

MODELACIÓN Y USO DE GRÁFICAS EN EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL TRIGONOMÉTRICO



Beltrán Soria María del Pilar¹, Montiel Espinosa Gisela²
 pilysoria@gmail.com, gmontiel@ipn.mx

¹Preparatoria Iztapalapa 1, Instituto de Educación Media Superior del D.F.,

²CICATA, IPN

Avance de investigación

Medio Superior

Resumen

En este trabajo presentamos parte de una investigación en la cual se busca estudiar el desarrollo de un tipo particular de pensamiento matemático en los estudiantes del Instituto de Educación Media Superior del Distrito Federal (IEMS-DF); el pensamiento funcional trigonométrico.

Proponemos un tratamiento escolar de la función trigonométrica diferente al tradicional, enmarcado en un curso de Precálculo, en la Preparatoria Iztapalapa 1, del IEMS, mediante la implementación de una secuencia didáctica en la cual es necesario el uso de calculadoras Ti-NSpire y sensores de movimiento. Con estas herramientas se recolectaron los datos y se obtuvieron las gráficas correspondientes a las distancias entre el sensor y un péndulo simple, y a partir de las gráficas los estudiantes dan respuestas a varias preguntas cuya intencionalidad es que resignifiquen las propiedades de la función trigonométrica.

Palabras claves: *Pensamiento funcional trigonométrico, uso de gráficas.*

1. INTRODUCCIÓN

En el contexto escolar en el que se está desarrollando esta investigación, dentro del programa de la asignatura de matemáticas (IEMS, 2006), se busca que el estudiante perciba la matemática como una ciencia construida a través de los siglos, como algo más que conocimientos acumulados o aplicaciones prácticas, es decir, que el estudiante construya la matemática, que la descubra que invente y que discuta, que construya un método de análisis y razonamiento, que desarrolle su creatividad y explique sus resultados; además de presentar a la matemática no como una serie de reglas fórmulas y algoritmos que el estudiante deba aprender de memoria para luego aplicarlas en la resolución de problemas.

Reconocemos en la propuesta de Montiel y Buendía (en prensa) coincidencias con lo que se busca en el programa de matemáticas del IEMS en términos de:

- No se trabaja con fórmulas ni algoritmos.
- Se busca que los estudiantes desarrollen herramientas para resignificar propiedades de las funciones trigonométricas
- Se busca que los estudiantes descubran los elementos que conforman la funcionalidad trigonométrica y no que aprendan la función trigonométrica.
- Favorecer que el estudiante argumente sus resultados con palabras y bosquejos gráficos que representan el movimiento oscilatorio.

Se busca que la implementación de esta situación ayude a los estudiantes a lograr el desarrollo de pensamiento matemático en la parte del curso que corresponde específicamente a la función trigonométrica.

La secuencia didáctica retoma la situación problema que (Montiel y Buendía, en prensa) diseñan con base en una epistemología de prácticas producto de un conjunto de investigaciones en matemática educativa (Montiel y Buendía, 2012; Buendía y Montiel, 2009, 2011; Montiel, 2011; Buendía, 2006; 2011), que han desarrollado bajo el enfoque teórico de la Socioepistemología, siguiendo un esquema metodológico (Figura 1) ad hoc a la construcción colectiva del enfoque.



Figura 1. Esquema Metodológico para la investigación Socioepistemológica (Montiel y Buendía, 2012).

En este sentido, nuestro trabajo se sitúa, dentro del esquema, en el rediseño de la situación-problema con base en las consideraciones del escenario y las condiciones institucionales propias del IEMS; y se propone el estudio del papel que juegan la modelación y el uso de las gráficas en el desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico (PFT) del estudiante.

Presentamos en este documento un avance del estudio, poniendo énfasis en el papel que juega la herramienta tecnológica en el diseño de la secuencia y en el desarrollo del PFT del estudiante.

Nuestro estudio parte de una epistemología de prácticas sobre la construcción de la funcionalidad trigonométrica, por lo que analizaremos la interacción de nuestra unidad de análisis (Figura 2) desde un marco conceptual que articule la modelación, la graficación y el desarrollo de PFT (Figura 3).



Figura 2. Unidad de análisis (tomada de Montiel y Buendía, 2011)

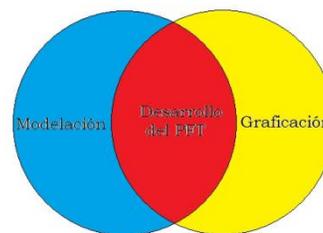


Figura 3. Marco conceptual

2. MARCO TEÓRICO

2.1 FUNCIONALIDAD TRIGONOMÉTRICA

Se trata de una propuesta teórica que describe los elementos de desarrollo del pensamiento matemático relacionado con la noción escolar de función trigonométrica, construida particularmente para las funciones seno y coseno; y establece que el estudiante construye dicha funcionalidad cuando:

- i. Estudia lo trigonométrico desde un *acercamiento variacional al movimiento oscilatorio*, en donde se reconozca que el comportamiento trigonométrico se caracteriza, y se distingue de otros comportamientos (algebraicos o trascendentes) por su variación y sus variaciones sucesivas, esto es, por como cambia y cómo cambian sus cambios.
- ii. Identifica una unidad mínima de análisis del comportamiento, que le permite predecir. Al trabajar con objetos periódicos, lo que favorece la predicción es una distinción entre el *se repite* y el *cómo se repite*.
- iii. Reconoce *lo acotado* del comportamiento en el análisis de los datos respecto del experimento.
- iv. Hace uso de la *unidad de medida* adecuada a la experiencia física y la reconoce, en la relación tiempo-distancia, en la representación gráfica de los datos obtenidos del experimento.

2.2 MODELACIÓN

Confrey y Maloney (2007) hacen una propuesta teórica sobre la modelación matemática en ambientes tecnológicos, reconociendo cuatro aproximaciones al uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas:

1. Enseñar conceptos y habilidades sin la tecnología y proporcionar estas herramientas tecnológicas como recursos después de enseñar los conceptos.
2. Introducir la tecnología para hacer visibles los patrones más rápidamente y para apoyar los conceptos matemáticos.
3. Enseñar nuevos contenidos en ambientes mejorados por la tecnología (estimación, verificación, métodos iterativos)
4. Centrarse en las aplicaciones, la solución de problemas, y el modelado, y el uso de la tecnología como una herramienta para su solución.

De las cuatro aproximaciones a la tecnología que identifican Confrey y Maloney (2007), situamos nuestro diseño en un punto intermedio entre:

- 2 Introducir la tecnología para hacer visibles los patrones más rápidamente y para apoyar los conceptos matemáticos.
- 3 Enseñar nuevos contenidos en ambientes mejorados por la tecnología (estimación, verificación, métodos iterativos)

Con base en la consideración de las matemáticas como una herramienta que permite a las personas darle sentido a su experiencia, adquirir juicios predictivos y ofrecer explicaciones,

además de contribuir a su habilidad de identificar, dirigir y resolver problemas que se presentan en su entorno cultural y cotidiano; los autores proponen la modelación matemática como:

... el proceso de encontrarse con una situación indeterminada, problematizarla y hacer uso de la investigación, el razonamiento y estructuras matemáticas para transformar la situación. La modelación produce un resultado –el modelo- que es una descripción o una representación de la experiencia de la persona, que en sí misma ha cambiado a través del proceso de modelación (p. 60).

Por el sentido amplio que dan tanto a lo que se reconoce como conocimiento matemático, como a lo que se reconoce como modelo consideramos que este enfoque se articula con la problematización del saber del que parte la socioepistemología; y en ese sentido nos permite estudiar la modelación en la construcción de la funcionalidad trigonométrica.

2.3 USO DE GRÁFICAS

Asumiremos el uso de los gráficos como una articulación de los usos *Elemento interactivo* y *Estructura matemática* que reportan Lacasta y Pascual (1998). Para estos autores, el uso como elemento interactivo se da cuando el gráfico funciona como medio de control de la comunicación y de determinación de otro objeto. Este funcionamiento tiene lugar cuando la respuesta a un problema se obtiene mediante la relación efectiva con el gráfico. Por otro lado, el uso como estructura matemática le da a los marcos gráfico y algebraico un uso equilibrado poniendo en juego nuevos saberes.

La articulación de ambos usos asumirá la graficación como una forma de construcción y tratamiento del universo de formas gráficas asociadas a las funciones, en donde se represente, transforme, genere, comunique, documente y refleje información gráfica, numérica, geométrica, algebraica y/o analítica. La visualización en actividad de graficación se entenderá entonces como la producción del que construye (el universo de formas gráficas y la información que de la actividad se desprenden) y el conjunto de argumentos orales y escritos que conforman la explicación y solución a una situación problema. Ejemplo de estas articulaciones las encontramos en las *operaciones gráficas* que proponen Cantoral y Montiel (2001).

Dentro de un curso de Precálculo en la Preparatoria Iztapalapa 1 del IEMS, se presentó el rediseño de la situación para lo que fue necesario hacer una planeación cuidadosa de todo el curso. Para que esta actividad fuera parte del curso se decidió tomar como base el libro *Matemáticas Preuniversitarias* de Salinas, Alanís, Pulido, Santos, Escobedo y Garza, (2007), en el cual se presentan situaciones que buscan la construcción de nuevos significados a ciertas nociones matemáticas y en el cual consideramos se integra coherentemente la situación problema, porque tiene una orientación al estudio del movimiento y cambio.

La implementación del rediseño se llevó a cabo primero con un grupo pequeño de estudiantes con quienes se tenían sesiones de tutoría extra-clase, que posteriormente apoyaron al grupo completo en la resolución de las actividades.

La implementación de las actividades de la situación problema en el curso de Matemáticas IV, tuvo la finalidad de desarrollar el pensamiento PFT de los estudiantes.

El desarrollo de la puesta en escena incluye varias fases, entre ellas:

1. Experimentación, exploración, adaptación a la tecnología. Fase donde los estudiantes observan con el uso de los sensores y calculadoras, las gráficas descritas ante determinados movimientos de ellos frente al sensor.
2. Toma de datos para la obtención de las gráficas a analizar. Fase donde los estudiantes recolectan las distancias que hay entre el sensor de movimiento, solicitando a los estudiantes que con ayuda de estos instrumentos generen diferentes gráficas, producto de variar las condiciones del experimento. Estas gráficas sirven para responder algunas preguntas divididas en 6 actividades que aparecen en la situación problema.
 - En la actividad 1 a partir de dos gráficas una en la que el objeto permanece en reposo y otra en la se representan movimientos repetitivos ya que el objeto se aleja, se acerca, se aleja, se acerca, etc., permite al estudiante identificar un fenómeno que se repite y muestra cómo se representa gráficamente.
 - En la actividad 2 se presenta una gráfica que muestra también repetición, se toman los datos durante 15 segundos pero ya que se colocó un objeto que genera fricción, origina que en esos 15 segundos se muestre en la gráfica que el objeto tendía a detenerse, las distancias que recorre van disminuyendo, gráficamente se presenta una forma diferente de movimientos que se repiten, comienza un análisis sobre intervalos de crecimiento.
 - En la actividad 3 se muestra un ejemplo en el que el objeto comienza su movimiento acercándose al sensor en comparación con una en la que el objeto inicia su movimiento alejándose al sensor y se hace la presentación de dos casos en una gráfica, en uno se muestran los resultados al realizar el experimento con una cuerda de 40 cm y el otro con una cuerda de 60 cm, lo que hace que el periodo cambie, es decir se ve modificado el tipo de repetición.
 - En la actividad 4 se presenta la relación entre la periodicidad y predecir, lo cual favorece la reconstrucción de significados acerca de la repetición de un movimiento, es decir de lo periódico, mediante dos gráficas, la primera muestra un movimiento que se repite de forma diferente que en la otra, por lo que es necesario tomar otras consideraciones a la hora de hacer una predicción.
 - En la actividad 5 se presenta la definición de velocidad media, se presenta una tabla con los datos obtenidos mediante el sensor durante 3 segundos con un total de 60 tomas, con la finalidad de que obtengan las velocidades instantáneas y lo representen en una gráfica en la que se muestran las distancias entre el sensor y la bola.
 - En la actividad 6 se continúa con el estudio de las variaciones del movimiento y una comparación entre los intervalos de crecimiento de las distancias y los signos de las velocidades.
3. Realizar predicciones y dar respuestas a las preguntas planteadas en cada actividad.

3. RECOLECCIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

Contamos con un total de 16 horas de registro en video y las hojas de trabajo de ambos grupos, el grupo tutorial y el completo, que se están analizando a la luz del marco conceptual. Es decir, del proceso de modelación y el uso de las gráficas para lograr la construcción de los cuatro elementos de la funcionalidad trigonométrica, considerando que la situación indeterminada es “el movimiento del péndulo” y su problematización se dará en la relación experimentación-análisis de las gráficas.

Primero comenzamos a analizar los datos por actividad, documentando el tipo de argumentos (expresiones verbales o escritas, movimientos y gestos, gráficos, entre otros) que se presentan para dar respuesta y explicación a éstas. Actualmente nos encontramos analizando los datos así organizados, sin embargo, en términos generales reconocemos que gracias a la experimentación los estudiantes identifican comportamientos gráficos, y eso les ayuda a construir significados.

Por ejemplo, en la actividad 4 se presentan dos gráficas, en la primera el péndulo continúa su movimiento sin detenerse, es como el péndulo de un reloj antiguo, y en la segunda la bola se detiene conforme transcurre el tiempo.

La experimentación permitió que los estudiantes se familiarizaran con estos tipos de movimiento, para obtener los datos del péndulo que se detiene, los estudiantes ocuparon un popote para que la fricción que éste ejercía detuviera el movimiento más rápido que sin él (Fotografía 1), como se puede observar en la respuesta 8 (Fotografía 2) que da una de las estudiantes en la actividad 2 de las hojas de trabajo, así que para la actividad 4 ya es un movimiento conocido para ellos; lo cual les permite a los estudiantes identificar una unidad mínima de análisis del comportamiento, que les permite predecir (Fotografías 3).



Fotografía 1. Experimentación

8. Además de la cantidad de datos ¿encuentras alguna diferencia entre las dos tomas?

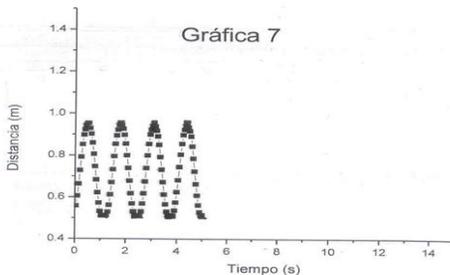
- la distancia que se aleja del sensor es menor, posiblemente esta toma sea la del popote porque se nota más la disminución de movimiento, se nota en ambos que comienzan a la misma distancia y en el mismo momento.

Fotografía 2 Respuesta en actividad 2

(a)

Actividad 4

En la siguiente gráfica se muestran las distancias entre el sensor y la bola, tomando los datos cada 0.025 segundos, durante 5 segundos.



Considera que la bola continúa con su movimiento, que se comporta como el péndulo de un reloj. Usa la gráfica 7 y responde las siguientes preguntas.

22. ¿Cuál sería la distancia a la que se encontraría el péndulo del sensor en el segundo 60? ¿Alejándose o acercándose al sensor?

Si en 5 segundos, supongo que si el mov. es constante entonces en múltiplos de 5 se acerca por lo tanto en 60 se acerca y está en .5j

(b)

23. ¿Usaste alguna parte de la gráfica para poder realizar la predicción? En caso positivo, señala dicha parte

Recuerdo el punto en el seg 5 que es en donde se puede observar que está exactamente allí

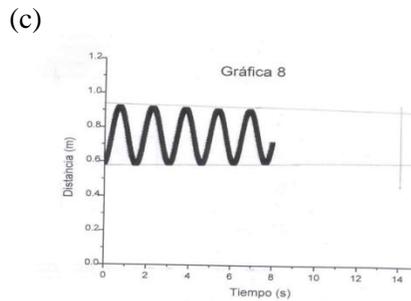
24. En la siguiente gráfica, la 8. ¿Cuál sería la distancia a la que estaría el péndulo del sensor en el segundo 20? 14

a .9 y se estaría alejando, eso que por los ciclos y su patrón de repetición en el seg 7 se aleja y viene en su múltiplo 14 también

25. Compara el método de predicción utilizado para la gráfica 7 y para la gráfica 8. ¿en qué difieren? ¿cómo se relaciona esta diferencia con el tipo de repetición que la gráfica presenta?

En la gráfica 7 se pueden sacar resultados exactos ya que el movimiento del péndulo es constante por lo tanto lo que se aleja y se acerca del sensor es lo mismo siempre, y para la 8 poníamos aproximadamente cuánto vale su alejar y acercar del péndulo cada seg pero sin embargo no es un dato seguro

Por que para la primera (7) la repetición es constante a distancias iguales, y para la (8) segunda, ninguna se repite a mismas distancias



Fotografías 3. Hojas de trabajo actividad 4.

La idea de aprendizaje como un cambio de conducta, deja de lado la idea de que el ser humano por naturaleza aprende en comunidad, por lo que para lograrlo es necesario que participe colectivamente. En cambio, desde nuestros enfoques escolar y teórico, estamos considerando que para que un estudiante logre aprender, se debe poner énfasis en participar, abandonar la enseñanza por objetos; centrar la atención en enseñanza basada en prácticas. En consecuencia, las acciones tanto del docente, como del estudiante deben orientarse a hacer matemáticas y no a aprenderlas, como si fueran preconstruidas.

Lograr el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes, es una tarea compleja, pues se requiere de su participación, abandonando la enseñanza de objetos; en este sentido hemos experimentado que la tecnología ayuda a esta transición a las prácticas. Sin embargo, se logra gracias al rediseño del discurso escolar fundamentado en elementos teóricos coherentes con el objetivo educativo que nos hemos planteado.

Centrar la actividad en el estudio de la variación permite que se generen abundantes reflexiones por parte de los estudiantes, y que se estructuren argumentaciones y justificaciones matemáticas de distintos tipos. Sin embargo, es evidente que es posible hacerlo en los tiempos escolares gracias al uso de la tecnología, pues permite el estudio del movimiento del péndulo con condiciones iniciales diversas y ello ayuda a la variedad de casos y a hacer visibles los patrones más rápidamente.

5. REFERENCIAS

- Buendía, G. (2006). Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(2) 227-251
- Buendía, G. (2011), El uso de las gráficas en la matemática escolar: una mirada desde la socioepistemología. *Premisa* 48, 42-50
- Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 1287-1296). México, D.F.: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C.
- Buendía, G. y Montiel, G. (2011) From History to Research in Mathematics Education: socio-epistemological elements for trigonometric function. Accepted for its publication in Katz, V. and Tzanakis, C. (Eds.) *Recent Developments on Introducing a Historical Dimension in Mathematics Education*. Mathematical Association of America.
- Cantoral, R. y Montiel, G. (2001). *Funciones: Visualización y Pensamiento Matemático*. México: Pearson Educación.

- Confrey, J. y Maloney, A. (2007). A theory of Mathematical modeling in technological settings. En Artigue, M., Hodgson, B. R. (Eds.), *Modelling and applications in Mathematics Education* (Vol. 10, pp. 57-67). U.S.: Springer.
- Lacasta, E. y Pascual, J.R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Editorial Síntesis S.A.
- Montiel, G. y Buendía, G. (2011). Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica. En L. Sosa, R. Rodríguez y E. Aparicio (Eds.) *Memoria de la XIV Escuela de Invierno en Matemática Educativa*, (pp.443-454). México: Red de Centros de investigación en Matemática Educativa, A.C.
- Montiel, G. y Buendía, G. (en prensa). Desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico. Resignificación de funciones para profesores de matemáticas. México: Ediciones Díaz de Santos.
- Instituto de Educación Media Superior, (2006), Programa de estudio de Matemáticas. (p.29). México, D.F.: IEMS.
- Santos, P., Alanís, J.A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J.C., & Garza, J.L. (2007). *Matemáticas Preuniversitarias: Significado de nociones y procedimientos*. México, D.F: Trillas.