LA INTEGRAL DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE: HACIA UNA INNOVACIÓN EN SU ENSEÑANZA Y SU APRENDIZAJE

Efraín Soto Apolinar, Juan Antonio Alanís Rodríguez
efrain.soto.a@itesm.mx, juan.antonio.alanis@itesm.mx
Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey
Avance de investigación
Superior

Resumen
Se reporta el avance de una investigación en curso que forma parte de un proyecto que tiene como objetivo mejorar la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Quienes participan en ese proyecto, se han dado a la tarea de elaborar una propuesta de qué enseñar en los cursos de Cálculo, y no sólo de cómo enseñar en esos cursos. Cabe precisar que dicha propuesta está enmarcada en la aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa al atender a una epistemología de las prácticas más que de los conceptos. La investigación en curso se propone construir y evaluar la parte de esa propuesta concerniente a la enseñanza y el aprendizaje de la integral de funciones de una variable.

Palabras Clave: *Triángulo característico, diferenciales, integrales*

1. Introducción

Este trabajo es parte de un proyecto de investigación que, como reacción contra los enfoques formal y mecanicista de las Matemáticas, se ha puesto por objetivo innovar en la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo considerando para ello los resultados de la investigación en Matemática Educativa.

Quienes participan en ese proyecto conciben a las Matemáticas, ante todo, como una actividad humana involucrada en la resolución de problemas; problemas que se pueden referir al mundo natural y social o bien pueden ser internos a la propia matemática; como respuesta o solución a estos problemas externos o internos surgen y evolucionan progresivamente los objetos matemáticos: procedimientos, conceptos y teorías. Así, por una parte, si bien es cierto que las Matemáticas son un lenguaje, éste no es a priori, sino que se ha construido para comunicar los problemas y sus soluciones; y, por otra parte, si bien las Matemáticas son un sistema conceptual lógicamente estructurado, tal sistema emerge de la actividad de matematización (Godino, 2003).

Acorde con esta concepción vislumbran nuevos contenidos en la enseñanza del Cálculo estructurados alrededor de un conjunto de problemas que al ser abordados por los estudiantes favorecerá el que emerjan y evolucionen los procedimientos y conceptos sobre los cuales finalmente el Cálculo logró estructurarse.

Históricamente los problemas que condujeron al surgimiento y desarrollo del Cálculo fueron los problemas geométricos de determinar la recta tangente a una curva, el cálculo del área de una región y el cálculo del volumen de un sólido, los problemas de máximos y mínimos y los problemas relativos al cambio de las magnitudes continuas (Kaput, 1994).

Tales problemas fueron abordados por Newton y Leibniz con ideas y estilos distintos, dando lugar a dos acercamientos diferentes: el Cálculo newtoniano y el Cálculo leibniziano. Tal distinción es hecha por el mismo Newton cuando en su "*De cuadratura curvarum*" declara (Alanís 1996, p. 46):

> No considero a las magnitudes matemáticas como formadas por partes, por pequeñas que sean, sino descritas por un movimiento continuo. Las líneas son descritas y engendradas, no por yuxtaposición de sus partes, sino por el movimiento continuo de puntos; las superficies por el movimiento de líneas; los sólidos por el movimiento de superficie; los ángulos por la rotación de sus lados; los tiempos por un flujo constante...

Inspirados en esta cita de Newton, quienes participan en el proyecto en el cual está inscrito el presente trabajo, han vislumbrado dos versiones escolares del Cálculo, versiones a las que han llamado: newtoniana y leibniziana. Por versión newtoniana se entiende aquella que se desarrolla tomando como práctica el predecir el valor de una magnitud que está cambiando respecto de otra, cuando se conoce la razón con la cual está cambiando o bien cuando se conoce como está relacionada con sus sucesivas razones de cambio; y por versión leibniziana, aquella que se desarrolla tomando como práctica el cuantificar una cualidad de un todo dividiéndolo en un número infinito de partes infinitamente pequeñas para las cuales se puede cuantificar la cualidad en cuestión.

En tal proceso de construcción se ubicará el quehacer de este trabajo, el cual persigue el siguiente objetivo: Contribuir al mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la integral de funciones de una variable, mediante el diseño, realización y evaluación de situaciones didácticas que permitan la emergencia y evolución de dicho concepto matemático.

2. Planteamiento del problema

Artigue (2003) comenta que la situación actual de la enseñanza del Cálculo se caracteriza por un sentimiento general de crisis que, aunque no sea percibido de la misma manera, sí parece trascender las diferencias culturales y que las dificultades en el aprendizaje no han cambiado de manera sustancial. Una breve descripción de esta situación la podemos encontrar en (Salinas y Alanís, 2009).

En particular, la enseñanza del Cálculo Integral está caracterizada, entre otras cosas, por: (1) el énfasis en una algoritmia desprovista de significados, Muñoz (2000); (2) la falta de afinidad con otras ciencias de las cuales el Cálculo es subsidiario, Martínez Torregrosa et. al. (2002); la insistencia en la enseñanza formalista, a sabiendas de las dificultades que trae consigo, Thompson y Silverman (2007) y Arcos (2004); y, el uso de la tecnología como recurso para salvar esas dificultades, Gordon y Gordon (2007).

Ante esta situación problemática, cabe preguntarse:

- ¿Qué problemas resultarían suficientes para la apropiación del proceso de integración?
- ¿Qué relaciones han de darse entre los problemas, los alumnos y el profesor a fin de que se favorezca dicha apropiación?
- ¿Cómo la tecnología puede hacer más efectivo el aprendizaje del proceso de integración?

La búsqueda de respuestas a estas preguntas será el motor de la presente investigación.

3. Marco Teórico

El presente trabajo es una investigación en Didáctica de las Matemáticas o Matemática Educativa como es llamada en México a esta disciplina científica.

En (Cantoral y Farfán, 2003), estos matemáticos educativos nos presentan su visión de cómo ha evolucionado la Matemática Educativa de acuerdo a como se ha ido ampliando la problemática bajo estudio. Muy elocuentes son los nombres que estos autores dan a las etapas por cuales ha pasado la Matemática Educativa: didáctica sin estudiantes, didáctica sin escuela, didáctica sin escenarios y didáctica en escenarios socioculturales.

En la etapa didáctica sin estudiantes se ubica cierta "sensualidad didáctica" para abordar la problemática: los matemáticos proponen maneras de presentar el contenido matemático con la idea de que la mejoría en el aprendizaje del estudiante sea consecuencia inmediata de una mejor presentación de los contenidos.

La didáctica sin escuela incluye un cierto acercamiento cognitivo a la problemática, donde las dificultades en el aprendizaje de los estudiantes son descritas y explicadas con base en marcos teóricos construidos para ello. Cabe aclarar que esta etapa toma en cuenta la mente del estudiante, pero no la sitúa en un aula escolar.

La etapa didáctica en la escuela pero sin escenarios socioculturales considera abiertamente la conveniencia de ir a la génesis del conocimiento matemático para indagar las condiciones en que tuvo lugar. Las consideraciones de tipo epistemológico intentan esclarecer las dificultades intrínsecas del conocimiento matemático para ser adquirido, y que pueden estar presentes en el aprendizaje de los estudiantes.

Por último, la etapa didáctica en escenarios socioculturales plantea las particularidades de la problemática de la enseñanza en la educación superior, donde la matemática escolar posee ese carácter instrumental de estar al servicio de otras disciplinas científicas y prácticas de referencia.

El objetivo del trabajo (Cantoral y Farfán, 2003) es ubicar el acercamiento teórico que ellos están elaborando: la Socioepistemología. Ese acercamiento, paradigma de investigación de la última etapa de esa línea del desarrollo de la Matemática Educativa, hace ver que no basta con estudiar los referentes didácticos, cognitivos y epistemológico de las condiciones que posibilitan o dificultan la construcción del conocimiento en el aula, sino que es menester otorgar un papel protagónico a la componente social. Cantoral dice que el conocimiento matemático tiene un origen y función social porque se asocia a prácticas humanas socialmente establecidas. La filiación entre la naturaleza del conocimiento y la actividad humana, mediante la cual y en razón de la cual se produce el conocimiento, es la tesis de la orientación socioepistemológica.

La investigación a realizar en el presente trabajo estará enmarcada en este acercamiento, cuyo énfasis reside en el interés de modelar el papel de la práctica social en la producción del conocimiento, a fin de diseñar situaciones didácticas que den sentido y significado al saber matemático escolar.

4. Metodología propuesta

El presente trabajo, al igual que otras investigaciones realizadas en el marco de la Socioepistemología, tomará a la Ingeniería Didáctica como su metodología de investigación.

En (Ferrari, 2001) se menciona que son cuatro las fases fundamentales en la elaboración de una Ingeniería Didáctica: (1) Análisis preliminares, (2) Diseño de la situación didáctica y su análisis *a priori*, (3) Experimentación y (4) Análisis *a posteriori*.

En la primera fase, establecidos los objetivos de la investigación, se determinan y analizan, desde una aproximación sistémica, todos los componentes del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos. En el presente trabajo, teniendo como marco la Socioepistemología, a diferencia de los que se realizan en el marco de la Teoría de Situaciones Didácticas, además de las componentes didáctica (el profesor), cognitiva (el alumno) y epistemológica (el saber matemático), se considerará la componente social (prácticas de referencia del saber a enseñar).

En la segunda fase se eligen las variables didácticas que se controlarán y se define la forma en que las mismas serán gestionadas. También, en esta fase, se establecen las hipótesis del trabajo, es decir, qué se espera de las interacciones de los alumnos con la situación diseñada.

En la tercera fase se procede a la “puesta en escena” de la situación diseñada, es decir, se implementa en condiciones estrictamente controladas por el investigador.

En la cuarta y última fase se lleva a cabo una revisión exhaustiva de los sucesos acaecidos durante la puesta en escena de la situación diseñada. Es en esta fase en la que se confrontan las hipótesis definidas en el análisis *a priori* con lo que realmente aconteció: en qué medida las expectativas fueron alcanzadas o cuánto se desvían los resultados de lo que se esperaba.

Para terminar esta sección, es importante resaltar el carácter interno de la validación de una investigación realizada en el seno de la Ingeniería Didáctica: se confronta dos partes de la misma... lo esperado y lo que se obtuvo en realidad. Esta característica la distingue de aquellas investigaciones de carácter cuantitativo para las cuales el éxito se mide en tanto que el grupo experimental logra mejores resultados que el grupo control, es decir, entre los resultados externos a la situación planteada en sí misma.

5. Avance

A la fecha se ha realizado el análisis preliminar de corte epistemológico. Aquí presentamos la parte de una síntesis de dicho análisis en la cual se resalta como emerge el concepto de integral en los trabajos de Leibniz y sus seguidores.

Como su nombre lo indica, el Cálculo consiste de un conjunto de reglas para calcular resultados y no de su justificación lógica (Stillwell, 2010). Veamos pues como llegó Leibniz a la integral como la regla para calcular, entre otras magnitudes, el área de una región plana.

Dicha regla no es más que una aplicación a la geometría del siguiente resultado numérico obtenido por Leibniz en su *De Arte Combinatoria* en 1666 (Child, 1920): dada la sucesión de números

$$a_0, a_1, a_2\ , a_3, \cdots, a_n$$

considere la sucesión

$$d_1, d_2 , d_3, \cdots , d_n$$

de diferencias, $d_i = a_i - a_{i-1}$, entonces

$$d_1 + d_2 + d_3 + \cdots + d_n = a_n - a_0$$

En el terreno de la aritmética, este resultado permitió a Leibniz demostrar resultados ya conocidos como el de que la suma de los n primeros números impares es igual a n^2, el cual resulta evidente ya que $i^2 - (i-1)^2 = 2i - 1$ para toda $i = 1, 2, 3, \cdots , n$.

Al extender ese resultado a sucesiones infinitas en las cuales los términos decrecen continuamente sin límite, Leibniz logró resolver problemas no resueltos hasta entonces, entre ellos el de calcular la suma (infinita) de los recíprocos de los números triangulares (Child, 1920, pp. 30–34).

Pero veamos cómo fue que Leibniz aplicó ese resultado a la geometría y finalmente llegar a lo que hoy conocemos como la integral de una función.

En un momento dado Leibniz consideró lo que él llamó triángulo característico, el cual se muestra gráficamente en la figura 1. La aplicación de este triángulo lo condujo al establecimiento de la noción de diferencial, en sus tres tipos primarios: diferencial de abscisa, diferencial de ordenada y diferencial de arco (las denominaciones iniciales, para estos diferenciales, fueron elementos de crecimiento de la abscisa, la ordenada y la curva, respectivamente).

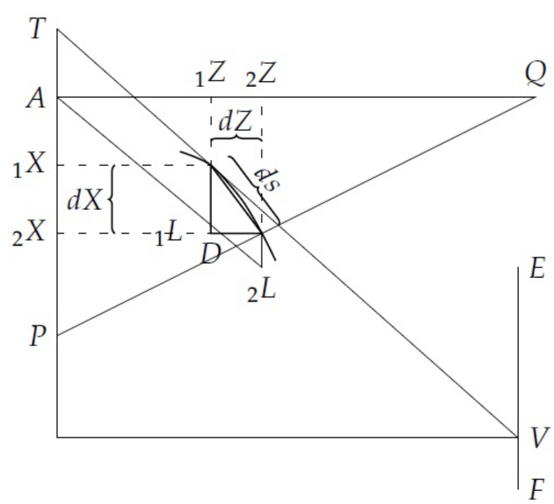

Figura 1. Triángulo característico.

Así surgidos, los diferenciales llevaron a Leibniz a concebir a las curvas como si fueran polígonos de un número infinito de lados infinitamente pequeños; asimismo, a extender esta noción a otras magnitudes, diferencial de área, por ejemplo (ver figura 2). Ahora bien, es evidente que una magnitud no es otra cosa que la suma de sus diferenciales, por ejemplo:

$$A = \int dA$$

Pero, ¿cómo se calcula esa suma? Es aquí donde Leibniz aplica su regla numérica al atribuirle a los diferenciales propiedades similares a las diferencias entre los números de las sucesiones infinitas en las cuales los términos decrecen continuamente sin límite. Sin embargo, dada la naturaleza geométrica de la nueva noción, Leibniz tuvo que crear y desarrollar reglas para operar con los diferenciales y sus sumas, inventando así lo que hoy llamamos Cálculo Diferencial e Integral (Child, 1920. Pp. 132–134).

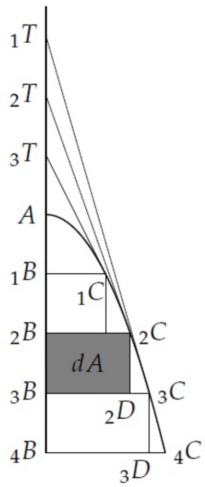

Figura 2. Diferencial de área

En un principio, a las dos ramas que había inventado, Leibniz las llamó *Calculus Differentialis* y *Calculus Sumatorius*. Johann Bernoulli le sugirió llamar a esta última *Calculus Integralis*, y, aunque Leibniz le insistió en que era mejor adoptar la terminología de suma y no la de integral, con el tiempo se popularizó y estableció esta última.

Terminamos esta sección comentando que Leibniz al principio usó el término *omn* en lugar de la “s alargada” para denotar la integral. Este comentario resulta interesante en cuanto a lo dicho en el párrafo anterior, ya que es *omn* una abreviatura de *omnia* que en latín significa “el todo” o “o lo completo”.

6. Reflexión Final

Aún y cuando no hemos terminado nuestro análisis epistemológico ni en profundidad ni en amplitud, con lo que presentamos en la sección anterior podemos vislumbrar una conceptualización de la integral distinta de la que comúnmente aparece en los cursos tradicionales de Cálculo. En tal conceptualización la integral encapsula a un proceso que emana de la idea de concebir a las magnitudes matemáticas (longitudes de arco, áreas volúmenes) como compuestas por un número infinito de partes infinitamente pequeñas.

Llevar, en estos momentos, esa conceptualización al aula, sería hacerlo con la sensualidad que caracteriza a las propuestas ubicadas en la etapa “didáctica sin estudiantes” de la que hablan Cantoral y Farfán (2003) en su evolución de la Matemática Educativa. Antes de hacerlo habrá que indagar sobre las dificultades que tendrán los estudiantes al enfrentar los problemas con los que se pretenderá lograr tal conceptualización.

En el marco de la socioepistemología, hay todavía un paso previo al anteriormente señalado: identificar las prácticas de referencia, aquellas que hacen que los estudiantes hagan lo que tiene que hacer durante su formación profesional.

La identificación de esas prácticas deberá ser, y lo será, el siguiente paso a realizar en la presente investigación; pues, como sería de esperarse, de ellas deberían emanar los problemas que permitirán, en el aula, el surgimiento del objeto matemático del cual queremos mejorar su enseñanza y aprendizaje: la integral de funciones de una variable.

7. Referencias

Alanís, J. A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño de un del discurso escolar del Cálculo*. Tesis Doctoral, CINVESTAV-IPN, México.

Arcos, J. (2003), Rigor o entendimiento, Un viejo dilema en la enseñanza de las matemáticas: el caso del Cálculo infinitesimal. *Tiempo de Educar. (U.A.E.M.), 5*(10), 77-110.

Artigue, M. (2003). *Reaction. Learning and teaching analysis: What can we learn from the past in order to think about the future?* En D. Coray, F. Furinghetti, H. Gispert, B. R. Hodgson & G. Schubring (Eds.). One hundred years of l'enseignement mathématique: moments of mathematics education in the twentieth century. Monograph No. 39 (pp. 211-223). Génova, Italia: L'Enseignement Mathématique.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics, 53*(3), 255 – 270.

Child, J. (1920). *The Early mathematical Manuscripts of Leibniz*. Londres: The Open Court Publishing Company.

Ferrari E. (2001), *Una visión socioepistemológica: estudio de la función coseno*. Tesis de Maestría. CINVESTAV-IPN, México.

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática de La Universidad de Granada. Obtenido en marzo, 2007: http://www.ugr.es/ jgodino/funciones-semióticas/monografiatfs.pdf

Gordon, S. P. & Gordon, F. S. (2007). Discovering the fundamental theorem of Calculus. *Mathematics Teacher, 100*(9), 597-604.

Kaput, J. J. (1994). *Democratizing Access to calculus: new routes to old roots*. En A. H. Shoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 77-156). Hove, UK.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 137 – 174.

Martínez, J., López-Gay, R., Gras, A., Torregrosa, G. (2002). La diferencial no es un incremento infinitesimal. Evolución del concepto de diferencial y su clarificación en la enseñanza de la física. *Enseñanza de las Ciencias, 20*(2), 271-283.

Muñoz G. Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(2), 131-170.

Salinas, P. y Alanís, J. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(3), 355-382.

Sánchez-Matamoros, G., García, M. y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Thompson, P. W. & Silverman, J. (2007). *The concept of accumulation in calculus*. En M. Carlson & Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics (pp.117-131). Washington, D.C.: Mathematical Association of America.