FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE ESTUDIANTES DE BACHILLERATO TECNOLÓGICO: ANTECEDENTES A LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO DIFERENCIAL

Héctor Santiago Chávez Rivera, Ignacio Garnica y Dovala,
Ana María Ojeda Salazar
chavez_santiago@yahoo.com.mx; igarnica@cinvestav.mx;
amojeda@cinvestav.mx
Cinvestav-IPN
Avance de investigación
Medio Superior

Resumen
Interinstitucionalmente se realizan investigaciones sobre la comprensión de los fundamentos matemáticos de los cursos de matemáticas del bachillerato tecnológico. A 31 estudiantes de quinto semestre se les aplicó un cuestionario al iniciar un curso de Cálculo Diferencial. El instrumento se refirió a fundamentos para recibir la enseñanza de la derivada, como identificar y operar propiedades de los reales, expresiones gráficas de funciones, tangentes, aproximación a límites y notaciones simbólicas. Resultó un desempeño deficiente en esos fundamentos, que condiciona a la enseñanza de la derivada tan sólo al logro de una operatividad de algoritmos, lejano del objetivo del cálculo diferencial de precisar la variación de una función cuando varía la variable independiente.

Palabras claves: *Funciones, tendencia, porcentaje, comprensión, bachillerato.*

1. INTRODUCCIÓN

Esta investigación, de carácter cualitativo, se realizó en el marco de un acuerdo académico interinstitucional, que promueve la investigación y la indagación en todas las unidades de aprendizaje de matemáticas del bachillerato tecnológico (SEMS-SEP, 2008; www.profordems.cfie.ipn.mx/profordems3ra/modulos/mod1/pdf/modulo1/Sistema_Nacional_Bachillerato.pdf).
Mientras la indagación se ha centrado en las nociones previas, de los estudiantes, requeridas por la enseñanza de un tema particular, la investigación se ha interesado en la comprensión de los estudiantes de los fundamentos que subyacen a ese tema. En el caso de este informe, de investigación, nos referiremos al conocimiento adquirido del estudiante y su aplicación de los fundamentos matemáticos a planteamientos y procesos propios del Cálculo Diferencial, así como a su uso de notaciones gráficas, simbólicas y escritas.

2. MARCO DE REFERENCIA

Para la unidad de aprendizaje Cálculo Diferencial es necesario que el estudiante consolide una red conceptual referida a todas las unidades de aprendizaje antecedentes: de Álgebra, de geometría y trigonometría y de geometría analítica.

Sin embargo, otros informes concernientes al mismo proyecto han señalado que el conocimiento previo de los estudiantes requerido por la enseñanza es insuficiente al inicio de cada unidad de aprendizaje. Para la unidad de "Geometría y Trigonometría", Martínez, Mendoza, Garnica, Chávez y Ojeda (2012b) señalan las dificultades del estudiante para tratar los problemas geométricos, su limitación del aprendizaje conceptual por la enseñanza centrada sólo en procedimientos algorítmicos, su interpretación de los números irracionales únicamente como expresiones decimales. Para la unidad de “Geometría Analítica”, Mendoza, Ojeda y Chávez (2012) describen las dificultades de los estudiantes para tratar la línea recta como lugar geométrico en el plano cartesiano, mientras Ojeda, Chávez y Mendoza (2012) revelaron deficiencias en la identificación y cálculo de una pendiente, de expresión verbal, gráfica y simbólica de lugares geométricos simples, la confusión entre segmento de recta y recta, el desconocimiento de procedimientos geométricos elementales, de operatividad algebraica y falta de identificación de términos de expresiones simbólicas. Para la unidad de “Álgebra”, Martínez y Garnica (2012a) advierten sobre aprendizajes deficientes de los estudiantes ante los requerimientos para el logro de los resultados propuestos en el programa de la unidad, desconocimiento del sentido de magnitud geométrica, de formas de comparación de segmentos y de su relación con el número irracional y sus representaciones.

Una de las preguntas que se planteó Orton (1983) acerca de la comprensión de los estudiantes de edades de bachillerato, de la diferenciación, se refiere a qué parte del acercamiento al precálculo debería tratarse para que adquieran los conceptos del cálculo (diferencial e integral) y sugiere que una primera aproximación a la derivada sea “informal”, basada en gran parte en las exploraciones numéricas y gráficas, con el propósito de comprender con fundamentos a la matemática.

3. METODO

En la investigación, de orden cualitativo, participaron 31 estudiantes de un grupo de cuarto semestre de bachillerato tecnológico. Se le aplicó un cuestionario al inicio del curso de Cálculo Diferencial y, una vez avanzado el curso, se realizó una entrevista semiestructurada a un estudiante. En el caso del cuestionario los datos se registraron con la escritura en las hojas que presentaron los reactivos y las indicaciones impresas. La entrevista se efectuó de acuerdo a un guión, hojas de control y se le videograbó.

3.1. EL CUESTIONARIO

Centrado en los fundamentos para un primer acercamiento al Cálculo Diferencial, el cuestionario, planteó preguntas abiertas referentes a cuatro características (véase la Tabla 1), y se aplicó en dos partes debido a su extensión. La primera parte presentó nueve reactivos sobre intervalos, orden en los números reales y valor absoluto, propiedades algebraicas, promedio, polinomios, razones equivalentes y de porcentaje. La segunda parte incluyó cuatro reactivos sobre operatividades algebraicas y aritméticas aplicadas a procesos de optimización, así como al tratamiento tabular y gráfico de una función para identificar su comportamiento.

Tabla 1. Caracterización del cuestionario.

Característica	Objetivo	Contenido
Expresión gráfica, escrita y simbólica. Reactivos 1, 2 y 6.	Expresar intervalos en tres formas equivalentes, simbólicamente al polinomio de grado *n* y, también en lengua escrita, orden y valor absoluto.	Notación, desigualdad, gráfica y nombre de intervalos. Orden y valor absoluto. Polinomios.
Operatividad e identificación de propiedades. Reactivos 3, 4, 7 y 5.	Operar propiedades de los reales: de exponentes enteros, de racionales, del inverso multiplicativo, de la factorización. Identificar propiedades de los exponentes racionales.	Propiedades de exponentes enteros, promedio, propiedades de racionales, inverso multiplicativo, factorización. Propiedades de exponentes racionales tanto algebraicas como numéricas.

Aproximación y comportamiento de la gráfica. Reactivos 11, 13 y 12.	Aproximar a asíntotas y denotar límites puntuales y laterales. Relacionar (i) signos de pendientes y monotonía; (ii) pendientes cero y máximos y mínimos; (iii) simetría de la gráfica y eje vertical; (iv) raíces en el par ordenado.	Información gráfica y tabular: números enteros, racionales y decimales, asíntotas verticales y horizontales. Información gráfica: tangentes, pendiente y su signo, raíces de la función, terminología y simetría.
Aplicación. Reactivo 8, 9 y 10.	Aplicar procedimientos, operaciones y propiedades aritméticas básicas.	Razones equivalentes, numéricas y simbólicas, porcentaje, gráficas, volumen y plano cartesiano.

3.2. LA ENTREVISTA

El objetivo de la entrevista fue informar acerca de contestaciones particulares al cuestionario. Se refirió básicamente a los procesos al límite, al problema de optimización, a las tendencias (límites) laterales, al promedio, a la notación y evaluación de funciones, a la notación de intervalo y a la de límite. La sesión, de dos horas de duración, se videograbó; todo lo que realizó el entrevistado se asentó en hojas de control para su análisis.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS DEL CUESTIONARIO

El cuestionario se aplicó en los primeros cuatro días de clase. La Tabla 2 resume la cantidad de respuestas proporcionadas al cuestionario, señalando sólo si cada reactivo tuvo respuesta o no.

Tabla 2. Cantidad de respuestas dadas a cada reactivo de las dos partes del cuestionario.

Primera parte	R1	R2	R3	R4	R5	R6	R7	R8	R9
	29	24	11	7	30	6	12	31	24
	94%	77%	35%	23%	97%	19%	39%	100%	77%

Segunda parte	R10					R11			
	a	b	c	d	e	a	b	c	d
	30	25	20	6	9	21	18	12	9
	97%	81%	65%	19%	29%	68%	58%	39%	29%

Segunda parte	R12						R13					
	a	b	c	d	e	f	a	b	c	d	e	f
	16	14	20	16	23	12	19	12	16	12	14	14
	52%	45%	65%	52%	74%	39%	61%	39%	52%	39%	45%	45%

Los reactivos R6, R4, R3 y R7 son los que menos respuestas tuvieron; les siguen los reactivos R2 y R9; para los reactivos R1, R5 y R8 se obtuvo la mayor cantidad de respuestas. El orden decreciente de los porcentajes de respuestas a los reactivos R10 y R11 refleja la exigencia creciente en los fundamento para contestar cada inciso.

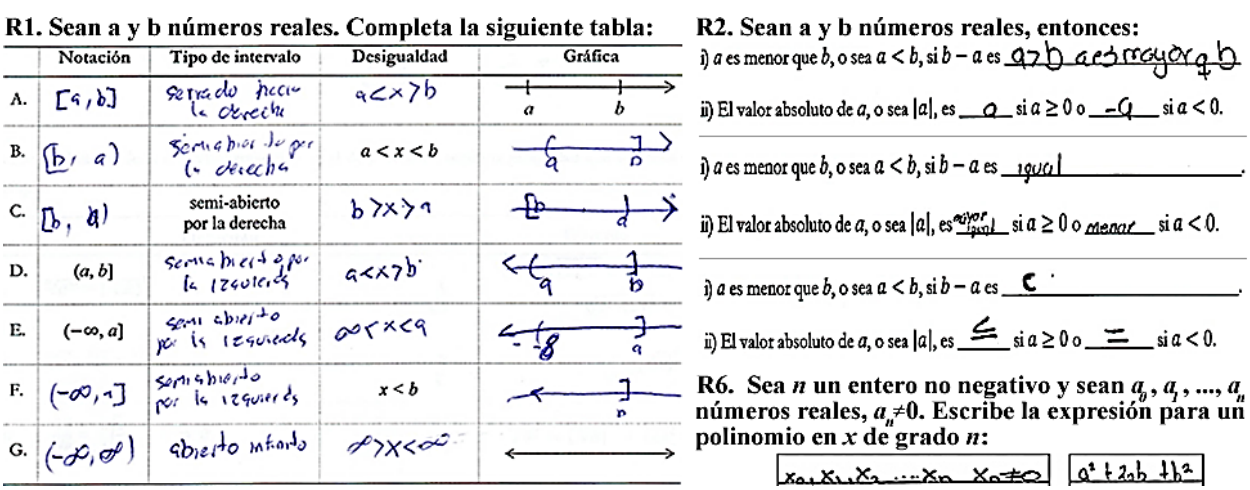

Figura 1. Expresiones gráficas, en lengua escrita y simbólica en los reactivos R1, R2 y R6.

4.1 EXPRESIÓN GRÁFICA, ESCRITA Y SIMBÓLICA

Los reactivos R1, R2 y R6 exigen la expresión de formas equivalentes de intervalos reales, orden y polinomios, respectivamente (véase la Figura 1). La expresión de otras formas equivalentes de los intervalos acotados (R1) fue menos difícil (50%) que la de los intervalos no acotados (20%); aunque tanto para *Desigualdad* como *Notación* (véase en la Figura 1, izq.) no siempre se conservó el orden (50%) y la forma que más se identificó fue la *Gráfica* (74%). Sólo un caso expresó el orden mediante una diferencia correcta (R2) y cuatro expresaron la definición de valor absoluto; los demás estudiantes usaron literales diferentes, los mismos símbolos de desigualdad, el símbolo de infinito o valores numéricos en sus respuestas (véase la Figura 1). A partir de la Gráfica, el 56% expresó la notación $(-\infty, \infty)$ pero en ningún caso se la relacionó con el conjunto de los números reales. Comenzando con las características que definen a un polinomio (R6), ningún estudiante logró la expresión simbólica correspondiente (véase la Figura 1).

4.2 OPERATIVIDAD E IDENTIFICACIÓN DE PROPIEDADES

Los reactivos R3, R4 y R7 exigen no sólo la identificación de las propiedades sino también su operatividad hasta la simplificación. El reactivo R5 requiere la identificación de propiedades algebraicas (véase la Tabla 1 y la Figura 2). Para R3 tres casos operaron el exponente negativo como coeficiente positivo; un caso aplicó el exponente negativo sólo a la variable del numerador; un caso consideró el exponente con signo positivo y lo aplicó a la variable del denominador; dos de los casos transformaron el exponente negativo en radical (exponente racional); un caso aisló el exponente explícito de una de las variables y, al aplicarlo al exponente de toda la expresión, le cambió el signo; los otros tres casos aplicaron correctamente las propiedades de los exponentes, pero con signo positivo. R4 demanda el cálculo del promedio y en los procedimientos de las respuestas no se planteó alguna expresión para obtenerlo. A pesar de que en R5 97% de los estudiantes relacionaron correctamente las propiedades con sus respectivos ejemplos, sólo tres de ellos (10%) aplicaron correctamente las propiedades de los exponentes. Las respuestas a R7 muestran que operar e identificar las propiedades son acciones totalmente diferentes.

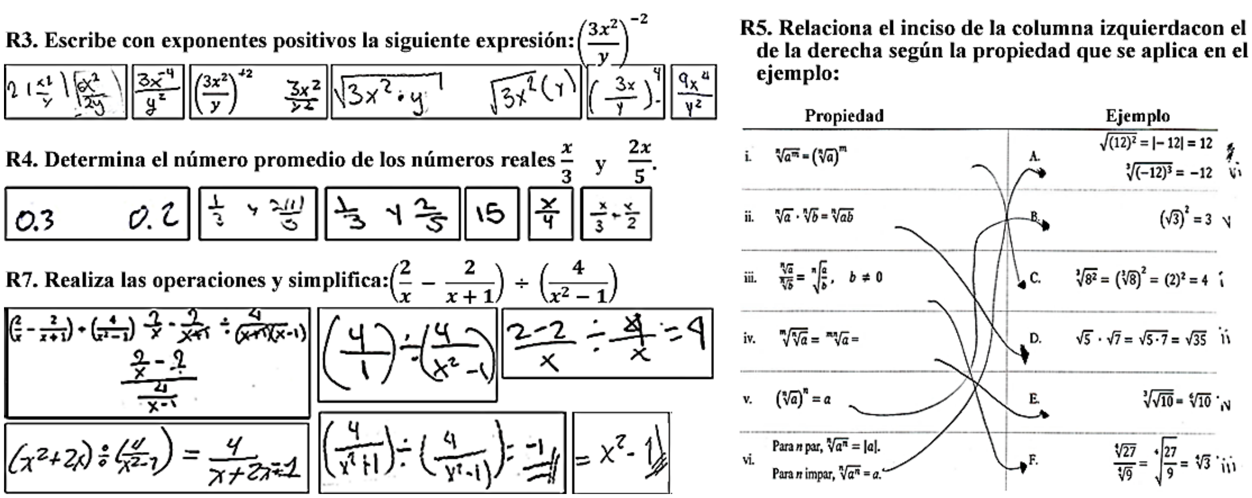

Figura 2. Procedimientos aplicados al simplificar expresiones algebraicas y las formas de relacionar "Propiedad" y "Ejemplo" en los reactivos R3, R4, R5 y R7.

4.3 APROXIMACIÓN Y COMPORTAMIENTO DE LA GRÁFICA

Los reactivos R11 y R13 proponen expresiones simbólicas, de notación y lengua escrita, orientadas a la noción de límite y a su notación vía algunas preguntas sobre el comportamiento asintótico de una función (véase la Figura 3).

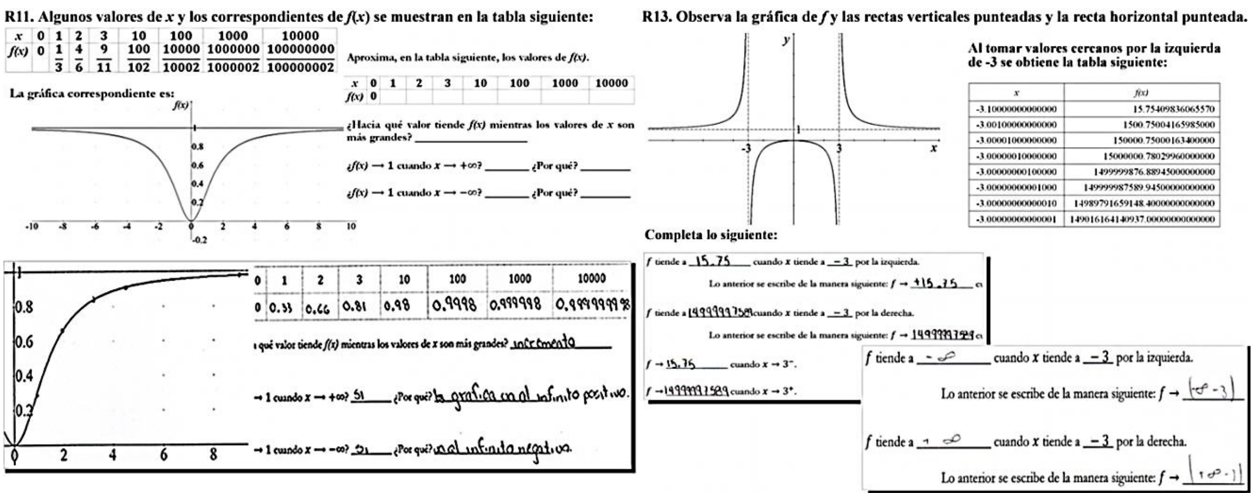

Figura 3. Aproximación como proceso al límite para expresar el comportamiento de f, en los reactivos R11 y R13.

Seis estudiantes respondieron todo el reactivo R11, de los cuales cinco advirtieron la importancia del total de decimales en la aproximación y, de manera explícita, dos relacionaron la información tabular con la gráfica. De los que respondieron los dos primeros incisos, siete (23%) mostraron concordancia entre sus aproximaciones y la tendencia anunciada. Las justificaciones se basaron en la gráfica, dos en sus aproximaciones y tendencias; sin aproximaciones (29%), 16% de los estudiantes copiaron los datos tal cual; de entre las aproximaciones no esperadas, tres casos se auxiliaron de la gráfica y uno más usándola exclusivamente; 16% aproximaron con uno o dos decimales; un caso usó notación de periodicidad.

Cada uno de los incisos de R13, en promedio, tuvo 45% de respuestas, pero únicamente un caso escribió las tendencias correctamente. Cuatro casos (13%) pasaron del enunciado en lengua escrita a la simbólica. Nueve casos (29%) usaron lengua escrita y expresiones numéricas.

R12 planteó preguntas acerca de la relación entre los signos de pendientes y la monotonía, la pendiente cero y máximos y mínimos, simetría de la gráfica respecto al eje vertical, y las raíces en el par ordenado (véase la Figura 4).

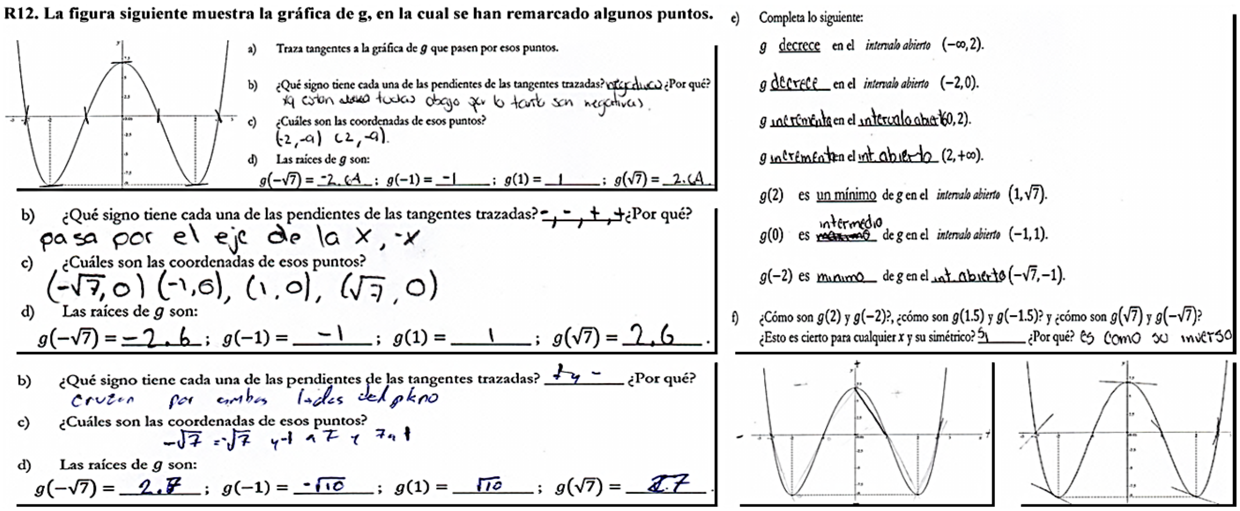

Figura 4. Descripción del comportamiento de g con expresiones numérica, lengua escrita y terminología.

El reactivo R12 fue contestado correctamente por 19% de los estudiantes y, el resto de los incisos, por el 10%, en promedio. Dos casos no trazaron tangentes. Respecto al signo de las pendientes (inciso b), el 56% no respondió ni justificó, el 19% escribió *cruzan por ambos lados del plano* y el 25% de acuerdo a sus trazos. El signo de la pendiente lo asociaron a los cuadrantes o al eje de las ordenadas, o a la gráfica, o a las abscisas de los puntos dados. De las coordenadas (inciso c), el 28% las escribió como par ordenado; del otro 28%, unos usaron corchetes, otros notación propia como $x = -1\ -2,\ m = (-1,\ 0)$. La mitad no respondió el inciso d); ninguna respuesta se refirió a las raíces y evaluaron incorrectamente (50%); sólo un caso evaluó correctamente para los valores enteros del dominio, otro cambió las abscisas ($x = -2$ *entonces* $y = 0$), el 45% aproximó las raíces cuadradas y consideró la función como la identidad.

4.4 APLICACIÓN

Los reactivos de aplicación R8, R9 y R10 exigen plantear expresiones escritas y simbólicas y la operatividad de expresiones numéricas acerca de razones equivalentes y de porcentaje. R8 solicita plantear una expresión simbólica y R10 una gráfica y otra simbólica: medir, calcular el volumen de un prisma rectangular y graficar (véanse las Figuras 5 y 6).

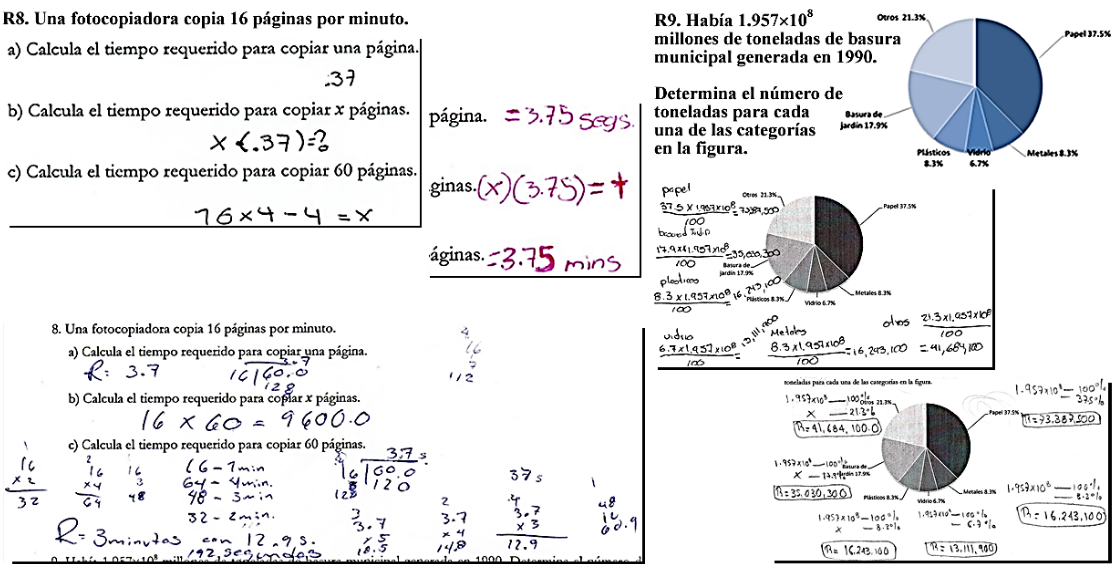

Figura 5. Ejemplos de desempeños ante preguntas de razón de los reactivos R8 y R9.

80% de los estudiantes estableció las razones equivalentes en las que sólo hay una incógnita. Sin embargo, ante dos incógnitas, cuatro plantearon la expresión que relaciona el número de páginas con el tiempo necesario para copiarlas. A pesar de que el procedimiento requerido por R9 es el mismo para todos sus incisos, sólo 52% de los estudiantes plantearon expresiones escritas y simbólicas correctas y, de éstos, el 45% respondió correctamente el reactivo y el 7% expresaron sus resultados en notación científica o no consideraron la unidad de medida de “millones de toneladas” o no convirtieron a “toneladas” (véase la Figura 5).

El 94% de los estudiantes, en la primera pregunta de R10, seleccionó uno de las seis opciones y ninguno estimó o aproximó el volumen. No plantearon una expresión que relacionara el recorte con el volumen, pero cuatro casos se refirieron al “recorte” y otro a una comparación, aunque no estimaron o midieron la longitud del corte y tampoco calcularon el volumen correspondiente, lo que obstaculizó la representación gráfica y la ubicación de la sexta opción (véase la Figura 6).

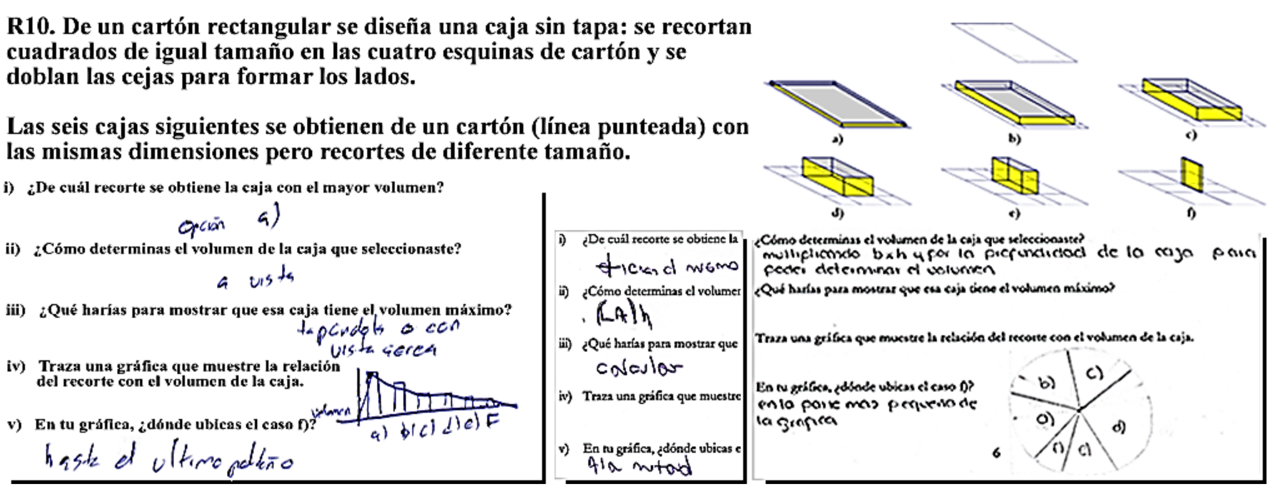

Figura 6. Desempeños particulares ante la situación de optimización en el reactivo R10.

Las expresiones proporcionadas se refirieron al volumen de un sólido y no al particular del reactivo. Algunos estudiantes relacionaron la “base” con el área y otros con la longitud, usaron la misma literal para la longitud de las aristas del sólido. Las descripciones aceptables al inciso iii), “¿Qué harías para mostrar que esa caja tiene el volumen máximo?”, sólo manifestaron un tipo de comparación concreta (llenar, colocar dentro, etc.). Los tipos de gráficas mostraron únicamente las capacidades, diferentes o iguales, de los sólidos.

5. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LA ENTREVISTA

En *aproximación y comportamiento de la gráfica* se pidió al entrevistado considerar hasta cuatro cifras decimales para aproximarse al número *e*: fue necesario recuperar los conjuntos de números y el cálculo del factorial. En *aplicación* se recuperó el reactivo R10 con seis hojas de control: cuatro con los trazos para recortar y armar las cajas, otra hoja con una tabla de doble entrada (recorte-volumen), la restante con una cuadrícula para la gráfica. Enseguida se consideró la expresión $1/x$ para el comportamiento en su punto de discontinuidad y se le interrogó sobre su respuesta *1/0*, mediante las maneras de aproximarse al cero en la recta numérica, tanto por la derecha como por la izquierda; luego se le propuso otra cuadrícula para que trazara la gráfica respectiva y las expresiones con la notación de límites laterales. En *operatividad e identificación de propiedades*, antes de interrogarle sobre R4 se le planteó un caso numérico, luego el de un intervalo abierto y, para finalizar, se le preguntó acerca de la notación $f(x)$. En el pasaje siguiente referente a la indefinición de la división entre 0, a manera de ejemplo de la interacción en la entrevista, “I” denota la del investigador y “E” la del entrevistado.

I: … ¿Aquí qué pasa? [señala “1/0” en la tabla].
E: No sé, podría… daría uno.
I: ¿Por qué uno? ….. ¿Cuánto me da aquí?
E: Cero…
I: Escribe aquí “1/0”. Me dices que es igual ¿a qué…?
E: Cero.
I: … Éste ¿qué está haciendo aquí?
E: Dividiendo.
I: … ¿Uno igual a qué? …
E: A cero [enmarca la igualdad 1 = 0 en la hoja de control]
I: ¿Eso es correcto?
E: No. ...
I: ¿Qué está pasando?

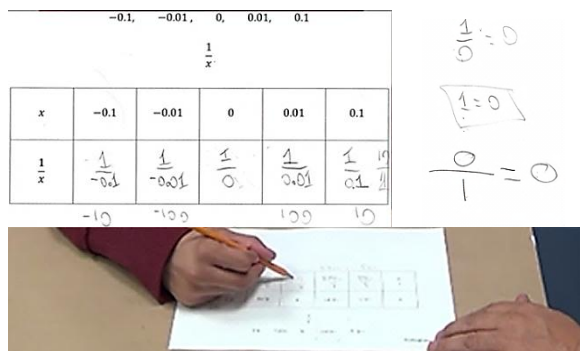

Figura 7. Hojas de control de la entrevista.

En el desarrollo de la entrevista el estudiante manifestó varias ausencias conceptuales, como la revelada cuando se le preguntó a qué conjunto de números pertenecían $e, \sqrt{2}$ y π (véase la Figura 8); o la definición del factorial; incluso desconoció los nombres de los subconjuntos de los números reales, aún el de los naturales. Algunas dificultades provinieron del desconocimiento de los símbolos y de incorrecciones en la operatividad aritmética, pues la realizaba mentalmente hasta que admitió la necesidad de hacerlo por escrito.

I: ¡Vamos a ver esta hoja! ¿Qué puedes decir de estos…?
E: Son números. Estos son predeterminados, ya tienen un valor. … Y éste es una operación [señala a raíz de dos].
I: Son números.
E: Son números y ésta es una operación [señala otra vez a la raíz].
I: ¿A qué conjunto de números pertenecen?
E: O sea… ¿cómo? … No le entiendo bien a la pregunta.
I: ¿Qué conjuntos de números conoces?
E: … ¿a qué se refiere? ¿Cuáles son los conjuntos?
I: Por ejemplo, los que usamos para contar son…
E: Los primarios.
I: Pero, ¿cómo se llaman? …
E: Son ….

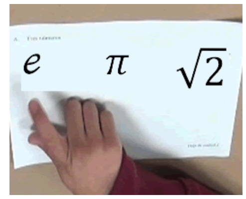

Figura 8. Números irracionales en la entrevista.

6. CONCLUSIONES

De manera recurrente, los instrumentos de este proyecto se han venido implementando al inicio de cada unidad de aprendizaje, cuando los estudiantes están reintegrándose después de un período de inactividad académica de alrededor de cuarenta días, lo cual puede influir en el despliegue de su actividad matemática. En la unidad que corresponde a este informe, los resultados obtenidos manifiestan dificultades provenientes del desconocimiento o falta de consolidación de los fundamentos matemáticos para acceder a la enseñanza de la derivada. El desempeño deficiente no sólo se debió a la recencia de la enseñanza de los contenidos propios de la unidad de aprendizaje de Cálculo Diferencial, como límites y razón de cambio de una variable respecto a otra, sino a deficiencias en contenidos de unidades de aprendizaje anteriores, tales como el concepto mismo de número, sus operaciones y relaciones, producto cartesiano, de función, de tangente a una curva, de operatividad algebraica, de identificación de variables y de la notación matemática. A falta de la rectificación del conocimiento de esos fundamentos, el acercamiento del estudiante al Cálculo Diferencial se reducirá a la memorización y aplicación de simples reglas para transformar expresiones algebraicas, lo cual está muy lejos del objetivo señalado en el programa de estudios para esta unidad (SEMS-SEP, 2008).

De acuerdo con el señalamiento de Orton (1983) de que los resultados de un estudio deben de tener implicaciones sobre los planes y programas, los métodos de enseñanza y que constituyen una fuente de sugerencias que los profesores deberían adoptar y desarrollar, de nuestra investigación se desprende que una alternativa sería incorporar actividades cuyo contenido se asemejara al del cuestionario aplicado y a algunas otras de razón de cambio. Se requeriría, además, que los símbolos y la notación para tratar el contenido de esta unidad de aprendizaje fueran comprendidos e interpretados por los estudiantes.

7. REFERENCIAS

Martínez, R. y Garnica, I. (2012a). Pendiente de la recta en el plano: antecedentes para su enseñanza en el bachillerato tecnológico. *XXVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Brasil.

Martínez, R.; Mendoza, F.; Garnica, I.; Chávez, R. y Ojeda, A.M. (2012b). Conocimiento adquirido y el círculo trigonométrico: implicaciones para el bachillerato tecnológico. *Acta*

Latinoamericana de Matemática Educativa. (Flores, R, ed.) Vol. 25, pp. 131-140. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Mendoza, F.; Ojeda, A.M. y Chávez, R. (2012). Enseñanza y comprensión de la recta como lugar geométrico en el bachillerato tecnológico. *XXVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Brasil.

Ojeda, A.M.; Chávez, R. y Mendoza, F. (2012). Lugar geométrico y la recta en el plano: antecedentes para su enseñanza en el bachillerato tecnológico. *XXVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Brasil.

Orton, A. (1983). Students' Understanding Differentiation. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 14, pp. 1-18. Dordrecht, Holland y Boston, USA: Reidel Publishing Co.