

## UNA PROPUESTA DIDÁCTICA PARA GRÁFICAR FUNCIONES POLINOMIALES DE PRIMER Y SEGUNDO GRADO EN EL NIVEL MEDIO SUPERIOR



Yanet Tejada Mayo, Gustavo Antero Tepec  
 yane\_may@hotmail.com, guti\_azul32@hotmail.com  
 Universidad Autónoma de Guerrero  
 Avance de Investigación  
 Graficación de funciones, Superior

### Resumen

En este trabajo de investigación se presenta una problemática con respecto al tema de graficación de funciones, y con base a dicha problemática se pretende elaborar una secuencia didáctica que ayude a atender algunas dificultades que tienen los estudiantes al graficar funciones polinomiales de primer y segundo grado.

**Palabras clave:** *Dificultades, graficación, funciones polinomiales*

## 1. Introducción

A continuación se hace referencia a investigaciones sobre el tema de graficación de funciones, las cuales se han clasificado en investigaciones de corte cognitivo y didáctico; así también se plantea el problema de investigación y el objetivo.

### 1.1 Investigación de orientación cognitiva

Patiño (2007) realizó un estudio acerca de comportamientos análogos entre funciones algebraicas y trigonométricas  $f(x) = x$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = \sin x$  y  $f(x) = \cos x$ , así también de sus transformaciones, considerando la expresión  $Y = Cf(ax + c) + D$ , el estudio se realizó con alumnos de nivel medio superior. Partió de la pregunta de investigación ¿la representación gráfica de transformaciones de funciones algebraicas y trigonométricas permite al estudiante relacionar éstas con comportamientos análogos?, con el propósito de presentar en los contextos algebraico, gráfico, visual y numérico el tema de transformaciones, por tal motivo analizó si la presentación de ambos tipos de funciones en diversos contextos permite al estudiante identificar comportamientos análogos y relacionar éstas transformaciones gráficas. Para lo anterior partió de la hipótesis de que aunque las funciones trigonométricas y algebraicas son de distinta naturaleza, existen comportamientos que se conservan en ambos tipos de funciones.

Para el logro de su objetivo Patiño (2007) diseñó un cuestionario, el cual se construyó con base en una revisión bibliográfica de artículos, tesis, planes y programas de estudio del nivel medio superior, analizando solamente los de la UAGRO, CBTIS, COBACH y CETÍS, así también los libros de texto de las estas instituciones educativas, dicho cuestionario se presenta en tres partes. En la primera consideran funciones algebraicas (lineales, cuadráticas, cúbicas) y trigonométricas (seno y coseno) representadas algebraicamente, con el propósito de que los estudiantes a partir de la expresión algebraica obtuvieran numéricamente un conjunto de pares ordenados a través del método de tabulación y posteriormente localizaran esos puntos en el plano cartesiano, en la segunda se presentan funciones de forma gráfica, con el fin de que los estudiantes visualicen y describan el comportamiento, cuando éstas son transformadas por parámetros, considerando

como funciones prototipo a  $f(x) = x$ ,  $f(x) = x^2$ ,  $f(x) = x^3$ ,  $f(x) = \sin x$  y  $f(x) = \cos x$ ; y en la tercer y última parte, se presentan algunas funciones algebraicas y trigonométricas con sus respectivas gráficas, donde se pretende que los estudiantes logren identificar visual y gráficamente que existe una relación cuando éstas son afectadas por un mismo parámetro, sabiendo que los dos tipos de funciones son de distinta naturaleza.

## 1.2 Investigaciones de orientación didáctica

En este apartado hemos clasificado las investigaciones en dos niveles, el básico (primaria y secundaria) y nivel medio superior.

### *Nivel Básico (Primaria y Secundaria)*

Flores (2005) analiza los libros de texto del nivel básico (primaria y secundaria) para identificar el uso que se le da a las gráficas. En este trabajo se identifican tres momentos de su uso.

En *el momento del síntoma del uso de la gráfica de la función*, curricularmente no es declarado el concepto de gráfica, sin embargo en el contenido de los libros aparecen que usan gráficas alusivas a lo que posteriormente se le llamará gráfica de una función. Este momento se presenta en todos los grados escolares de la educación primaria, mediante actividades de ubicación, comparación, trazos de trayectorias en ilustraciones, planos y cuadrículas.

En *el momento del uso de la gráfica de la función*, curricularmente se menciona la palabra gráfica, sin hacer alusión al concepto de función, sin embargo en los libros de textos aparecen actividades donde se incorpora en los textos la palabra gráfica, cuyos usos manifiestan formas como tablas, pictogramas, gráficas de barras, gráficas poligonales y de sectores con escalas en los ejes de referencia, así como también puntos en los planos con ejes cartesianos con funcionamientos para establecer sus coordenadas. Además, gráficas de curvas contiguas con funcionamientos para analizar la distribución de puntos. En este momento es donde la palabra gráfica sin ser un concepto de función curricularmente, es mencionada para hacer referencia a aquellas formas y funcionamientos expuestos anteriormente, desde el tercer grado de la primaria. Este momento se presenta también en los tres grados escolares de la educación secundaria, donde también curricularmente es declarado el concepto de función y su gráfica.

En *el momento del uso de la curva*, curricularmente está presente el concepto de función, manifestándose el comportamiento de las curvas de las funciones en tres direcciones: los comportamientos de cantidades discretas, los comportamientos geométricos y los comportamientos de cantidades continuas.

### *Nivel Medio Superior*

En este nivel también se hicieron dos clasificaciones, una acerca de los usos de las gráficas en las prácticas institucionales y la otra sobre propuestas para mejorar la enseñanza de la graficación en el ámbito escolar.

### *Usos de las gráficas en las prácticas institucionales*

Cen (2006), analizó los programas de estudios y libros de textos del Instituto Politécnico Nacional (IPN) con el fin de conocer el estatus epistemológico de las gráficas y su momento donde aparecen curricularmente, encontrando en dicha revisión cinco usos de las gráficas.

El **uso distribución de puntos** Se presenta mediante *formas* como tablas con valores previamente establecidos, gráficas y ecuaciones con *funcionamientos* como la ubicación de puntos, el desplazamiento en el plano cartesiano, la variación de los puntos para el trazado de curvas continuas o no. Se identifica en el primer semestre, con actividades en la que el estudiante tiene que ubicar puntos para trazar la curva de la función, ésta se hace por medio de una tabla con valores previamente establecidos, así mismo este uso se presenta en el segundo semestre; en el tercer semestre este uso se presenta con actividades en las cuales se tiene que calcular la distancia entre dos puntos así como la pendiente, el trazo de la curva de la función correspondiente cuya forma es por medio de una tabla con valores previamente establecidos, para ello se proporciona al estudiante una serie de ejemplos que le sirvan de modelo y posteriormente una serie de ejercicios, también este uso fue identificado en el cuarto semestre con actividades, donde se les pedía la ubicación de puntos por medio de la tabulación y localización de puntos críticos de una función para poder así apreciar el comportamiento local de la función.

El **uso comportamiento geométrico** se presenta a través de *funcionamientos* como la obtención de nuevas gráficas de funciones a partir de una ya conocida con *formas* tales como la traslación horizontal o vertical, el estiramiento o la reflexión de la gráfica. Este uso se identifica en el segundo semestre, mediante actividades planteadas a los estudiantes, en las cuales se les pide la construcción gráfica de funciones mediante transformaciones como son el estiramiento o reflexión, la traslación horizontal y/o vertical que sufre la gráfica de la función cuando se cambian sus parámetros, también este uso se identifica en el tercer semestre, en el cual se plantean actividades de la forma dada una figura geométrica o su condición que debe cumplir ciertos puntos de la misma, se les pide que determinen su ecuación correspondiente.

El **uso análisis de la curva** Se presenta con *funcionamientos* como el análisis del comportamiento el cual puede ser creciente o decreciente en los intervalos de la función para poder ubicar los puntos máximos y mínimos, los puntos de inflexión (si es que los hay) y la concavidad de la curva en ciertos intervalos. Las *formas* en que se presenta lo anterior es mediante una tabla de variación y los criterios de la primera y segunda derivada, este uso se identifica en el cuarto semestre.

El **uso cálculo de áreas y volumen** Se presenta en actividades tales como, cálculo del área bajo la curva por medio de la integración, y es identificado en el quinto semestre.

El **uso análisis de información** Se presenta en actividades como, analizar información en tablas, gráficas de barras, poligonales, histogramas y la curva normal, este uso se identifica en el sexto semestre.

#### *La enseñanza de la graficación en el ámbito escolar*

En la práctica educativa existen diversos problemas referentes a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, como es el caso del concepto de función, pues dicho concepto es uno de los más difíciles de aprender y de enseñar (Dubinsky y Harel, 1992 (citado en Farfán et al. (2001))). Muchos investigadores se han encargado de hacer propuestas respecto de este concepto en el

ámbito escolar, entre ellos cabe mencionar a Farfán et al. (2001), en su cuaderno didáctico *Un Acercamiento Gráfico a la Resolución de Desigualdades*, quienes hacen estudios para mejorar la enseñanza de la matemática en el nivel medio superior, trabajando principalmente con dos temas el de resolución de desigualdades y el uso de la calculadora dado que son temas que presentan dificultades al momento de enseñar, por lo que proponen estrategias para abordar esos temas, partiendo del contexto gráfico al contexto algebraico con el fin de apoyarse en argumentaciones o construcciones de gráficas, sin dejar de lado el contexto numérico (usando calculadora), dejando claro que la estrategia propuesta para la resolución de desigualdades es mediante el uso de un universo de formas gráficas.

A diferencia de Farfán et al. (2001) quienes hacen estudios acerca del comportamiento de funciones, en Cantoral y Montiel (2001) se realizan estudios acerca del método de operaciones (suma, multiplicación y división), de forma gráfica presentando una serie de diseños educativos y secuencias didácticas con las que se pretende, que tanto profesores como alumnos, profundicen su propio proceso de comprensión y entendimiento de los conceptos y procesos matemáticos relativos a funciones, dado que ellos creen que esta propuesta contribuirá a desarrollar entre los profesores sus propias prácticas de enseñanza utilizando las ideas de visualización.

A manera de conclusión de nuestros antecedentes, respecto del aspecto cognitivo observamos que el uso de representaciones gráficas ayudó a los estudiantes a identificar la relación entre las funciones algebraicas y trigonométricas cuando son transformadas, al considerar desplazamientos, así mismo, muestra también que el hecho de partir del contexto gráfico al contexto algebraico propicia en los estudiantes una mayor comprensión y claridad del tema. Otro resultado fue, que los estudiantes para graficar una función lineal la mayoría se apoyó en la tabulación, cuando se sabe que es suficiente con ubicar sólo dos puntos, por último, un resultado que llama mucho la atención es que algunos estudiantes mencionaron que durante su formación escolar no habían trabajado con graficación de funciones.

Respecto del aspecto didáctico se encontró que la graficación está presente desde la educación básica (primaria y secundaria), donde en la primaria se manifiesta con la reproducción y comparación de trayectorias, reproducción de figuras, la ubicación y desplazamiento, análisis de información y la distribución de puntos, mientras que en la secundaria se manifiesta con la ubicación y desplazamiento, análisis de información, distribución de puntos y la asociación curva-expresión algebraica.

Por otra parte la graficación en el nivel medio superior empieza por la ubicación de puntos en el plano cartesiano y que además se presenta por primera vez mediante la ubicación de puntos en el plano para realizar un bosquejo de la gráfica de una función, para dar lugar al comportamiento geométrico con el fin de identificar la relación existente entre una ecuación y su forma gráfica, posteriormente se presenta el análisis de la curva con el propósito de identificar las variaciones (crecimiento, decrecimiento, concavidades, máximos, mínimos y puntos de inflexión) que presenta la curva en intervalos definidos de ella y por último el cálculo de área y volumen. Estos cinco usos siguen una secuenciación del cálculo, sin embargo en el último semestre de bachillerato se identificó el uso del análisis de información el cual está separado de los demás usos.

También encontramos que por distintos medios se busca mejorar el proceso de enseñanza de la matemática en el nivel medio superior, particularmente el tema de funciones, trabajando principalmente con los contextos gráfico, algebraico y numérico.

En este trabajo de investigación, estamos interesados en atender el proceso de graficación de funciones polinomiales particularmente las de primer y segundo grado en el nivel medio superior. Esto debido a la experiencia como estudiante en la Licenciatura de Matemáticas, el tema de graficación de funciones, fue uno de los temas que me pareció complicado de aprender, al igual que mis compañeros, también durante mi práctica docente impartí clases en una Preparatoria, observé que la mayoría de mis alumnos presentaron dificultades al trabajar con el tema mencionado, con base en lo anterior se decidió trabajar con el tema de graficación de funciones polinomiales.

Las dificultades más comunes que presentan los estudiantes al momento de graficar son las siguientes:

- Dificultades relacionadas con el concepto de dominio de una función.
- Dificultades relacionadas con el concepto de contradominio de una función.
- Dificultades para distinguir entre variable independiente y dependiente.
- Dificultades relacionadas con los puntos de corte con los ejes.
- Dificultades con las asíntotas (verticales, horizontales y oblicuas).
- Dificultades relacionadas con los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Las investigaciones muestran el valor de mejorar la enseñanza de la graficación de funciones, con el fin de hacer notar la importancia que poseen los diferentes métodos de graficación.

De la literatura anterior y en particular de Patiño (2007) quien reporta, que algunos estudiantes que participaron en su investigación, mencionaron que durante su formación escolar no habían trabajado con graficación de funciones, lo cual fue más claro cuando se analizaron los resultados de las producciones gráficas de los estudiantes, por otro lado, reporta que algunos estudiantes al unir los puntos identificados en el plano cartesiano, lo realizaron de manera aleatoria, lo cual no permitió realizar gráficas coherente, en consecuencia no identifican comportamientos en las gráficas.

Con base en lo anterior el problema de investigación se centra en *atender dificultades que presentan algunos estudiantes del nivel medio superior al graficar funciones polinomiales de primer y segundo grado*. Por tal razón nuestro objetivo es *realizar una propuesta didáctica para la graficación de funciones polinómicas de los grados ya mencionados enfocada a estudiantes del nivel medio superior*, así como su validación.

La importancia de este trabajo de investigación radica en que pueda ser considerado posteriormente en algunos textos para darle tratamiento a la graficación de funciones polinomiales de primer y segundo grado.

## 2. Marco teórico

El marco teórico que sustentará esta investigación es la Teoría de Situaciones Didáctica, ya que el propósito es elaborar una propuesta didáctica, y dicha teoría nos proporcionara los elementos necesarios para su elaboración, y por otro lado, en la enseñanza del nivel medio superior, se

considera esta teoría tanto en la elaboración de planes y programas de estudio así como en la elaboración de los libros de texto.

La Teoría de Situaciones Didácticas fue desarrollada por Guy Brousseau y tuvo su origen en Francia desde los años 70's. Esta teoría fue concebida para el campo particular de la didáctica de la matemática, pero hoy en día se busca una extensión a otros dominios del conocimiento y en diferentes niveles de escolaridad Alanís et al., 2003.

Con esta teoría se estudian y se modelan fenómenos didácticos que ocurren cuando el profesor se propone enseñar cierto conocimiento a sus estudiantes, así también esta teoría permite diseñar y explorar un conjunto de secuencias de clases elaboradas por el profesor mediante las cuales se realiza un cierto proyecto de aprendizaje.

La Teoría de Situaciones Didácticas propone el estudio de las condiciones en las cuales se constituyen los conocimientos matemáticos; y se considera que el control de esas condiciones permitirá reproducir y buscar la forma apropiada para los procesos de adquisición escolar del conocimiento.

La presencia de un contexto escolar no es esencial en la definición de una situación didáctica; lo que sí es esencial es su carácter intencional, el haber sido construido con el propósito explícito que alguien aprenda algo.

Las *situaciones a-didácticas* se clasifican en cuatro situaciones las cuales son:

- ***Situación de acción*** es la interacción entre los alumnos y el medio físico. Los alumnos deben tomar las decisiones que hagan falta para organizar su actividad de resolución del problema planteado.
- ***Situación de formulación*** en esta el alumno intercambia información con uno o más estudiantes. Para esto deben de modificar el lenguaje que utilizan habitualmente, precisándose y adecuándolo a las informaciones que deben comunicar.
- ***Situación de validación*** el alumno debe de justificar la pertinencia y validez de la estrategia puesta en marcha para convencer a uno o más alumnos. Ya que no basta la comprobación empírica de que lo que dicen es cierto.
- ***Situación de institucionalización*** son los procesos que están bajo la responsabilidad del profesor, lo cual tiene como objeto cambiar el estatuto de los conocimientos.

### 3. Metodología

La metodología que se utilizara en esta investigación en la Ingeniería Didáctica, la cual surgió en la didáctica de las matemáticas francesas, a principios de los años ochenta, como una metodología para las realizaciones tecnológicas de los hallazgos de la teoría de Situaciones Didáctica y de la Transposición Didáctica, (De Faria, 2006).

Según Douady (1996) (citado en De Faria (2006)), una Ingeniería Didáctica es un conjunto de secuencias de clase diseñadas, organizadas y articuladas coherentemente por un profesor-ingeniero para lograr el aprendizaje de un cierto conocimiento matemático con un grupo de alumnos específicos.

La Ingeniería Didáctica como metodología de investigación se caracteriza por un lado como un esquema experimental basado en las realizaciones didácticas en la clase, es decir sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza y por el otro lado como el registro de los estudios de caso y cuya validación es interna, es decir basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*.

Son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en la elaboración de una Ingeniería Didáctica.

En el análisis preliminar se debe de tomar en cuenta el conocimiento matemático que se desarrolla en la escuela así también como su origen, esto denomina la componente epistemológica, las concepciones que tienen los alumnos propio de dicho conocimiento, es la llamada componente cognitiva; y por último la enseñanza tradicional y sus efectos, es decir, cómo se trata el contenido matemático en la escuela, esto es la componente didáctica.

En el diseño de la situación y su análisis *a priori*, que es el diseño de la situación didáctica y su análisis *a priori*, se eligen las variables didácticas que se ponen en juego en el diseño de la situación, dichas variables deben ser elegidas de tal manera que permitan controlar los comportamientos de los estudiantes hacia el conocimiento a tratar. En esta fase se establecen las hipótesis de trabajo, es decir qué se espera de la interacción de los alumnos con la situación diseñada, ya que en esta fase se elabora el diseño de la secuencia didáctica.

En la experimentación se lleva a cabo la aplicación de la situación a los estudiantes, tratando de respetar las selecciones y deliberaciones hechas en los análisis *a priori*. En esta etapa se da el contacto de investigador/profesor/observador con los estudiantes que son el objeto de estudio de la investigación. También se identifican las fases de una situación *a-didáctica*: la de acción, formulación, validación e institucionalización.

En el análisis *a posteriori* y validación se basa en las observaciones realizadas en la situación y las producciones obtenidas por los estudiantes durante la realización de dicha situación. Estas observaciones se completan con otros obtenidos mediante la utilización de metodologías externas, como lo son las entrevistas individuales o en equipos, cuestionario, etc., realizadas durante las sesiones.

En esta fase se confrontan las hipótesis formuladas en el análisis *a priori*, con los resultados obtenidos en el análisis *a posteriori* y es así como se verifica si las hipótesis realizadas anteriormente se cumplieron o no.

#### **4. A manera de conclusión de este trabajo**

Con base a los resultados de las investigaciones se elaborara una propuesta con la cual se espera que ayude a los estudiantes a mejorar las dificultades que tienen al momento de graficar funciones polinomiales de primer y segundo grado.

Para el diseño de la propuesta consideraremos en las actividades conceptos relacionados al tema de graficación de este tipo de funciones, como: plano coordenado, eje de las abscisas y ordenadas, cuadrante, par ordenado, ordenada al origen, dominio, conjunto imagen, etc. Así como también se considerara el trabajo con etas funciones en los contextos numérico, algebraico y gráfico.

## Reconocimiento

Asesoras: M.C. Catalina Navarro Sandoval, M.C. Erika Sugey Maldonado Mejía

## 5. Referencias

- Alanís, J., Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R., Garza, A., Rodríguez, R. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Editorial Trillas, 1ª reimpresión.
- Cantoral, R., Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. (1<sup>th</sup> ed.).
- Cen, C. (2006). *Los Funcionamientos y Formas de las Gráficas en los Libros de Textos: Una Práctica Institucional en el Bachillerato*.
- De Faria, E. (2006). Ingeniería Didáctica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 2.
- Farfán, R. Ma., Albert, A., Arrieta, J. (2001). *Un acercamiento Gráfico a la Resolución de Desigualdades*. (3<sup>th</sup> ed.).
- Farfán, R. Ma., Ferrari, M., Martínez, G. (2003). Teoría de Situaciones Didáctica. En *Desarrollo del pensamiento matemático*. (pp. 41-44). México: Editorial Trillas.
- Farfán, R. Ma., Ferrari, M., Martínez, G., (2003). Lenguaje algebraico y pensamiento funcional. En *Desarrollo del pensamiento matemático*. (pp. 89-143). México: Editorial Trillas.
- Flores, R. (2005). *El uso de las Gráficas en el Discurso Matemático Escolar. Un Estudio Socioepistemológico en el Nivel Básico a través de los Libros de Textos*. Tesis de Maestría no publicada. CINVESTAV-IPN. México.
- Patiño, D. (2007). *Un estudio de comportamientos análogos de funciones algebraicas y trigonométricas usando transformaciones gráficas*. Tesis de Licenciatura no publicada.