

LA EXPLORACIÓN CON ESPEJOS Y LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA. SOBRE COMPETENCIAS DE LOS ALUMNOS Y SUS PROCESOS COGNITIVOS.

ESTUDIO EXPLORATORIO

Laura López Iborra, IES Camp de Morvedre
Gregoria Guillén Soler, Univesitat de València

RESUMEN

Este trabajo presenta un estudio exploratorio sobre la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos de describir, clasificar, definir y demostrar utilizando como contexto la exploración con espejos. El estudio toma como ámbito de estudio estudiantes de 2º y 3º de la Enseñanza Secundaria Obligatoria de la Comunitat Valenciana y como marco de referencia investigaciones llevadas a cabo en el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València y en el Instituto de Freudenthal. Se determina la actividad matemática que se puede desarrollar a partir de la exploración con espejos; realizamos un análisis teórico de investigaciones sobre las problemáticas planteadas; elaboramos un Modelo de enseñanza para la experimentación y para el examen de los datos obtenidos se interroga la actuación de los alumnos centrando la atención en las competencias que desarrollan y en sus procesos cognitivos.

ABSTRAC

This project presents an exploring study about the teaching and learning of mathematical processes like describing, sorting, defining and proving within the context of the exploration with mirrors. The 2nd and 3rd courses of compulsory secondary education of the Comunitat Valenciana students are the field to study. The Department of the Didactic of Mathematics in Valencia University and Freudenthal Institute are the references in this work. We delimit the mathematical activity that can be developed from the exploration with mirrors. We carry out a theoretical analysis of the research about the various problems created. We elaborate a teaching model to carry out the experiment. Finally, we analyse the students performance focusing on the competences they develop as well as on their cognitive processes.

López Iborra, L., Guillén Soler, G. (2009). La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Sobre Competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos. Estudio Exploratorio. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 273-283). Santander: SEIEM.

PRESENTACIÓN

Cabe destacar el lugar dominante que ocupan los contextos en el llamado enfoque realista para la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas escolares (Kindt, 1993). Los espejos constituyen un contexto potencialmente muy rico en cuanto a la actividad matemática que el alumno puede desarrollar. En Freudenthal (1967) y Guillén (2005b) puede constatarse que esta exploración posibilita familiarizarse con ciertas ideas básicas sobre las formas y figuras espaciales y su medición así como con el planteamiento y resolución de problemas; permite desarrollar y evaluar argumentaciones, evaluar y comparar modos de representación y de expresión,... Asimismo, en estos trabajos se hace notar cómo se pueden considerar diferentes representaciones físicas de espejos, calidoscopios, módulos, figuras planas y sólidos y utilizarlas en la enseñanza como soporte para el proceso de matematización¹. En primer lugar se parte de los modelos y/o representaciones (los fenómenos) para ir a las matemáticas al estudiar la descripción de los modelos a nivel local y en términos de simetrías que comparten; posteriormente se puede retomar el problema y organizar esos conocimientos desde una nueva perspectiva: se puede ir desde las matemáticas a los fenómenos usando éstos como campo de aplicaciones (Treffers, 1987).

Ahora bien, en las clases de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) apenas se utilizan calidoscopios en las clases. Nuestro estudio, orientado a la obtención del diploma de Estudios avanzados (DEA), pretende explorar las posibilidades que ofrecen éstos para crear nuevas situaciones o contextos que, cuando se lleva a cabo una determinada enseñanza, permiten desarrollar una rica actividad matemática fomentando a su vez la reinención en matemáticas. Como marco metodológico utilizamos el Programa de investigación de los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Fillooy, 1999). Tomando como referencia Guillén y Puig (2006), trabajo desarrollado considerando las relaciones de inscripción y dualidad entre los poliedros regulares como contexto, nos situamos en primer lugar en la docencia y usamos la idea de un MTL para la exploración de un Modelo de Enseñanza; posteriormente la utilizamos como marco para el desarrollo de una nueva investigación. Precisando, con el trabajo se pretende: i) analizar la “exploración con espejos” para determinar contenidos del Currículo de la ESO de la Comunitat Valenciana relativos a la geometría que pueden surgir a partir de la exploración con una determinada enseñanza; ii) elaborar un Modelo de Enseñanza (ME) que contemple este análisis de la situación y diferentes enfoques para tratar el estudio; iii) al desarrollar el ME con estudiantes de la ESO, iii.1) explorar la enseñanza/aprendizaje de contenidos geométricos (conceptos, procesos matemáticos, relaciones,...) implicados en el ME; iii.2) determinar elementos que tienen que ver con los efectos de la actuación del profesor y, iii.3) determinar elementos sobre la transferencia que hacen los estudiantes de procedimientos al resolver problemas; iv) organizar los datos obtenidos en el estudio experimental a través de los cuatro componentes de un MTL que supondrá el punto de partida para una nueva investigación. En este informe presentamos parte del estudio; nos centramos en los propósitos i), ii) y iii.1).

1 Siguiendo a Treffers (1987), *Matematizar* es entendido en un sentido muy amplio: formalizar, esquematizar, organizar, axiomatizar y transformar son verbos que denotan aspectos del proceso de matematización.

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA. MARCO DE REFERENCIA

El trabajo se sitúa en la línea de investigación del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de València que se centra en la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos a partir de la geometría de los sólidos (Guillén, 1991, 2004, 2005a, 2005b, 2006; Guillén y Puig, 2001, 2006) y toma como marco de referencia el trabajo de Freudenthal (1973) y otros estudios desarrollados en el Instituto que lleva su nombre (Treffers, 1987). Como ya indicamos en López y Guillén (2008), características de nuestro marco de referencia que heredamos de estos estudios son: 1) Concebimos la geometría como ciencia del espacio físico donde el niño se mueve y ligada a las experiencias espaciales del estudiante. 2) La enseñanza se concibe como actividad; tiene como objetivo aumentar el nivel de razonamiento del estudiante y lograr un avance en el proceso de matematización; esto es, está asociada a acciones como describir, clasificar, definir, formalizar, esquematizar, organizar, axiomatizar y transformar. Entre los contenidos geométricos curriculares distinguimos conceptos, procesos de describir, clasificar, particularizar, generalizar, ... y relaciones entre contenidos geométricos. 3) La enseñanza se concibe también como reinención; entendemos el *proceso de enseñanza/aprendizaje*, como un proceso donde además de centrar la atención en el aprendizaje de contenidos matemáticos y la resolución de problemas se centra la atención en el planteamiento de los mismos. 4) Consideramos los espejos como una Situación que permite que se pueda extender la actividad desde lo que llamamos *contextos inmediatos* hacia los *contextos derivados*. Éstos surgen al extender los primeros por una generalización del mundo soporte donde se plantea la actividad, al extender un problema y/o su resolución, por una cuestión planteada en el contexto de clase, ...5) Se da gran importancia a los procesos de aprendizaje del estudiante. Los análisis realizados en estos trabajos de los procesos matemáticos, los ME elaborados y los estudios sobre creencias y/o procesos cognitivos se ven reflejados también en nuestro estudio experimental: en la elaboración del ME y en la organización de los datos obtenidos en el estudio. Al hablar de marco de referencia cabe mencionar también el trabajo de Freudenthal (1967), punto de partida del estudio, y el trabajo reciente de Maanen (2008) pues, si bien se enmarca en álgebra, su estructuración ha sido referente claro en la organización de nuestro trabajo.

En relación con el marco metodológico, describimos brevemente lo que ya hemos indicado en trabajos previos. Según Filloy (1999), en cualquier proceso enseñanza/aprendizaje, los cuatro factores a tener presentes en cualquier proceso de enseñanza/aprendizaje son: el profesor, el alumno, el contenido y la comunicación. Éstos se ven reflejados en los cuatro componentes de todo MTL: Modelo de Competencia, Modelo de Enseñanza, Modelo Cognitivo y Modelo de Comunicación. Estos componentes teóricos están interrelacionados y se pueden diferenciar según los fenómenos que se toman en consideración al realizar el análisis. Características fundamentales de todo MTL son la recursibilidad, adaptabilidad y localidad. Para el trabajo que presentamos en esta comunicación, los trabajos mencionados proporcionan elementos para el MTL inicial que usamos para la elaboración del ME desarrollado en la experimentación.

Por último, cabe hacer referencia al Currículo Oficial de la ESO de la Comunitat Valenciana (Decreto 112/2007, de 20 de julio), referente también en nuestro estudio.

METODOLOGÍA

En el trabajo distinguimos dos etapas que a su vez se dividen en 3 fases de manera que la pregunta *¿Qué sabemos ya?* rige el trabajo del comienzo de cada fase.

Exploración del problema

En esta etapa se precisó el marco de referencia y se construyeron mapas que reflejan: i) el análisis realizado de los diferentes procesos matemáticos, ii) los contenidos propuestos en el currículum de la ESO en la Comunitat Valenciana para el bloque de geometría y iii) los contenidos de este currículum que pueden surgir a partir de la exploración con espejos al extender los contextos inmediatos a los derivados. Mediante “mapas específicos” como el del Anexo 1, se detallaron diferentes rutas o caminos del mapa general intentando reflejar en ellos, por un lado, cómo se deriva desde un contexto inmediato al derivado; por otro, el contexto desde el que surge la actividad (un espejo, dos, tres, cuatro) y/o los contenidos implicados (conceptos, procesos, ...). Estos mapas muestran el potencial de la exploración con espejos como situación- contexto.

Nuestra propia experimentación

Contexto para la experimentación. Los estudiantes.

Parte de la experimentación se llevó a cabo en mayo de 2007, desarrollando 11 sesiones de 45 minutos cada una con una clase de 20 estudiantes de 2º de la ESO. Otra parte se desarrolló en mayo de 2008 en 5 sesiones laboratorio de 2 horas cada una, con 5 estudiantes de 3º de la ESO. En la clase, los estudiantes se organizaron por parejas y en las sesiones como pareja y trío; estos estudiantes participaron voluntariamente y eran considerados como “buenos” estudiantes.

Sobre el Modelo de Enseñanza: ¿Qué sabemos ya?

Los trabajos utilizados como referentes del estudio proporcionaron una batería de actividades y tareas, el análisis de la actividad matemática que se podía despegar a partir de ellas, estilos y métodos para la enseñanza y/o para desarrollar experiencias en sesiones laboratorio, algunas conclusiones sobre ideas erróneas del alumnado, y sugerencias para la instrucción. En López y Guillén (2008) se apunta parte del ME que se elaboró a partir de estas observaciones y que se experimentó en el contexto de clase. Para las sesiones laboratorio se disponía en éste de una “biblioteca de recursos” a la que se podía acceder siempre que se deseara. Contenía todo el material que se requería para las actividades propuestas: espejos, material comercializado formado por polígonos y/o varillas (Polydron y Geomax); modelos de los sólidos; los calidoscopios octaédrico, tetraédrico y cúbico y diferentes módulos para cada uno; reglas, compases, escuadras, cartabones; fotocopias de las diapositivas proyectadas en la sesión 1; cartulinas sobre los teoremas de Pitágoras y del Coseno; cartulinas con los ejercicios resueltos en las sesiones anteriores.

En la primera sesión se realizaron exploraciones con un espejo o con varios con el material disponible. Se exploraron espejos invisibles de algunas formas, se

expresaron ideas de algunos conceptos geométricos: plano de simetría de un sólido, eje de simetría de una figura plana, poliedro regular,....

Se hizo notar que los calidoscopios que denominamos tetraédrico (Figura 2a), octaédrico (Figura 2b), cúbico (Figura 2c) están formados por las caras laterales de pirámides de espejos; se obtienen juntando el centro de cada uno de estos poliedros con los vértices de una cara. La Figura 1 lo muestra para el cubo. Llamamos módulo al "trozo" de poliedro que se tiene que colocar en un calidoscopio para que al reflejarse se reproduzca el poliedro.

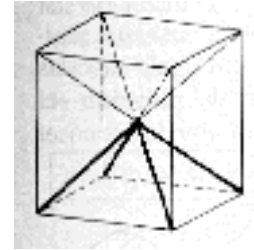


Figura 1

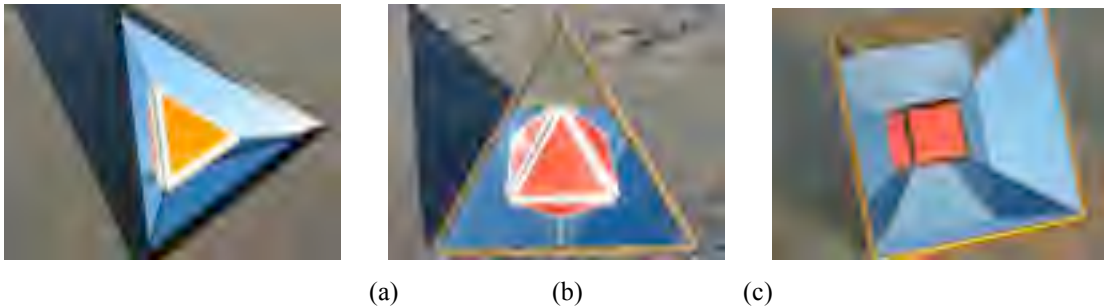


Figura 2

La actividad se centró en la observación y descripción de formas de las que había un soporte visual. Los fenómenos con soporte visual se organizaron con conceptos geométricos.

El Cuadro 1 muestra las actividades que se desarrollaron en las sesiones de laboratorio. Están enunciadas de manera general; se elaboraron siguiendo rutas del mapa diseñado para la experimentación a partir de los mapas construidos en la exploración del problema (véase el Anexo 1). Estas actividades se seleccionaron porque contemplan la exploración con un espejo, un libro de espejos y/o con diferentes calidoscopios y se pueden resolver con diferentes enfoques en los que los recursos se usan para la exploración y/o para la verificación.

Registro y análisis de los datos. el esquema de organización

Los datos se obtuvieron con las respuestas de los estudiantes a las actividades y a partir del análisis de las grabaciones de audio, para las sesiones de clase, y de video-audio, para las de laboratorio. Se utilizaron 3 videocámaras para ello.

Las sesiones se transcribieron, se dividieron en extractos, considerando éstos como fragmentos de texto del profesor y/o los estudiantes que reflejaran una idea que se consideraba de interés. Se numeraron éstos y a partir de ellos se hicieron observaciones. Cada observación se codificaba de manera que quedase reflejada con ella el problema y la pareja a la que correspondía y el número de extracto de la transcripción.

1. Se pide que se determine el número de caras, vértices y aristas de diferentes ejemplos de prismas y pirámides (familias infinitas) y de cada uno de los poliedros regulares. En la actividad se aportan figuras de los sólidos y una tabla para registrar los resultados. Todos los modelos se tienen a disposición en la biblioteca de recursos. Se plantean cuestiones que centran la atención en las caras y los vértices de los poliedros regulares dudosos. Se dirige la atención hacia los planos de simetría de cada uno de los poliedros regulares y se cuestionan los planos de simetría que comparten pares de ellos.
 2. Se pide que se determinen los ángulos interiores de diferentes polígonos regulares (hexágono, octágono y pentágono) de los que se conoce la medida del lado (2 cm).
 3. Se pide que se determinen las aristas laterales y los ángulos de las caras de una pirámide recta de base cuadrada, de 10 cm de altura y 5 cm de arista de la base (lado del cuadrado).
 4. Se pide que se construya un calidoscopio octaédrico.
 5. Para el calidoscopio octaédrico se pide que se construyan módulos que generen sólidos de determinadas dimensiones de diferentes familias (prisma recto hexagonal de base regular con 16 cm de altura y 3 cm para el lado del hexágono, tetraedro de arista 3 cm, cilindro de altura 16 cm y diámetro de la base 4 cm). Se cuestiona si es posible para alguno de ellos (la problemática se plantea para el tetraedro).
 6. Para el calidoscopio tetraédrico se pide que se construya el módulo que genera un tetraedro y para el calidoscopio cúbico el módulo que genera un cubo.
 7. Se plantean cuestiones sobre la posibilidad o no de construir módulos de sólidos de diferentes familias (prisma recto de base pentagonal, prisma recto de base cuadrangular, hipérrimide recta de base rectangular con altura de 8 cm y aristas de la base 2 y 8 cm, octaedro) para el calidoscopio octaédrico y/o cúbico. Después se plantean cuestiones como las siguientes, que centran la atención en que los espejos de los calidoscopios corresponden a planos de simetría de los sólidos que generan.
 - Al trabajar en el calidoscopio octaédrico el módulo para generar el cubo, ¿reconoces en los espejos de los calidoscopios algún plano de simetría del cubo? ¿Todos los espejos del calidoscopio corresponden a planos de simetría del cubo? ¿Qué planos de simetría del cubo corresponden a los espejos del calidoscopio octaédrico? ¿Si te fijas pues en el cubo y en los planos de simetría del cubo que creas convenientemente, puedes saber la forma que tiene el módulo que generará el cubo? ¿Qué vas a hacer ahora para responder si un calidoscopio octaédrico podrá generar un prisma hexagonal de base regular? ¿Cuántos planos de simetría distintos que tiene ese prisma? ¿Cómo determinas ahora la forma del módulo? ¿Se puede generar un cilindro? ¿Cuántos planos de simetría distintos que tiene el cilindro? ¿Se puede generar un prisma pentagonal? ¿Y un tetraedro? Explicar las respuestas.
 - Fíjate ahora en los espejos del calidoscopio cúbico ¿Se podrá construir un módulo de octaedro para un calidoscopio cúbico? ¿Y un prisma recto de base pentagonal regular? Explica tus respuestas.
- Se pide también que se construyan los módulos que se determinen como posibles.

Cuadro 1

Para el examen de los datos, siguiendo a Guillén y Puig (2006) y considerando el objetivo iii) del estudio, elaboramos una batería de preguntas que agrupamos en cuatro grandes grupos, según con respecto a qué se quería interrogar fundamentalmente la actuación de los alumnos. En relación con este informe las preguntas se refieren a las competencias de los alumnos y sus procesos cognitivos y las indicamos a continuación separadas a su vez en varios grupos.

1. Un espejo: Planos de simetría de algunos sólidos. ¿Qué espejos invisibles se determinan para los poliedros que se consideran en el estudio? ¿Para qué plano/s de simetría presenta más dificultades su identificación? ¿Cómo se determinan?
2. La exploración con el libro de espejos: Polígonos. ¿Cómo se realiza la descripción de los polígonos que se generan? ¿Relacionan los elementos del libro de espejos y de los polígonos regulares? ¿Extienden las relaciones encontradas a otros polígonos regulares? ¿Qué propiedades expresan de los polígonos implicados? ¿Cómo determinan sus ejes de simetría? ¿Relacionan el número de lados de los polígonos regulares con los ejes de simetría que poseen?
3. Caleidoscopios: Identificación y descripción de formas. ¿En la exploración con caleidoscopios se pueden identificar las formas que se generan? Considerando uno de

los objetos implicados (módulos, calidoscopio, sólido que se genera) ¿en qué nivel se puede realizar su descripción? ¿En qué casos presenta dificultades?

4. Exploración con Caleidoscopios: Relaciones entre los objetos implicados (módulos, calidoscopio, sólido que se genera). ¿Se puede conjeturar el nº de imágenes o poliedro que se generará a partir de un módulo dado en un calidoscopio? ¿Se pueden seleccionar los módulos que generan un poliedro con un calidoscopio? ¿Se puede seleccionar el calidoscopio que genera un poliedro a partir de un módulo? ¿Qué calidoscopios conllevan más dificultades para ello? ¿Qué poliedros y/o módulos conllevan más dificultades? ¿Qué relaciones entre los sólidos, calidoscopios, módulos, se expresan teniendo los espejos y los modelos físicos de sólidos y módulos como soporte? ¿Con qué dificultades se encuentran?

5. Exploración con Caleidoscopios: Relaciones entre los elementos de los objetos implicados. ¿Se pueden describir los elementos de los módulos en relación con los del poliedro que generan cuando se trabaja con material? ¿Y cuando no se trabaja con él? ¿Qué propiedades/relaciones se expresan? ¿Son pertinentes? ¿Cuáles presentan dificultades? ¿Cómo influye la representación que se usa? ¿Pueden hallar relaciones numéricas? ¿Con qué dificultades se encuentran?

6. Uso de resultados obtenidos en la exploración con Caleidoscopios. ¿Se utilizan propiedades de los sólidos y/o los módulos y/o relaciones que se han establecido al explorar con espejos? ¿Qué propiedades/relaciones? ¿Son pertinentes para la cuestión que se está considerando? ¿Cuáles de estas relaciones pertinentes no se usan al resolver la cuestión? ¿Qué relaciones se intentan usar que no son pertinentes?

7. Uso de conocimientos matemáticos. ¿Qué conocimientos matemáticos se requieren? ¿Cuáles se usan? ¿Cómo se usan? ¿Qué dificultades se tienen? ¿Qué ideas subyacentes se tienen que revisar?

8. Generalización y particularización. ¿Cómo se determinan el número de elementos de los poliedros considerados? ¿Se generaliza/particulariza al hallar los elementos de los prismas y pirámides? ¿Presenta dificultades la generalización/particularización? ¿Qué dificultades se detectan?

9. Prueba, verificación, evaluación. ¿Cómo se comprueban las afirmaciones que se hacen? ¿Se tiene necesidad de comprobar? ¿Se siente la necesidad de justificar? ¿Cómo se justifica? ¿Qué tipos de pruebas se dan? ¿Se evalúa la actividad que se va desarrollando? ¿Qué dificultades se detectan?

10. “Comunicar”. ¿Cómo “comunican” en sus propias producciones o al comunicarse con el profesor y/o sus compañeros? ¿Pueden usar representaciones de los calidoscopios, módulos y/o sólidos que se generan? ¿Qué tipo de representación usan para “comunicar”? ¿Se apoyan en las representaciones para argumentar y/o para decidir su método de resolución del problema? ¿De qué manera influye la representación que utilizan? ¿Pueden cambiar de representación?

11. El uso que se hace de los recursos. ¿Se recurre a la biblioteca de los recursos? ¿Qué elementos se seleccionan? ¿Con qué objetivo? ¿Se recurre al uso de los espejos y/o material cuando el problema se está resolviendo desde el nuevo enfoque? ¿Qué papel tienen los espejos en este caso? ¿Con qué dificultades se encuentran? ¿Se pueden resolver tareas análogas a las que se dispone en la biblioteca ya resueltas previamente? ¿Con qué dificultades se enfrentan?

12. La autonomía para el trabajo. ¿Pueden funcionar independientemente o recurren a opiniones de sus compañeros y/o del profesor? ¿Cómo repercuten las sugerencias de otros compañeros? ¿Con qué dificultades se enfrentan al resolver las tareas en grupo o individualmente?

Una vez anotadas las respuestas tal y como las enunciaban los alumnos, categorizamos las respuestas posibles a estas preguntas de una manera que nos permitiera la organización y análisis de los datos. Dada la brevedad de este informe sólo mostramos a continuación ejemplos de esa categorización, a propósito de las preguntas referidas al uso que se hace de resultados obtenidos en la exploración con calidoscopios (punto 6). Categorías de respuesta fueron: 6.1. Se usan (o se intenta) relaciones entre el número de espejos que forman el calidoscopio y el número de lados de las caras del poliedro generado. 6.2. Se usan (o se intenta) relaciones entre el número de imágenes que genera un calidoscopio y el número de caras del poliedro generado. 6.3. Se intenta usar una relación entre el número de imágenes que genera un calidoscopio y el número de espejos que lo forman. 6.4. Se usan (o se intenta) relaciones entre el número de imágenes que genera un calidoscopio (o una parte de ellas) y el número de partes en las que se divide el sólido generado (o una parte del mismo). 6.5. Se usan (o se intenta) relaciones entre el número de imágenes que genera un calidoscopio y el número de partes en las que se divide alguna cara del sólido generado. 6.6. Se determinan las características del módulo a través de los planos de simetría del sólido, sin recurrir al calidoscopio, y construido el módulo se verifica. 6.7. Se hacen reflexiones sobre cómo se han podido determinar las características de módulos que ya se han construido para un calidoscopio y se tienen en cuenta para construir otros. 6.8. Después de haber establecido las relaciones entre los elementos de los poliedros regulares duales se concluye que tienen los mismos planos de simetría y/o que se podrán generar con los mismos caleidoscopios.

Las dificultades encontradas se organizaron como: 6.9. Dificultades que provienen de la propia relación que se intenta usar. 6.10. Dificultades para determinar la/s cara/s del módulo que reproducen el sólido al aplicar la relación. 6.11. Dificultades para determinar los elementos de las caras del módulo que se solapan con los espejos. 6.12. Dificultades por trabajar con representaciones planas. 6.13. Dificultades porque se tienen que contemplar varias propiedades de los elementos implicados (calidoscopio, módulo y poliedro que se genera) y/o de sus elementos.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Con el estudio se ha observado una clara mejora en lo relativo a la descripción y clasificación de los objetos geométricos implicados en las tareas (tipos de sólidos y de polígonos). Destacamos las dificultades que ha conllevado identificar ángulos rectos para los módulos y/o sus elementos y las cuatro imágenes de la parte inferior del calidoscopio octaédrico. Cabe señalar también que si bien se ha mejorado notablemente la manera de expresarse en cuanto al uso que se hace del vocabulario, se siguen presentando grandes dificultades para expresar de manera fluida y precisa las simetrías de los poliedros regulares y/o las simetrías que comparten y para expresar relaciones entre los elementos de los objetos implicados en la actividad correspondiente. Se puede concluir lo que ya hemos apuntado en trabajos previos; para que los estudiantes puedan expresarse con fluidez en este tipo de descripción es necesario que el problema se trate en diferentes contextos, en tiempos diferentes y con diferentes enfoques.

Ha habido también una clara evolución en cuanto a los enfoques empleados para la determinación de los módulos. Desde la exploración se continúa seccionando el sólido en tantas partes iguales como imágenes generará el calidoscopio problema y finalmente se identifican en el sólido los planos de simetría del calidoscopio. Ello ha permitido determinar diferencias individuales en los participantes. Cabe subrayar cómo los datos numéricos, que inicialmente se consideraron como imprescindibles para implicarse en la actividad, dejan de ser importantes para ello. Asimismo, se va aumentando la seguridad para adaptar el patrón de trabajo a nuevas situaciones y los estudiantes se vuelven mucho más autónomos.

La biblioteca de recursos se ha mostrado muy adecuada para fomentar la autonomía en la formación. No sólo recurrían a ella para tomar material (que al principio lo hacían constantemente); también lo hacían para encontrar información que les permitiera seguir cuando estaban atascados en la resolución de una cuestión.

El estudio se ha mostrado especialmente interesante; al interés que inicialmente mostraron los estudiantes por los recursos siguió una gran motivación para resolver las actividades planteadas. Se sintieron además asombrados por "cuántas matemáticas hay con los espejos" y satisfechos por el trabajo matemático bien hecho, que a su vez tenía una traducción en la construcción de los módulos. Además, con el desarrollo de la fase experimental se aportan materiales que pueden orientar al profesor de la Enseñanza Secundaria Obligatoria para trabajar las matemáticas desde los contextos y se proporciona entornos de experimentación en el trabajo de aula. Estudios de este tipo pueden favorecer que se mejore la enseñanza/aprendizaje de la geometría.

BIBLIOGRAFÍA

- Freudenthal, H. (1967). *Las matemáticas en la vida cotidiana*. Madrid: Guadarrama.
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.
- Filloy, E., cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Generalitat Valenciana (2007). Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana, *DOGV*, 5562.
- Guillén, G. (1991). *Poliedros*. Matemáticas: cultura y aprendizaje. Madrid: Síntesis.
- Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad geométrica. *Educación Matemática*, 16(3), pp. 79-101.
- Guillén, G. (2005a). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática*, 17(2), pp. 117-152.
- Guillén, G. (2005b). La enseñanza de la geometría en la educación básica. Algunas investigaciones. Texto actualizado de la conferencia impartida en el departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México D.F. (Sin publicar).
- Guillén, G. (2006). Descubrir y matematizar a partir del mundo de las formas. En <http://linux.ajusco.upn.mx/~transpatricio/gregoria/GregoriaWebSite/>. Web

- elaborada en el marco del Proyecto de investigación Figueras, O.; Buenrostro, A.; García, F.; López, G., Sáiz, M. (2001-2006). *Procesos de transferencia de resultados de investigación al aula: el caso del bajo rendimiento escolar en matemática*. Co-financiado por el Colegio Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt), con clave G37301-S.
- Guillén, G., Puig, L. (2001). Diferentes enfoques para el estudio de algunas relaciones de inscripción y dualidad en el mundo de los poliedros regulares. En Gil, F.; Godino, J.D.; Moreno, M.F., Socas, M. (Eds) (2001). *Actas del V Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, pp. 183-188. Almería.
- Guillén, G., Puig, L. (2006). Construcción de un modelo de enseñanza de procesos matemáticos en el contexto del estudio de las relaciones de inscripción y de dualidad entre poliedros. *Educación Matemática*, 18 (3), pp. 65-102.
- Kindt, M. (1993). Enfoque realista de la Educación matemática. En Salar, A.; Alayo, F.; Kindt, M., Puig, L. (1993). *Aspectos didácticos de Matemáticas*, 4. Zaragoza: ICE Universidad de Zaragoza, pp. 67-91.
- López, L., Guillén, G. (2008). La exploración con espejos y la enseñanza de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Diseño de un proyecto de investigación. En Blanco, L.J.; Camacho, M.; Gómez, B., Luengo, R. (Eds) (2009). *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Badajoz.
- Maanen, J. (2008). Professional development of teacher educators, the ELWIER initiative. *IX International Congress on Mathematical Education (ICME)*. Monterrey.
- Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction - the Wiskobas Project)*. Dordrecht: D. Reidel.

ANEXO 1

