (2010) se evidencia que en actividades humana de predicción matemática, estudiantes de distintos niveles educativos son capaces de realizar exitosamente actividades matemáticas como medir, identificar variables, cuantificar cambios y establecer relaciones. Asimismo, dichas actividades posibilitaron que entrelacen la comunicación de sensaciones, nociones e imágenes internas con significados asociados a conceptos matemáticos de la variación y el cambio, a partir de procesos de orden sociocultural tales como el gesto, que emergieron de su actividad.

Por otra parte, en Matemática Educativa se ha mostrado que en la realización de prácticas como la modelación, predicción y optimización de situaciones o fenómenos es posible crear escenarios escolares donde los estudiantes desarrollen recursos y habilidades matemáticas al tiempo que construyen su conocimiento. En Arrieta y Canul (2004) se muestra cómo en la puesta en escena de un diseño de aprendizaje basado en prácticas de modelación de fenómenos: “Lo exponencial: la ley de enfriamiento de Newton”, los participantes construyen lo exponencial como herramienta para efectuar predicciones sobre el fenómeno y formarse esquemas para relacionar entre sí los parámetros de los diferentes modelos con las características físicas del fenómeno.

Así, bajo un enfoque centrado en la noción de práctica social, se pretende obtener información sobre procesos de diseño de actividades que privilegien el desarrollo de experiencias y tareas específicas ligadas a la construcción de los saberes de la variación y el cambio en jóvenes de bachillerato. La idea es apoyarse en las actividades humanas de exploración y significación progresiva para conformar un cuerpo de conocimientos escolares esenciales para la vida de los estudiantes. Tales formas de significar los “objetos” matemáticos permiten diversificar el funcionamiento de los procesos mentales y con ello, la posibilidad de búsqueda de situaciones de aprendizaje mejor adaptadas a los procesos de construcción de conocimiento.

En ese sentido, en Precálculo se esperaría que la generación de aprendizajes funcionales se constituya a partir de prácticas que posibiliten en los estudiantes el desarrollo de experiencias para conformar una estructura mental que les permita acercarse cualitativa y cuantitativamente a los procesos de cambio (Mejía y Nieves, 2001). Por ejemplo, la resolución de problemas y la modelación de lo cambiante continuo.

Por tanto, se llevó a cabo un estudio exploratorio con la intención de analizar qué conceptos o nociones y habilidades matemáticas emergen en estudiantes de bachillerato al momento de resolver actividades de aprendizaje centradas en prácticas. La atención estuvo puesta en la cuestión ¿En qué medida un diseño didáctico basado en prácticas favorece el desarrollo de pensamiento matemático asociado a conceptos del Precálculo?

## 2. Marco teórico

Desde una perspectiva socioepistemológica, en diversas investigaciones en Matemática Educativa se señala que los procesos de construcción y organización del conocimiento matemático se corresponden con contextos y prácticas específicas de las comunidades sociales (Cantoral, 2009; Aparicio, Sosa, Jarero y Tuyub, 2010). En la socioepistemología se reconoce que los seres humanos utilizan sistemas de razón contextualizada, es decir, su pensamiento y aprendizaje obedecen al contexto en que se desarrollan (Cantoral, 2009).

Por tanto, se asume que un rediseño del discurso matemático escolar debe necesariamente considerar las variables de contexto, pues en efecto, el origen de la matemática se relaciona con el entorno social y momento histórico al que pertenece. El surgimiento del conocimiento matemático es producto de una evolución de pensamiento social en el que se desarrolla.

Asimismo, en un encuadre socioepistemológico la organización de saberes matemáticos en textos y la construcción de conocimiento matemático comporta el uso de verbos tales como predecir, argumentar, gesticular, estabilizar y acumular, es decir, una organización y rediseño del discurso matemático escolar centrado en el uso social y la funcionalidad de la matemática (Cantoral, 2004). Tales verbos denotan prácticas en las que subyace la construcción de dicho conocimiento.

Según Arrieta (2003) citado en Alatorre, López y Carrillo (2006) la práctica connota hacer algo, pero no simplemente hacer algo en sí mismo y por sí mismo; sino algo que en un contexto histórico y social otorga una estructura y un significado a lo que hacemos. En ese sentido, la práctica siempre es una práctica social, pues surge de una necesidad sociocultural y posibilita o permite la construcción de conocimiento, pero no cualquier conocimiento, sino un conocimiento específico. En consonancia con esta noción de práctica, en la investigación se reconoce como práctica a las actividades humanas que posibilitan la construcción de conocimiento matemático en los usos de conocimiento y quehacer de una comunidad para resolver una situación o problema en un contexto específico.

Se sabe que la construcción de conocimiento asociado a conceptos del Precálculo, Cálculo y Análisis ha emergido y evolucionado en prácticas que desentrañan mecanismos para entender y explicar la variación de lo que fluye, por ejemplo, la predicción y la modelación matemática de fenómenos de variación. Dicho así, en la socioepistemología, el Cálculo se concibe como

... el estudio de los fenómenos de variación, donde la operación fundamental es la resta que modela la comparación de dos estados. Algunas veces en una situación local y otras veces en una situación global. Esta visión epistemológica provee de categorías cuyas bases no son a priori la abstracción reflexiva y corresponden más a una base de modelación y de uso. (Cordero, 1998, p. 58)

Por ende, su discurso escolar habrá de construirse sobre un marco funcional y de uso en el que se resignifiquen los conceptos de la variación y el cambio. Por tal razón, en este estudio se analizan las condiciones que favorezcan el desarrollo de estructuras y lenguajes de tipo variacional por las personas en situaciones de esta naturaleza. Estas condiciones se traducen en diseños didácticos con los que se espera identificar procesos y mecanismos para instaurar prácticas en el aula de matemáticas que conciten formas de pensar y actuar en los estudiantes para entender y explicar lo cambiante en su entorno al tiempo que construyan conceptos del Precálculo.

### **3. Método**

El diseño didáctico se sustenta en tareas que favorezcan el desarrollo de formas del pensamiento y lenguaje variacional y en una lógica socioepistemológica, basada en el estudio de procesos de comunicación y aprendizaje de los saberes matemáticos de la variación y el cambio, su epistemología, así como los procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados en situaciones de naturaleza variacional (Cantoral, 2004).

Las actividades de aprendizaje se estructuran entonces a partir de tareas que detonaran la interacción en los estudiantes en procesos de conceptualización, operación y formalización de lo variacional tanto en el plano matemático como en el sociocultural, tales como:

- a. Tareas de conceptualización:** Comparar estados, identificar relaciones y transformaciones de estados, representar el cambio y la variación.
- b. Tareas de operación:** Interpretar la variación, cuantificar el cambio, argumentar, codificar información y construir representaciones.
- c. Tareas de formalización:** Establecer nociones (expresadas por definición o construcción), propiedades y relaciones matemáticas en comunidad a partir de procesos de convención social o consenso para significar un saber, en la resolución de situaciones de variación y cambio.

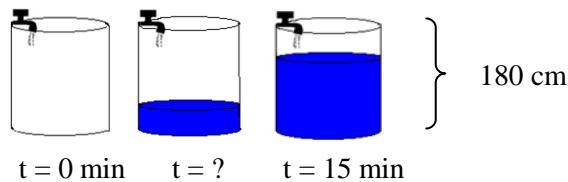
De tal manera, se conformó un diseño de unidad didáctica con núcleo de contenido en situaciones de variación y cambio de modelación lineal, que consta de tres actividades de aprendizaje: Llenado de un recipiente, Movimiento de un objeto y Costo de un servicio o producto.

**Ejemplo de una unidad didáctica de modelación lineal**

Se muestra a continuación la actividad “Llenado de un recipiente”, centrada en la práctica que consiste en *desarrollar una técnica o método para calcular la variación del fluido (liquido) en el llenado de un recipiente o tanque*. La situación trata de un fenómeno físico de estimación de la altura de líquidos en el llenado de un tanque; se consideraron como variables la forma del recipiente (regular) y la rapidez de llenado (constante).

**Actividad. Llenado de un recipiente**

Instrucción. Se ilustra el llenado de un tanque cilíndrico al que una bomba suministra agua con una rapidez de  $160 \text{ l/min}$ . Resuelve la actividad para estimar la altura del agua en el cilindro en un tiempo determinado.



Estructura u orden de las tareas	Tareas de la actividad	Tipo de tareas de modelación de lo variacional
Interpretación de la situación: Reconocimiento de la variable dependiente	1. Expresa qué cambia en la situación	Comparar estados
Identificación de la situación: Identificación de la variable independiente	2. Indica respecto a qué cambia aquello que cambia	Interpretar la variación, identificar relaciones entre variables
Modelación de la situación: Uso de expresiones funcionales	3. Genera un modelo matemático que describa cómo cambia la altura del agua en el tanque conforme se va llenando	Representar el cambio y la variación, cuantificar el cambio, construir representaciones

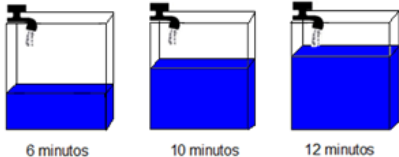
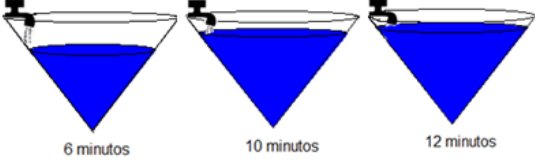
Validación del modelo: Cálculo, predicción o aproximación de valores	<p>4. Estima en cuánto tiempo se tendría que apagar la bomba para que la altura del agua esté a la mitad de la capacidad del tanque.</p> <p>5. A continuación se ilustra el llenado de dos recipientes, ¿en cuál de esos recipientes el llenado se puede calcular empleando un modelo matemático como el de la situación anterior? Explica el porqué de tu elección.</p>	Identificar transformaciones entre estados, cuantificar cambios, interpretar la variación, argumentar, construir representaciones, establecimiento de propiedades o características de los modelos (lineales), y de nociones de variación y cambio
<p>A)</p>  <p>B)</p> 		

Tabla 1. Ejemplo de actividad de la unidad didáctica de modelación lineal

Para la experimentación se seleccionaron dieciocho estudiantes (9 hombres y 9 mujeres) del segundo semestre de una escuela preparatoria, quienes aún no habían cursado Matemáticas 4 (Precálculo), y se aplicaron las actividades en equipos de tres personas, en dos módulos con duración de una hora y veinte minutos cada uno.

#### 4. Resultados

En el proceso de modelación de las situaciones de variación y cambio que conforman la unidad didáctica, los estudiantes mostraron evolución en sus habilidades matemáticas y significaron nociones variacionales. Esto es puesto de manifiesto en las soluciones de cada actividad. En lo sucesivo se denota con la letra A seguida de un número la respuesta de cada estudiante y con la letra E seguida de un número, se hace referencia al equipo que pertenece.

El reconocimiento y fijación en lo cambiante que evoca la actividad, dado que está sujeta a la naturaleza de lo cambiante de carácter continuo y lineal, permite al estudiante construir un marco de referencia conformado por las variables y la forma en que se relacionan, el cual precede acciones como calcular, modelar o determinar. La construcción de dicho marco precisa de la habilidad para identificar variables, su dependencia y relación que desarrollaron los estudiantes ante tareas de comparación de estados e interpretación de la variación a partir de una situación visual, por ejemplo, esto se hizo visible en las respuestas de las primeras dos tareas de la actividad de llenado de un recipiente donde se les cuestionaba sobre qué cambia y con respecto a qué cambia en dicha situación.

Tarea 1	Tarea 2
A1, A7-12: ( <i>Cambia</i> ) La altura del agua	A1: La altura del agua cambia respecto al tiempo
A2, E2: La cantidad de agua	A2: Que hay mas litros de agua cada vez que pase un minuto
A3: La cantidad en litros y la altura del agua	A3, E2, E3, E4: Respecto al tiempo de llenado
E5: El nivel del agua va aumentando	

La naturaleza de la situación coadyuvó a que los estudiantes distingan el tipo de variación presente en la situación, en este caso, la variación constante. Con base en el reconocimiento de esta forma de relación entre variables, los estudiantes desarrollaron técnicas de cuantificación de cambios tales como el establecimiento de secuencias de cambios, el cálculo de diferencias entre valores de las variables, la aplicación de regla de tres, cálculo de proporciones (multiplicaciones y divisiones). Ambas acciones de reconocer los cambios y cuantificarlos, sustentaron la generación de modelos numéricos y algebraicos para representar la variación lineal, como puede observarse en algunas de las soluciones de los estudiantes en las tareas tres y cuatro de la actividad del llenado.

**Tarea 3**

A1, A3:

Tiempo (min)	Altura (cm)
0	0
7	9
5	45
10	90
15	135
20	180

E3: Cantidad que suministra la bomba por el tiempo. 9cm /min

$$15 + x = 180 \quad \frac{1}{4} = x \quad \frac{3}{4} = 15 \quad 160 (\text{tiempo}) = \text{Cambio de altura}$$

$$\frac{180}{20} = 9 \text{ cm/min} \quad \frac{9}{4} = 20 \text{ min}$$

A2:

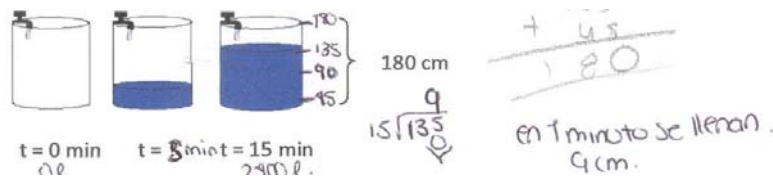
minutos					
litros	0	5	10	15	20
	0	800	1600	2400	3200

A4, 160 x min = litros en el tanque  
 A5, A10, (x representa el signo de multiplicación)  
 A11, A12:

E6:  $3200 \text{ l} - 180 \text{ cm}$   
 $160t - x \text{ (cm)}$

**Tarea 4**

E1, E4,  
 E5:



E6:  $\frac{3}{4}$  del tanque = 15 min.  
 $\frac{4}{4} = 20 \text{ min}$

E2:

Tanque de 15 minutos hay:

$$\begin{array}{r} 3 \\ 160 \\ \times 15 \\ \hline 800 \\ 2400 \\ \hline 2400 \end{array}$$

1

$$\begin{array}{r} 800 \\ 3 \overline{) 2400} \\ \underline{2400} \\ 00 \end{array}$$

2

$$2400 + 800 = 3200 \text{ Litros}$$

Llena el tanque tiene

3

Se llena en 20 minutos

$$\begin{array}{r} 20 \\ 160 \overline{) 3200} \\ \underline{3200} \\ 00 \end{array}$$

4

$$\begin{array}{r} 3 \\ 160 \\ \times 5 \\ \hline 800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{mitad} \\ 2 \overline{) 3200 \text{ L. Litros}} \\ \underline{1600} \\ 1600 \end{array}$$

5

= 1600 Litros es la mitad

En la cantidad de agua que la bomba arroja

$$\begin{array}{r} 10 \text{ minutos} \\ 160 \overline{) 1600} \\ \underline{1600} \\ 00 \end{array}$$

6

Capacidad del tanque

Además, la naturaleza de la situación hace factible el reconocimiento de formas de variación constante y no constante por parte de los estudiantes. Por ejemplo, surgen ideas de la variación exponencial a partir de discutir sobre la variación constante con base en el marco de referencia construido, mismo que les permite reflexionar y anclar su pensamiento sobre la modelación lineal, máxime al confrontarlo con una situación no lineal. Constátase este hecho en las respuestas dadas a la tarea cinco donde se les demanda asociar un modelo lineal con una situación, eligiendo adecuadamente la opción A que representa una variación constante.

- E1: (A) Porque es más fácil de buscar la mitad del recipiente y se puede notar más rápido la cantidad de agua que se adquiere en un minuto. Además en los recipientes A su ancho es constante y es más fácil reconocer la altura por minuto.
- A4: (A) Por la forma del prisma se podría detectar (*la variación*) visualmente. No por su forma cónica.
- A5, A6: (A) Por su llenado va siendo constante y así se podría calcular su altura de llenado. (*La B no corresponde*) Porque esta figura se comienza a llenar por un pico y su capacidad aumenta conforme se va abriendo.
- E3: (A) La B no varía proporcionalmente.
- E4: (A) Se puede apreciar de mejor manera como aumenta proporcionalmente el agua.
- E5: (A) Porque se da la misma variación y va aumentando al tiempo que se determina.
- E6: (A) Porque hay una variación constante.

La actividad (práctica) de modelación lineal en el marco de situaciones de naturaleza variacional continua y discreta con fijación en las variables y su relación, produjo que los estudiantes generalicen la forma de modelar o representar lo cambiante para el caso de lo lineal. Es decir, con la actividad ellos accedieron a experiencias que apoyaron la abstracción de las situaciones, por ejemplo, la forma del recipiente y la rapidez de llenado en la actividad antes referida.

## 5. Conclusiones

La centración explícita en las variables por medio de lo visual, la naturaleza cambiante de las situaciones, la construcción de un marco de referencia por parte del estudiante en un diseño didáctico que de inicio lo haga aludir al cambio y no a la variación, son aspectos que integrados en un diseño basado en prácticas hacen emerger una actividad matemática más auténtica en el

estudiante como la modelación matemática, al tiempo que construye conocimiento matemático relativo a lo variacional.

Las experiencias que devienen en los estudiantes al involucrarlos en actividades humanas de modelación que inciten la ejecución de tareas de conceptualización, operación y formalización de lo variacional, tanto en el **plano matemático** como en el **sociocultural**, favorece que ellos desarrollen conocimientos y habilidades matemáticas para modelar lo variacional y significar nociones como el cambio y la variación en una situación específica.

## 6. Referencias

- Alatorre, H., López, I. y Carrillo, C. (2006). El carácter evolutivo de las prácticas sociales: El caso de la predicción. En G. Buendía (Presidenta). *Memorias de la décima Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 12-21). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa.
- Aparicio, E., Sosa, L., Jarero, M. y Tuyub, I. (2010). Conocimiento matemático. Un estudio sobre el papel de los contextos. En R. Rodríguez y E. Aparicio (Eds.). *Memorias de la décimo tercera Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 167-174). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.
- Arrieta, J. y Canul, A. (2004). Las prácticas sociales de modelación en la construcción de la construcción de lo exponencial. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17*, 209-214. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cantoral, R. (2009). Tendencias de la investigación en matemática educativa: del estudio centrado en el objeto a las prácticas. Conferencia plenaria en la Vigésimo Tercera Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Julio, Santo Domingo, República Dominicana.
- Cantoral, R. (2004) Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 17(1)*, 1-9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del Cálculo y Análisis: El caso del comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1(1)*, 56-74. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Mc Nair, R. (1999). Building a context for mathematical discussion. En Lampert, M. y Blumk, M. (Eds.). *Talking mathematics in school: Studies of teaching and learning* (pp. 82-106). England: Cambridge University Press.
- Mejía, H. y Nieves, A. (2001). Propuesta de análisis del cambio en el Precálculo, a partir de una situación real. En C. Cortés, F. Hitt, A. Sepúlveda y L. Guerrero (Eds.). *Memorias del Noveno encuentro de profesores de matemáticas del nivel medio superior* (pp. 174-181). Michoacán: Universidad Michoacana de San Nicolás de Hidalgo.
- O' Connor, M. (1999). Language socialization in the mathematics classroom: Discourse practices and mathematical thinking. En Lampert, M. y Blumk, M. (Eds.). *Talking mathematics in school: Studies of teaching and learning* (pp. 17-55). England: Cambridge University Press.
- Torres, L. y Aparicio, E. (2010). Predicción matemática y contextual. Formas de construcción del discurso en situaciones variacionales. En R. Rodríguez y E. Aparicio (Eds.). *Memorias de la décimo tercera Escuela de Invierno en Matemática Educativa* (pp. 77-83). México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa, A.C.