ANÁLISIS DE TRANSPOSICIÓN SOBRE LOS NÚMEROS RACIONALES CON EXPANSIÓN DECIMAL PERIÓDICA Y SEMIPERIÓDICA

Quezada N[a]., Salas C[b]., Villegas C[c].

IMA, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso;
nicolas.quezada.m@gmail.com, salascamila.93@gmail.com, camila_villegas91@hotmail.com

Resumen

Según el curriculum nacional, un alumno de primer año medio debe ser capaz de "justificar los pasos de un procedimiento para expresar como cuociente de enteros un número decimal periódico o semiperiódico". Para esto, una de las herramientas de autoaprendizaje son los textos escolares entregados por el ministerio, sin embargo, en alguno de éstos, se trata este contenido a través de un algoritmo inmediato, sin justificar previamente de donde proviene o el porqué de su naturaleza. Además, en ese contexto, existe una ambigüedad al llamarlos números decimales periódicos, otorgándoles una característica que no poseen. Es por esto que planteamos dos análisis de textos desde la Teoría Antropológica de lo didáctico, donde evaluamos la transposición de la praxeología presentada en ellos, y una posterior adecuación de la misma, donde el alumno será capaz de explicarse intuitivamente de donde proviene dicho algoritmo.

Palabras clave: *expansión decimal periódica y semiperiódica, transposición, praxeología, algoritmo.*

PRESENTACIÓN DE PROBLEMÁTICA

La problemática que aborda esta investigación es la utilización de un algoritmo, para representar los números con expansión decimal periódica y semiperiódica (EDP y EDS) en fracción, sin una previa justificación o explicación del mismo. Dentro del currículum nacional, este tema se encuentra en primero medio, donde se espera que el alumno logre "justificar matemáticamente que los decimales periódicos y semiperiódicos son números racionales" (MINEDUC, 2012). Sin embargo, algunos textos escolares limitan este contenido a la aplicación de una fórmula, lo que se evidencia en la Figura 1.

$$7,\overline{14} = \frac{714-7}{99} = \frac{707}{99}$$

En el numerador escribe el número sin coma ni periodo, réstale su parte entera, y en el denominador agrega tantos nueves como cifras tenga el periodo.

Figura 1: Algoritmo para representar en fracción números con expansión decimal periódica

Por otro lado, en la concepción de los números con EDP) y EDS, existen diversos obstáculos epistemológicos que van desde la forma en que se "nombran" hasta la interpretación de su orden, uno de los principales, es el hecho de generalizar el término "decimal" a todo número que tiene una coma o punto en su escritura, puesto que un número sea "decimal" significa que tiene una representación fraccionaria donde su denominador es una potencia de diez.

Pese a que estos son abusos de lenguaje que surgen en el aula, y que tanto los textos escolares y los planes y programas (propuestos por el MINEDUC) abalan, Socas y Centeno (1997) concuerdan en que son necesarios dentro de la enseñanza escolar, ya que nombrar cada objeto por su definición alargaría demasiado las frases; sin embargo, sólo podrán ser usados cuando el error sea conocido y consciente por el docente y los alumnos. La pregunta de investigación que deriva es "¿qué tan adecuada es la transposición de la praxeología asociada a representar a los números con EDP y EDS en fracción en los textos escolares analizados? ¿Qué modificaciones desde la TAD se pueden aplicar?".

Marco teórico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), creada por el investigador, didacta y matemático francés Yves Chevallard, en 1997, plantea que "toda actividad humana regularmente realizada puede describirse como un modelo único, que se resume aquí con la palabra praxeología" (Chevallard, 1999). Para esta investigación se aborda: la Organización Matemática (OM) de los números con expansión decimal periódico y semiperiódico. La estructura de una praxeología matemática puede ser simbolizada a partir de los elementos que la conforman, como: $[T/\bar{o}/\theta/\Theta]$. Cada uno de estos elementos representa: T las tareas; $\bar{o}$ las técnicas de T; θ la tecnología de $\bar{o}$ y Θ la teoría de θ. Definidas, según orden jerárquico:

En primer lugar se encuentran los tipos de tareas T; que tienen asociados tareas específicas t_n, donde también tendremos los géneros de tareas. En segundo lugar, las técnicas de tareas, $\bar{o}$, representan las formas o maneras en la que se realizan las tareas $t \in T$, las cuales no necesariamente serán de una naturaleza única, sin embargo en matemáticas "parece existir una tendencia a la algoritmización" (Chevallard, 1999). En tercer lugar, se encuentra la tecnología, θ, que constituye al discurso racional -o el *logos*- en el cual se explicita la técnica , $\bar{o}$, y cuya función es justificar, explicar y producir las técnicas asociadas a las tareas T. Por último, las teorías Θ son aquellas afirmaciones o axiomas (con previa justificación) que constituyen la base de la tecnología, asignándole veracidad a su justificación; por lo cual es un elemento que se encuentra más cerca del llamado *saber sabio*.

Finalmente, esta macro estructura está constituida por dos bloques inseparables: el primero denominado bloque práctico-técnico, $[T/\bar{o}]$, también identificado como *saber-hacer*, que involucra las técnicas asociadas a un tipo de tareas; y el bloque tecnológico-teórico $[\theta/\Theta]$, identificado como *saber*, el cual involucra la teoría y tecnologías asociadas a la praxeología en cuestión.

Para la presente investigación, la tarea constará de "representar números con expansión decimal periódica y semiperiódica en fracción", la cual se desarrollará mediante la técnica del algoritmo presentado anteriormente.

La utilización de esta teoría, se debe a que uno de los fenómenos didácticos que estudia es la llamada "transposición didáctica", la cual se define como todas las modificaciones adaptativas que se le realizan a la praxeología para ser transferida desde una institución a otra, de la mejor manera posible. Este resulta ser el objeto mismo de investigación, ya que es en la transposición (de la praxeología asociada a la tarea) del *saber sabio* al *saber a enseñar* donde se genera la debilitación del bloque tecnológico-teórico. La praxeología asociada corresponde a ser puntual, debido a que deriva de una única tarea.

Análisis de la transposición

Saber sabio

Representación en fracción de números con EDP

Sea $p \in \mathbb{R}$ un número con desarrollo decimal infinito y $z,\bar{d}$ su escritura con coma donde $z \in \mathbb{Z}$ y $d \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, entonces:

$$p = z + \frac{d}{10} + \frac{d}{10^2} + \cdots = z + \frac{d}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = z + \frac{d}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9z+d}{9}$$

En general, se puede demostrar usando inducción que si $p \in \mathbb{R}$ tiene expansión decimal periódica con escritura con coma $z,\overline{d_1 \dots d_n}$ entonces:

$$p = \frac{(10^n-1)z + 10^{n-1}d_1 + \cdots + 10d_{n-1} + d_n}{10^n - 1} = \frac{10^n z + 10^{n-1}d_1 + \cdots + 10d_{n-1} + d_n - z}{10^n - 1}$$

La segunda igualdad viene a justificar el algoritmo enseñado en la escolaridad, el cual tomará la función de técnica ō para la resolución de la tarea.

Representación en fracción de números con EDS

Sea $q \in \mathbb{R}$ un número con desarrollo decimal infinito y $z,d_1d_2\overline{d_3d_4}$ su escritura con coma donde $z \in \mathbb{Z}$ y $d_1,d_2,d_3,d_4 \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, entonces:

$$\begin{aligned}
q &= z + \frac{d_1}{10} + \frac{d_2}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \frac{d_3}{10^5} + \frac{d_4}{10^6} + \cdots \\
100q &= 100z + 10d_1 + d_2 + \frac{d_3}{10} + \frac{d_4}{10^2} + \frac{d_3}{10^3} + \frac{d_4}{10^4} + \cdots \\
10000q &= 10000z + 1000d_1 + 100d_2 + 10d_3 + d_4 + \frac{d_3}{10} + \frac{d_4}{10^2} + \cdots \\
9900q &= 9900z + 990d_1 + 99d_2 + 10d_3 + d_4
\end{aligned}$$

$$\therefore q = \frac{9900z + 990d_1 + 99d_2 + 10d_3 + d_4}{9900}$$

En general, se puede demostrar usando inducción que si $q \in \mathbb{R}$ tiene expansión decimal semiperiódica con escritura con coma $z,d_1 \dots d_i\overline{d_{i+1} \dots d_n}$ entonces:

$$\begin{aligned}
q &= \frac{(10^n - 10^i)z + (10^{n-1} - 10^{i-1})\,d_1 + \cdots + (10^{n-i} - 1)d_i + 10^{n-i-1}d_{i+1} + \cdots + 10d_{n-1} + d_n}{10^n - 10^i} \\
&= \frac{10^n z + 10^{n-1}d_1 + \cdots + 10d_{n-1} + d_n - (10^i z + 10^{i-1}d_1 + \cdots + d_i)}{10^n - 10^i}
\end{aligned}$$

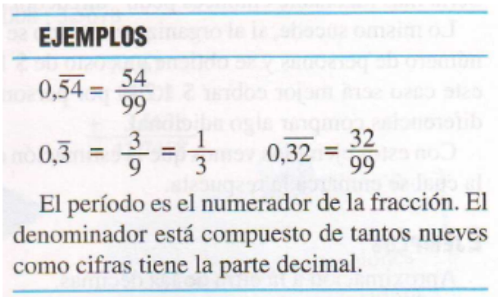
Análogamente, reordenando la primera igualdad se obtiene el algoritmo enseñado en la escolaridad, el cual en este caso, resulta de la “idea intuitiva” de la demostración de la suma geométrica. Esto vendría a ser la tecnología θ de la praxeología que está justificada por la serie geométrica.

Saber a enseñar

En este apartado se analizan dos textos escolares de los años 1997 y 2007 de primero medio y octavo básico respectivamente, los cuales son los representantes elegidos para el saber a enseñar. Como observación general, del primer y del segundo texto analizado, se llaman a los números con EDP y EDS “números decimales”, por otro lado, la tarea T es presentada claramente y no sufre de mayores adaptaciones, se definen previamente los elementos que se utilizarán en el desarrollo de toda la praxeología.

Por otro lado, dos elementos esenciales de la Organización, como la técnica y el bloque tecnológico-teórico, si sufren de diversas modificaciones en el proceso de *transposición*. Las modificaciones, son distintas para cada texto, ya que en el primero la tecnología se encuentra explícita para el alumno y cumple con su función de justificar y producir la técnica. Mientras que en el segundo texto, la técnica tiene un papel fundamental dentro de la praxeología, puesto que son los ejemplos de la aplicación de la técnica las que justifican el uso del algoritmo Todo lo anterior, induce a que la técnica adquiera un carácter *autotecnológico*.

En ambos textos, la técnica presentada es de naturaleza algorítmica, y sólo en el primero se observa una tecnología explícita, derivada del razonamiento de la suma geométrica presentada como parte del *saber sabio*. Luego, en este mismo texto, la técnica no tiene un alcance satisfactorio, ya que no es válida para casos donde la parte entera sea igual o mayor a uno (Figura 2).



EJEMPLOS

$0,\overline{54} = \frac{54}{99}$

$0,\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ $\quad 0,\overline{32} = \frac{32}{99}$

El período es el numerador de la fracción. El denominador está compuesto de tantos nueves como cifras tiene la parte decimal.

Figura 2: Extracto Texto 1 (1999)

Además de la ausencia de una tecnología explícita en el segundo texto, todo lo mencionado concluye en una debilitación del bloque tecnológico-teórico [θ, Θ] en la transposición, esto también se debe a la inhabilidad de una generalización matemática de la técnica en la escolaridad, por la complejidad de escritura que posee.

Adecuación de propuesta

Tomando en consideración las conclusiones que derivan de la transposición, se presenta una mejora a la propuesta de los textos escolares analizados. La tarea se presenta de forma explícita, definiendo todos sus componentes y evitando el error de lenguaje a través de un cuadro que informa que los números periódicos y semiperiódicos no son números decimales. (Figura 3)

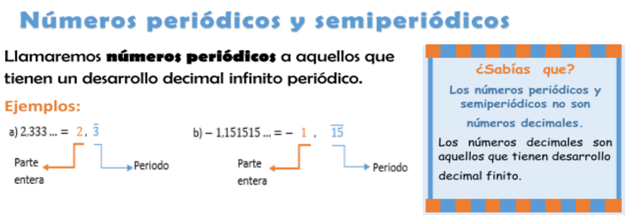


Figura 3: Extracto de propuesta (2015)

Luego se presenta, en dos casos apartados, la tecnología que deriva del razonamiento de la suma geométrica, que no sólo a través de su uso reiterativo justifica la técnica, sino además se convierte en un método fiable de realizar la tarea; lo que fortalece el bloque tecnológico-teórico. (Figura 4) Por último, con el objetivo de facilitar el proceso anteriormente mencionado, se presenta la técnica en lenguaje natural y a través de ejemplos. (Figura 4)

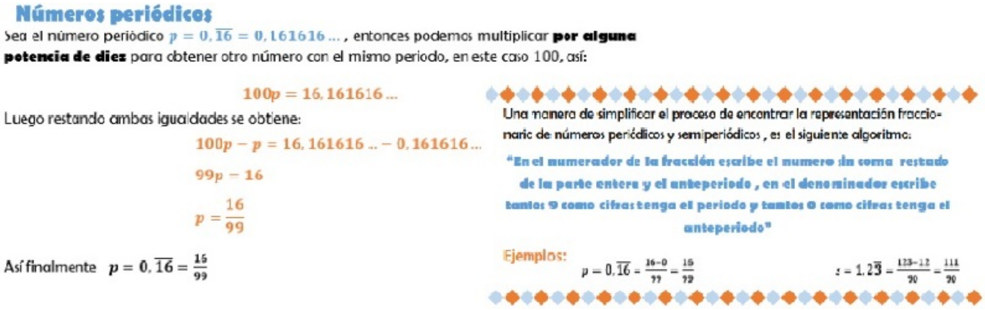


Figura 4: Extracto de propuesta (2015)

CONCLUSIONES

Si bien una de las críticas realizadas a los textos fue la falta de argumentación del algoritmo presentado, ésta no puede ser abordada completamente, ya que la generalización del algoritmo para cualquier número periódico o semiperiódico, carece de sentido al ser presentada en I_2, debido a la complejidad de escritura que posee. Por esto, creemos adecuado que sólo sea presentado y corroborado a través de ejemplos y ejercicios.

En consecuencia, en la propuesta, se presentaron dos técnicas distintas, donde una cumple la función de "producir" a la otra, por lo que, la primera justifica el algoritmo con el uso consciente y reiterativo de ésta, entregándoles una manera más lógica de realizar ésta tarea y luego presentando el algoritmo sólo como una manera de facilitar el proceso y quitándole su exclusividad.

Referencias

Centeno, J. (1997). Números decimales ¿Por qué? ¿Para qué? Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológico. (Ricardo Barroso, trad.). Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266.

Guíñez Abarzúa, F. (2007), Matemática aplicada Primero medio: Texto para el estudiante. Santiago de Chile: Editorial Zig- Zag.

Riera Lira, G. (1997), Matemática Octavo básico: Texto para el estudiante. Santiago de Chile: Editorial Mare Nostrum.