

EL ÁLGEBRA LINEAL EN EL CURRÍCULO Y EN LA FORMACIÓN INICIALⁱ

Vásquez, Patricia^a, Mena-Lorca, Arturo^b

Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
patricia.vasquez@pucv.cl, arturo.mena@pucv.cl

Resumen

Todo programa de formación inicial de profesores de matemática de enseñanza media tiene en su malla curricular cursos de álgebra lineal. Los Estándares orientadores para carreras de pedagogía de educación en matemáticas mediachilenos incluyen ese dominio entre los contenidos exigidos, y en el currículo escolar explícitamente se hace referencia a linealidad, sistemas de ecuaciones lineales y otros conceptos de álgebra lineal. En este trabajo reportamos que no se produce la conexión que se supone que los profesores en ejercicio harían entre los elementos curriculares de álgebra lineal estudiados en su formación inicial y las materias que son parte de su desempeño; y que más bien aquellos regresan a sus prácticas de estudiantes de secundaria, solo que con una competencia operatoria mayor.

Palabras clave: *Álgebra lineal, Espacio de trabajo matemático, formación de profesores.*

ANTECEDENTES

Este trabajo es la continuación de una investigación que pretende identificar los elementos que permiten conectar los conocimientos logrados en la formación inicial de profesores con los exigidos en el currículo escolar. Montoya, Mena-Lorca y Mena-Lorca (2014), usando el marco teórico del *Espacio de Trabajo Matemático* (Kuzniak, 2011), han dado cuenta de cómo profesores chilenos, cuando tratan temas de los ejes curriculares de geometría y estadística, al recurrir al álgebra como herramienta para trabajar en ellos, no regresan a esos dominios, abortando la construcción de conocimiento geométrico estadístico y equivocando así el rol del álgebra en la situación. Esa investigación clarifica lo que ocurre allí con lo que se suele llamar operatoria.

Para el caso de los sistemas de ecuaciones lineales y el álgebra lineal, resulta interesante estudiarlas operatorias de resolución correspondientes desde una perspectiva histórica. En efecto, el álgebra lineal, que se inicia propiamente en el siglo XIX, surgió de un proceso de abstracción de esas operatorias. El concepto formal de espacio vectorial aparece en 1931, como un caso de A -módulo (Dorier, 2000); los motivos que originaron su aparición fueron unificar, generalizar, simplificar y formalizar lo que hoy llamamos álgebra lineal (Cf. Robert, 1986a, 1986b).

La enseñanza del álgebra lineal ha sido estudiada por varios investigadores recurriendo a distintos marcos teóricos. (Vásquez, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2015) han mostrado que los profesores en ejercicio se dividen entre los que opinan que el álgebra lineal está presente en el currículo y los que piensan que no lo está. Esto nos llevó a precisar el tema y proponer, para los profesores, un camino de conexión de los elementos de álgebra lineal presentes en los currículos de instituciones formadoras y aquellos del currículo escolar, de manera que esa conexión pueda ocurrir en forma natural a partir de situaciones apropiadas.

Problemática del álgebra lineal

Es bien sabido que los conceptos abstractos de la teoría de espacios vectoriales –tales como subespacio, dependencia lineal, conjunto generador, suma de subespacios, aplicación lineal, ortogonalidad...– ofrecen mayor claridad sobre los procesos que se realizan comúnmente en álgebra

lineal, como por ejemplo, resolución de sistemas de ecuaciones. Sin embargo, para que esta mayor claridad se alcance, el estudiante de la asignatura debe poder conectar esos conceptos abstractos con los que previamente conoce. Por lo demás, es justamente esa conexión en su espacio de trabajo matemático personal –aquel ambiente que ese estudiante organiza para su propio estudio–, la que le permitirá desarrollar un espacio de trabajo matemático idóneo –es decir, aquel que utilizará para el aprendizaje de sus alumnos–. (Explicitamos estos conceptos más adelante).

En la práctica, por el contrario, y como suele ocurrir ante materias novedosas y poco accesibles, los estudiantes de álgebra lineal suelen encontrar el tema demasiado abstracto, formal y desconectado de los conceptos anteriormente estudiados, y procuran recurrir a un ambiente más familiar y entonces su estudio se torna puramente algorítmico (Robinet, 1986), lo que es una suerte de contradicción con el propósito de la materia.

Por lo demás, es habitual que el profesor de la asignatura la imparta de una manera puramente formal, hurgando escasamente en la visualización y no recurriendo, por ejemplo, a problemas de modelización –que le permitirían ofrecer un tratamiento más significativo y menos formal–. De tal manera, la materia permanece inaccesible y su transposición dista de tener los elementos que deberían incluirse en su constitución. Una hipótesis razonable es entonces que, cuando un alumno de pedagogía en Matemáticas retome el tema en su propia enseñanza, tenderá a repetir lo que aprendió cuando era estudiante secundario y no estará en condiciones de hacer las conexiones que la teoría de espacios vectoriales le ofrece.

Nos proponemos entonces dar ejemplos explícitos de las faltas de conexión antes señaladas y, además, mostrar cómo es que la multiplicidad de aspectos del álgebra lineal –algebraicos, geométricos, analíticos...– provee de medios para lograr la deseada interconexión.

Formación de un profesor de matemáticas en Chile

Actualmente, en Chile, las universidades que forman profesores de educación media determinan el currículo ad hoc de manera independiente. En el caso de Matemáticas, la formación depende sensiblemente de la facultad (de educación, de Matemáticas, de ciencias) en la cual se radica el programa; así, la relación entre los contenidos disciplinares de Matemáticas y los de carácter pedagógico varía de manera ostensible. Por otra parte, el Ministerio de Educación del país, MINEDUC, establece programas uniformes para todas las materias de las enseñanzas primaria y secundaria de la nación.

Desde hace al menos una década los informes venían evidenciando que la formación de profesores no atendía a los requerimientos del estado en cuanto a las competencias implícitas necesarias para impartir el currículo del sistema educacional chileno, en particular, en el área de Matemáticas (CF. por ejemplo OCDE, 2004).

Debido a lo anterior, el Estado está llevando a cabo lo que se conoce como Programa Inicia. Este programa considera Estándares de desempeño para la formación de profesores de todas las disciplinas, una Prueba a los egresados para cautelar esos estándares, e instrumentos de apoyo a la formación de profesores.

El caso del álgebra lineal

En los Estándares orientadores para egresados de carreras de Pedagogía en Educación Media (CPEIP, 2012), se explicitan, justamente, estándares y también indicadores ad hoc.

El Estándar 3 de esa publicación indica que el egresado de Pedagogía en Matemáticas de Enseñanza Media debe ser capaz de conducir el concepto de función, sus propiedades y sus representaciones, en particular en el caso de las funciones lineales. El indicador 4 manifiesta que se

debe conocer las dificultades que presentan los estudiantes en lo referente a las relaciones de proporcionalidad y ofrece estrategias para superarlas, para lo cual presenta dos ejemplos: el primero muestra una relación que no es de proporcionalidad “directa” y el segundo da a conocer una propiedad que verifican las funciones lineales y que los alumnos asumen verdadera cualquiera sea la función. Por otra parte, observamos en los programas del MINEDUC (2012) que las actividades para demostrar que los alumnos comprenden las proporciones directas e inversas, se centran en representar las funciones en una tabla, en el registro gráfico y desde allí observar sus propiedades. Las situaciones presentadas se relacionan con diversas situaciones en el plano de la proporcional directa e inversa pero las actividades de tipo geométrico se sugieren en el primer año de enseñanza media.

Ahora bien, en los programas de estudio de álgebra lineal, las funciones lineales se presentan en \mathbf{R}^n , y en general no se trata de manera particular estas funciones en el caso unidimensional. En cuanto a los sistemas de ecuaciones lineales las actividades se centran en plantear esos sistemas y resolverlos sin usar matrices; solo en el caso de dos incógnitas las ecuaciones lineales se deben representar gráficamente

Marco teórico y el paso metodológico

El marco teórico del Espacio de Trabajo Matemático, ETM, (Kutzniak 2011, Kuzniak, & Richard 2014) se concibe la reflexión matemática como el fruto de una interacción entre un individuo y los problemas de un dominio determinado en un ambiente organizado por y para el matemático (es decir, quien estudia matemáticas) mediante la articulación de dos planos: el epistemológico, vale decir, el de la disciplina, y el cognitivo. Cada plano está constituido por tres componentes o polos: el epistemológico por el representamen, el artefacto y el referencial; el plano cognitivo está conformado correspondientemente por la visualización, la construcción y la prueba. Tales componentes dan cuenta de los diversos aspectos del trabajo matemático (de acuerdo a distintos paradigmas, perceptibles en las diferentes etapas del aprendizaje de la matemática en el currículo): en el mismo orden de arriba, respectivamente los aspectos semiótico, instrumental (herramientas y objetos) y discursivos (más relacionados con la teoría). Para describir la articulación de los planos se considera un conjunto de génesis que permiten relacionarlos: semiótica, instrumental y discursiva. (Kutzniak 2011, Kuzniak, & Richard 2014).

Hay tres tipos de ETM, dependiendo de los diferentes roles: de *referencia*, definido según la relación con el saber, e idealmente sobre criterios matemáticos; *idóneo*, destinado a la enseñanza de este saber en una institución dada con una función definida, y *personal*, que configura un individuo, a partir de la formación que recibe y para su propia comprensión y aprendizaje, según se enfrenta el problema con los propios conocimientos matemáticos y capacidades cognitivas. (Kuzniak, 2004)

En este caso nos interesa el ETM idóneo del profesor, el cual, dependiendo de su formación y de la institución que lo acoge realizará transposiciones de los contenidos que quiere enseñar, y en sus propuestas didáctica propenderá a que sus alumnos activen las distintas génesis y realicen las respectivas circulaciones (Montoya et al., 2014).

Para realizar esta investigación, hemos procurado "triangular" tres instituciones que contribuyen a configurar el ETM idóneo de un profesor de matemáticas de enseñanza media en Chile: en primer lugar, el currículo nacional para estudiantes de enseñanza media actualmente en vigencia (MINEDUC, 2012); en segundo término, los estándares definidos por el MINEDUC para ese currículo; y, en tercer lugar, los programas de las asignaturas de álgebra lineal de una institución formadora de profesores del país.

En relación al aspecto metodológico en esta parte de la investigación, en un universo de más de cuarenta profesores en ejercicio provenientes de distintas universidades, probamos diferentes propuestas para lograr la conexión entre el álgebra lineal y los sistemas lineales. Los instrumentos

fueron aplicados en alumnos en formación, algunos de los cuales que ya cursaron la asignatura de álgebra lineal y otros que no lo han hecho.

El tema tratado fue la relación entre conceptos elementales de álgebra lineal y resolución de sistemas de ecuaciones de tres ecuaciones con dos incógnitas. Esquemáticamente, la experiencia procedió de la siguiente manera, de acuerdo a lo solicitado en cada una de sus partes:

- representar geoméricamente las 7 configuraciones que se pueden dar al tener tres rectas en el plano euclidiano;
- explicar la solución obtenida en un sistema explícito que corresponde a tres ecuaciones de rectas no paralelas y se pidió explicación respecto de la solución del sistema;
- dar un ejemplo algebraico de cada una de las siete configuraciones de la primera pregunta; construir una función que relacione el sistema de ecuaciones con el número de soluciones.

Las propuestas recurren al ETM personal de los profesores y gatillan fuertemente las génesis semiótica, instrumental y discursiva mediante tareas específicas en relación a sistemas de tres ecuaciones con dos incógnitas. De tal manera, se producen circulaciones entre los polos de los planos del ETM, las cuales garantizan que se obtienen las conexiones que se buscan.

CONCLUSIONES

De los resultados se visualiza que a un profesor en ejercicio le resultará muy difícil configurar un idóneo que recurra al referencial teórico proveniente de la formación inicial en que recibió formación en álgebra lineal. La génesis discursiva no se activa en forma separada, a pesar de tener las génesis instrumental y semiótica desarrolladas satisfactoriamente en el plano de descubrimiento, lo que imposibilita a los nuevos profesores apoyarse en su formación para realizar mejores propuestas didácticas en relación a los sistemas.

Pareciera que en este caso es especialmente difícil lograr activar la génesis discursiva, pero también se plantea la pregunta: Cuando hay debilidades en el idóneo ¿acaso se puede interpretar bien las soluciones en un sistema de ecuaciones cualquiera general en el plano?

La anterior pregunta se conecta con otras investigaciones, los profesores propenden a fomentar principalmente la génesis instrumental y las circulaciones se remiten al plano de descubrimiento (Montoya, Mena-Lorca y Mena-Lorca, 2014); ello se debe a que, en términos teóricos, el profesor no dispone de un referencial que permita que su perspectiva no se remita a la sola instrumentalización. En este caso, la situación está además en consonancia con lo que plantea Dorier (2000) en cuanto a que es necesario transitar por lo algebraico, lo geométrico y lo analítico, entendiendo que lo analítico proviene de la concepción de espacio vectorial en su plenitud.

Referencias

- CPEIP (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media. Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. Recuperado el 07 de junio de 2015 de <http://www.cpeip.cl/usuarios/cpeip/File/librostandaresvale/libromediafinal.pdf>*
- Dorier, J.- L. (2000). *Recherche en histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre linéaire – Perspectives théorique sur leurs interactions. Les cahiers du Laboratoire Leibniz, N° 12. Grenoble: Laboratoire Leibniz-IMAG.*
- Kuzniak, A. (2004). *Paradigmes et espaces de travail géométriques. Note pour l'habilitation à diriger des recherches. Paris: IREM de Paris 7.*
- Kuzniak, A. (2011). *L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 16, 9-24.*

- Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). *Espacios de Trabajo Matemático. Puntos de vista y perspectivas*. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17(4-I), 181-197.
- MINEDUC (2012). *Curriculum Nacional*. Recuperado el 07 de junio de 2015 de <http://www.curriculumnacional.cl/>
- Montoya, E., Mena-Lorca, A., y Mena-Lorca, J. (2014). *Circulaciones y génesis en el espacio de trabajo matemático*. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 17(4-I), 181-197.
- OCDE (2014). *Revisión de políticas educacionales. Chile*. París: Organización para la Cooperación y Desarrollo Económicos.
- Robert, A. (1986a). *Didactique de l'enseignement supérieur : une démarche en première année de DEUG, Actes de la IVème École d'Été de Didactique des Mathématiques*.
- Robert, A. (1986b). *Une démarche dans l'enseignement supérieur. Cahier de didactique des mathématiques 28, IREM de Paris VII*.
- Robinet, J. (1986) : *Esquisse d'une genèse des concepts d'algèbre linéaire. Cahier de Didactique des Mathématiques 29, IREM de Paris VII*.
- Vásquez, P., Mena-Lorca, A. & Mena-Lorca, J. (2015). *Construcción de un espacio de trabajo matemático idóneo en álgebra lineal: episteme versus currículo*. XVIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa

¹ Este trabajo ha sido financiado parcialmente a través del Proyecto de investigación del Fondo Nacional Desarrollo Científico y Tecnológico FONDECYT 1151376, Chile.