EXCLUSIÓN EN EL DISCURSO MATEMÁTICO ESCOLAR. EL CASO DEL TEOREMA DE L'HOSPITAL

Daniela Soto S., Ricardo Cantoral U.
dsoto@cinvestav.mx, rcantor@cinvestav.mx
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
Avance de Investigación
Superior

Resumen
En este reporte presentamos los resultados del proyecto de investigación desarrollado por Soto (2010) donde se identificó, caracterizó y ejemplificó el fenómeno de la *exclusión* producido por el *discurso matemático escolar (dME)*. Dicho planteamiento nace a partir de la reflexión que la Socioepistemológia pone en la palestra: La concepción de la Matemática que subyace en la enseñanza ha estado históricamente en términos de lo preexistente, la Matemática se ha considerado independiente de la experiencia humana. Proponemos un *modelo de exclusión*, donde el *dME* es caracterizado como un *sistema de razón (SR)*, que excluye a los actores del sistema didáctico de la construcción del conocimiento matemático a través de una *violencia simbólica (VS)*. Dicho modelo será evidenciado en el análisis del *dME* de una noción matemática específica: el Teorema de l´Hospital.

Palabras claves: *Exclusión, discurso matemático escolar, l'Hospital*

1. Introducción

Nos hemos preguntado ¿por qué en la universidad se nos enseña la regla de l'Hospital? Seguramente la respuesta la hemos encontrado cuando se nos presenta un límite, el cual nos de cómo resultado, al utilizar las herramientas convencionales de la matemática, 0/0 o ∞/∞. Sin embargo, si durante nuestra vida cotidiana o profesional no se nos presenta una situación como la antes señalada, lo más probable es que este conocimiento quede en el olvido o no podamos resignificarlo. En este reporte mostraremos, desde nuestra perspectiva socioepitemológica, la razón de este fenómeno: el *discurso matemático escolar (dME)* nos excluye de la construcción del conocimiento matemático.

El reporte que aquí se presenta evidencia, caracteriza y ejemplifica un tipo de exclusión provocado por el discurso matemático escolar (*dME*), hacia los sujetos que construyen conocimiento matemático.

Desde nuestra perspectiva socioepistemológica, la Matemática Escolar se ha basado en un discurso que centra, principalmente, la atención en los objetos matemáticos (conceptos y procesos matemáticos). Esto quiere decir que en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas los conceptos, teoremas y procedimientos matemáticos han sido objetos de estudio suponiendo una preexistencia, con lo cual se han soslayado los elementos fundamentales que han permitido su construcción y la permanencia en el sistema didáctico. De esta forma el individuo aparece como el que aprende esos objetos, más no que los construye.

Con esta investigación pretendemos robustecer nuestra perspectiva teórica, a saber: la Socioepistemología. El objetivo es dejar al descubierto un fenómeno típicamente social que se reproduce con la matemática escolar actual: la exclusión.

De acuerdo a esto, hemos construido un *modelo de exclusión* que describe el funcionamiento del *dME* como un *sistema de razón* que produce *violencia simbólica*.

Para caracterizar al *dME* como un *sistema de razón* hemos hecho explícitas las componentes del "*mapa*" que delinea lo "correcto" en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y cómo cada una de ellas propicia la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos sobre los saberes matemáticos, generando una *violencia simbólica* hacia los actores del sistema didáctico.

Con el fin de ejemplificar la *violencia simbólica* que ejerce el *dME*, hemos analizado un objeto matemático específico de la matemática escolar de nivel superior: el Teorema de l'Hospital. Este análisis nos muestra la *exclusión* que produce la organización de la matemática escolar hacia los actores del sistema didáctico (profesor y estudiante) en la construcción del conocimiento. Resaltaremos los aspectos relevantes en su presentación como una regla: sus significados, procedimientos y el tipo de problemática a la cual responde (el cálculo de límites que no pueden ser calculados debido a la indeterminación de la función en el punto de interés).

2. Problemática

La Socioepistemología se ha caracterizado por ser una teoría que reconoce una matemática escolar diferente a la matemática como disciplina científica. La matemática escolar es la reorganización del saber con fines didácticos, ésta tiene su propia estructura, organización, intención y centración, la cual recae principalmente en los objetos matemáticos y no en la construcción del conocimiento matemático. Esto nos ha permitido tomar como objeto de estudio al *dME* que ha conformado la matemática escolar actual.

Cantoral, Farfán, Lezama, y Martínez-Sierra (2006) explican que el conocimiento matemático adquiere un estatus de saber sólo hasta que se haya socializado en ámbitos no escolares. Así también que su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de transformaciones que afecta directamente a su estructura y su funcionamiento, de manera que afecta también las relaciones que se establecen entre los estudiantes y sus profesores. Es decir, el proceso de constitución del conocimiento tiene una componente social, que va más allá de la interacción humana para construir funciones mentales (en el sentido Vigostskiano), damos cuenta de cómo las comunidades se organizan para dar una institucionalidad al saber, donde se ponen en juego intensos procesos de negociación y de debate.

En el intento por difundir esos saberes se conforman discursos, que la Socioepistemología ha denominado con el término *dME*. Cantoral et al. (2006) aclaran que la estructura de dichos discursos no se reduce a la organización de los contenidos temáticos, ni a su función declarativa en el aula (el discurso escolar), sino que se extiende un tanto más allá, al llegar al establecimiento de bases de comunicación para la formación de consensos y la construcción de significados compartidos.

Las investigaciones que se han ocupado del *dME* para nociones específicas (Buendía, 2004; Cantoral 1990; Cordero, 1994; Montiel, 2005, entre otras), han evidenciado una serie de características. Estas son:

- **La atomización en los conceptos**: no se consideran los contextos sociales y culturales que permiten la constitución del conocimiento.

- **El carácter hegemónico**: existe una supremacía de argumentaciones, significados y procedimientos, frente a otras.
- **La concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continúo**: los objetos matemáticos son presentados como si siempre hubiesen existido y con un orden.
- **El carácter utilitario y no funcional del conocimiento**: la organización de la matemática escolar ha antepuesto la utilidad del conocimiento a cualquiera de sus restantes cualidades. Se busca que el conocimiento tenga un carácter funcional, en el sentido que logre integrar tal conocimiento a la vida para transformarla.
- **La falta de marcos de referencia para resignificar la matemática escolar**: se ha soslayado el hecho de que la Matemática responde a otras disciplinas y, por tanto, es ahí donde encuentra una base de significados naturales.

Cada una de ellas nos habla distintamente del *dME* y su conjunto nos lleva a reconocer el fenómeno de exclusión. Con estas características reconocemos al *dME* como impositivo, donde la Matemática aparece como estática, no construible por el sujeto. Es decir, los actores del sistema educativo aparecen como comunicadores y aprendices de un conocimiento legítimo socialmente sin tener la posibilidad de construirlo o trastocarlo. Por tanto, la problemática del fracaso la ampliaremos a una visión social del fenómeno: la exclusión.

La exclusión que estudiamos en nuestra tesis se refiere a la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos asociados a los objetos matemático, que ha promovido el *dME y* que ha permitido que los actores del sistema didáctico no puedan incluirse en la construcción del conocimiento matemático.

3. El modelo de exclusión

Primeramente, debemos aclarar, debido a la gran cantidad de significaciones que existen alrededor del tema, que nuestro estudio examina la *exclusión* producida por la matemática escolar. Es decir, consideramos que existe un *sistema de razón* (Popkewitz y Lindblad, 2005) que fundamenta a la organización de la Matemática Escolar y que genera principios donde el quehacer de los individuos o de los grupos queda al margen de la construcción del conocimiento. Por tanto en el sentido metodológico nos planteamos hacer análisis de ese *sistema de razón* al que denominamos el *dME*.

Ahora bien, ¿qué tipo de *exclusión* pretendemos evidenciar? La comunidad preocupada de este fenómeno ha estudiado diferentes formas por las cuales se manifiesta la *exclusión*. Nuestro estudio pretende mostrar cómo el *dME* genera *violencia simbólica* (Bourdieu y passeron, 2005). Es decir, planteamos que es el propio conocimiento trastocado con fines didácticos, el cual impone significados y valida sólo un tipo de argumentaciones, con lo cual genera un tipo muy sutil de *exclusión*, donde los actores del sistema didáctico (estudiantes, profesores, padres, directivos, políticos, etc.) son “cómplices involuntarios” de este proceso. Debido a la legitimidad de la cual goza el sistema que lo produce.

De esta forma nuestra investigación combina los dos tipos de análisis de la *exclusión escolar*. Por una parte, intentamos explicitar las características del *sistema de razón -dME-* que fundamenta a la organización de la matemática escolar, el cual delimita lo que queda dentro de lo “normal” en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Y por otra, nos proponemos evidenciar cómo ese *sistema de razón* a partir de sus características, impone significados, procedimientos y argumentaciones que los actores del sistema didáctico reconocen e interiorizan, reconociendo en ellas hegemonía y superioridad.

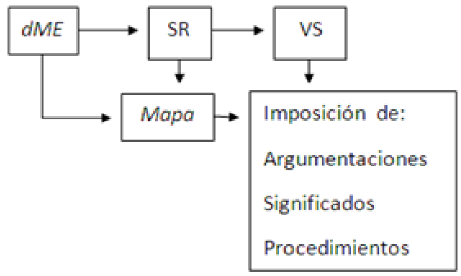

Figura 1. Modelo de exclusión

Nuestro modelo queda reflejado en la Figura 1. El *dME* es un *sistema de razón* (SR) que produce *violencia simbólica* (VS), a partir de la imposición de argumentaciones, significados y procedimientos.

4. Análisis del teorema de l´Hospital

De acuerdo a nuestro marco teórico y al modelo de exclusión que hemos propuesto, nos hemos planteamos probar la siguiente tesis: el *dME* es un sistema de razón que produce violencia simbólica (Ver Figura 1). Para ello hemos desarrollado el análisis de un objeto matemático particular de la matemática escolar de nivel superior: el teorema de l'hospital con esto mostraremos la exclusión producida por el *dME* y como sus características conforman un mapa (Figura 2) del *sistema de razón.*

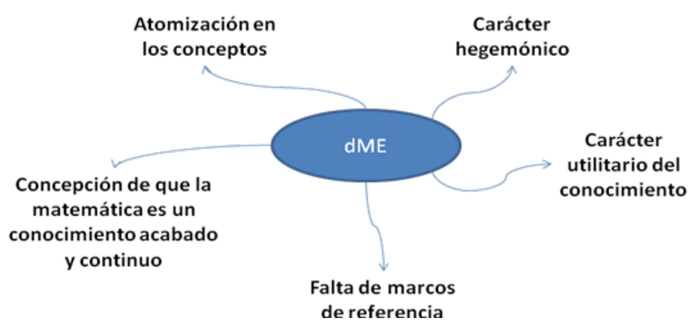

Figura 2. Mapa del dME

La exposición del teorema en el *dME* obedece a un tipo de **argumentación**: *el cálculo del límite cuando la función es indeterminada en un punto*. Este es el "hilo conductor" que norma las formas por las cuales el conocimiento se presenta y responderá al porqué de su utilidad. En este sentido, la regla aparece como un objeto matemático útil para la resolución de ejercicios, relativos al límite, que presenten la dificultad en calcularlos.

Debido a la extensión del escrito presentaremos sólo un ejemplo de la presentación del teorema en los textos de estudio (para un análisis más profundo ver (Soto, 2010)). En "*Cálculo conceptos y contextos*" de Stewart (1999) el teorema de l´Hospital es presentado de la siguiente forma:

Regla de l'Hospital: Supóngase que *f* y *g* son derivables y que g'(x)≠ 0 cerca de *a* (excepto quizás en *a*). Supóngase que

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

O que $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$

(En otras palabras, tenemos una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o del $\frac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Si el límite del segundo miembro existe (o es ∞ o es $-\infty$)

Figura 3. Presentación del teorema de l'Hospital en Stewart (1999)

De acuerdo a nuestro análisis, el *dME* del teorema nos propone centrar los **significados** de la regla en el límite, la función y el cociente. En este sentido, señalamos que el *dME* se encuentra centrado en los objetos matemáticos. Estos significados sólo provienen de objetos matemáticos enseñados anteriormente. Es decir, no se considerar argumentaciones, significaciones y procedimientos que emergen desde otros contextos de significación, sino que se imponen.

Por otra parte, el **procedimiento** que se asocia al teorema se encuentran en los procesos matemáticos, en este caso: la derivada.

Ahora bien, nuestra investigación pretende hacer ver (ejemplificando con este caso) que las argumentaciones, los significados y los procedimientos del cual nos provee el *dME* son impuestos. Por lo cual, no permiten al actor del sistema didáctico incluirse en la construcción del conocimiento matemático. En este sentido, es válido preguntarse ¿existirán otros marcos de referencia para resignificar el conocimiento?

Un marco de referencia puede ser la naturaleza del saber, es por esta razón que hemos estudiado la obra del Márquez de l'Hospital (*1696*). En este análisis, queremos resaltar la situación que hiso emerger el teorema, la cual es soslayada en el *dME*, y que provee de una argumentación, significados y procedimientos, no tan sólo diferentes sino que podrían darnos elementos suficientes para rediseñar el *dME* del teorema en cuestión.

La obra de l'Hospital está fuertemente influenciada por el cálculo leibniziano los infinitesimales y la noción de diferencial, y del análisis cartesiano, es decir, del estudio de las curvas mediante métodos algebraicos. En la sección IX, § 163 de la obra del Márquez de l'Hospital (*1696,*). Se presenta el siguiente problema.

Sea AMD una línea curva (AP = x, PM = y, AB = a) tal que el valor de la ordenada y esté expresado por una fracción, en el cual el numerador y el denominador se vuelvan cada uno cero cuando $x = a$, es decir, cuando el punto P caiga sobre el punto dado B [Fig.130]. Se pregunta cuál debe ser entonces el valor de la ordenada BD.

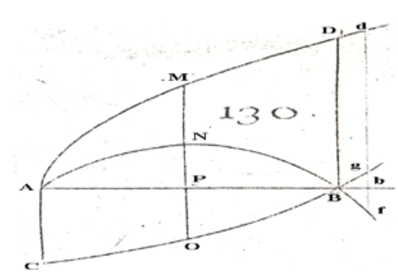

Fig 130

Figura 4. Traducción del problema (l'Hospital, 1998, p. 259)

El problema que presenta l'Hospital nos plantea una situación gráfica, donde dos curvas ($f(x)$ y $g(x)$), cuyo cociente que conforma a otra curva $\left(h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\right)$, se interceptan en el eje de las X. preguntándose que sucede con esa curva $h(x)$ en ese punto.

Debemos considerar que éste no sería un problema si las curvas cuyo cociente que representa a una tercera curva no se interceptaran en el eje de las X. Por tanto, la **argumentación** que genera la situación es justamente la intercepción de dos curvas en el eje de las X cuyo cociente representa una tercera curva. Este es el "hilo conductor" de la situación y la problemática es encontrar el valor en ese punto de intercepción de la tercera curva. Ahora bien, si consideramos la solución que plantea l'Hospital (Figura 130) podremos observar que tanto los significados y los procedimientos emergen de la situación gráfica.

> *Siendo ANB y COB dos líneas curvas conocidas que tienen a la línea AB como eje común, tal que la aplicada PN, y tales que la ordenada PN exprese el numerador y la ordenada PO el denominador de la fracción general que conviene a todas las PM, de modo que PM=(AB*PN)/PO. Es claro que estas dos curvas se intersectarán en el punto B, dado que, por la suposición, PN y PO se vuelven cada una cero cuando el punto P cae en B. Planteado eso, si se concibe una ordenada bd infinitamente próxima a BD, y que intersecta a las líneas curvas ANB y COB en los puntos f y g, se tendrá bd=(AB*bf)/bg . la cual no difiere de BD. Entonces el problema consiste en encontrar la razón entre bg y bf. Ahora bien, es claro que al volverse AB la abscisa AP, las ordenadas PN y PO se vuelven nulas, y que al volverse Ab la abscisa AP, se vuelven bf y bg. De donde sigue que estas ordenadas, las mismas bf y bg hacen la diferencia de las ordenadas en B y b con relación a las curvas ANB y COB, y por lo tanto, si se toma la diferencia de numeradores y se divide entre la diferencia del denominador, después de haber hecho x=a=Ab= AB, se tendrá el valor buscado de la ordenada bd o BD. Lo cual se quería encontrar.*

Figura 5. Solución del problema en la obra de l'Hospital (l'Hospital, 1998, pp. 259-260)

Los **significados** asociados son: la intersección de dos curvas, el cociente y la predicción. Cada uno de ellos aportará los elementos necesarios para la elección del procedimiento a seguir, en este caso: el cálculo de diferenciales; desde donde emergerán objetos y procesos matemáticos, a saber: la regla de l'Hospital.

5. Conclusiones

Después de haber identificado el tipo de situación del cual emerge el teorema y evidenciado que la argumentación del *dME*, no sólo es la única sino que además impone, a través de su legitimidad, los significados y procedimientos, para concluir quisiéramos revisar cada una de las características que conforman el mapa del *dME*, que genera una *violencia simbólica*, en este ejemplo concreto.

Comencemos con el *carácter hegemónico*. Como hemos visto, en el análisis del *dME* del teorema de l'Hospital, la argumentación que se impone es la utilización de una regla para resolver ejercicios del límite cuando éstos no se pueden calcular de manera tradicional. De esta situación se desprenden significados y procedimientos, también impuestos, ya que la presentación obedece a una regla que se debe aplicar.

En nuestro análisis de la obra de l'Hospital hemos encontrado otro tipo de argumentación, de la cual nacen los significados y los procedimientos a utilizar, en este caso de la génesis del problema (lo histórico), pero también podríamos encontrar argumentaciones provenientes de otras prácticas de referencia como el cotidiano, lo cultural o en otras prácticas de referencia, que podrían resignificar este conocimiento.

En definitiva, con el ejemplo del Teorema de l'Hospital evidenciamos el carácter hegemónico del *dME*. En el sentido de que existen otras formas de enfocar el conocimiento matemático y que nos llevan a una real construcción de él, sin embargo, no son consideradas.

El *carácter utilitario* del conocimiento, se refiere a la visión de que la Matemática es un saber útil para resolver ciertas problemáticas. Esta visión no permite que la disciplina sea concebida como el resultado de la *actividad humana*, es decir, el centro de atención será en el tipo de problemas al cual responde el saber, no así cómo se ha construido éste, ni cuál es su función. Centrarnos en el para qué utilizar el conocimiento y no en la forma en que se construye ni su función, nos lleva a focalizar la Matemática Escolar en los objetos y procesos matemáticos y no en las características de la situación que hace emerger dicho conocimiento y que sea funcional para el sujeto. De esta forma se excluye al estudiante de la construcción del conocimiento.

En este caso, el análisis del Teorema de l'Hospital nos muestra que el *dME* presenta a dicho conocimiento como una regla útil para la resolución de ejercicios relacionados con el límite. Así, el conocimiento no toma un carácter funcional, en el sentido de que le permita al estudiante manipular una situación especifica a partir de sus prácticas con el fin de que emerja el conocimiento.

La *concepción de que la Matemática es un conocimiento acabado y continuo*, se evidencia en la presentación del teorema como una regla. Esta presentación nos impone un objeto, lo que no motiva que nos preguntemos ¿por qué es posible que tal concepto se construya como se construyó? En este sentido se obliga a asumir un objeto matemático.

Además, la presentación de los conocimientos matemáticos como terminados y lineales no permite que nos plantemos modificar los objetos. Es decir, no le permite al individuo plantear nuevas hipótesis, inferir y transformar las situaciones que hacen emerger el conocimiento, en busca de otros significados sobre la actividad matemática.

La *falta de marcos de referencia* que obliguen a resignificar la matemática escolar, es evidente en el *dME* escolar del Teorema de l'Hospital. Por un lado, las explicaciones son desde la Matemática misma, no se consideran otros campos del conocimiento a los cuales la Matemática responde; y por el otro, si bien la Matemática puede ser el marco de referencia por el cual se construya el conocimiento matemático, en el ejemplo del Teorema de l'Hospital podemos ver que sólo existe un tipo de argumentación que lo fundamenta.

La *atomización de los objetos y procesos matemáticos* se manifiesta en una matemática escolar carente de argumentaciones y significados que provengan de la *actividad humana*. Se desconoce las prácticas de referencia que hacen emerger el conocimiento y las dinámicas institucionales que lo ponen en el lugar que ocupan. Esto nos impide tener una visión amplia de la estructura del saber, es decir, ¿cuáles son las situaciones que hacen que se construya dicho saber? ¿Por qué ese conocimiento y no otro? ¿Cuáles son sus usos? En este sentido plateamos que la atomización de los objetos y procesos matemáticos genera una *exclusión* hacia los actores del sistema didáctico.

Con este ejemplo y a partir de nuestro *mapa* de *exclusión* del *dME*, hemos podido dilucidar que el *dME*, presente en los textos de estudio, generan una *violencia simbólica*, en el sentido de que imponen una única argumentación y que además los significados y procedimientos que emergen de ella giran en torno a los objetos matemáticos, no considerando el papel de los actores del sistema didáctico en la construcción de estos. Es en esta dirección que nuestras reflexiones se amplían sobre la necesidad del rediseño del *dME*.

6. Referencias

Bourdieu, J. y Passeron, J-C. (2005). *La reproducción; elementos para una teoría del sistema de enseñanza*. (Trad. J. Melendres y M. Subirat). México, D.F, México: Edición Fontamara. (Original en Francés, 1970)

Buendia, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales*. Tesis de Doctorado no publicada. México: Cinvestav-IPN.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propia del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analítica.* Tesis de Doctorado no publicada. México: Cinvestav-IPN

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez-Sierra, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Número especial, pp. 83-92.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: Un estudio del discurso Matemático escolar*. Tesis doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

L'Hospital, A. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. (Trad. R. Cambray). México, D.F, México: Servicios editoriales de la Facultad de Ciencias, UNAM. (Original en Francés, 1696)

Montiel, G. (2005) *Estudio Socioepistemológico de la función trigonométrica.* Tesis doctoral. México: Cicata-IPN.

Popkewitz, T. y Lindblad, S. (2005). Gobernación educativa e inclusión y exclusión social: dificultades conceptuales y problemáticas en la política y en la investigación. En Julian J. Luengo (Comp.). *Paradigmas de gobernación y de exclusión social en la educación* (116-165). Barcelona, España: Pomaires.

Stewart, J. (1999). *Calculo: conceptos y contextos*. México, D.F, México: Thomson.