

LA FORMACIÓN DEL CONCEPTO DE PARÁBOLA



Arcelia G. F. Gaspar De Alba Diéguez¹, Otilio B. Mederos Anoceto²,
Silvia A. Mayén Galicia³

¹arceliagasper@hotmail.com, ²omederosa@gmail.com, ³silmay75@hotmail.com

¹Universidad Autónoma de Guerrero, ²Universidad Autónoma de Coahuila,

³CINVESTAV-IPN

Avance de investigación

Medio superior

Resumen

En este reporte se presentan los avances de investigación orientados al diseño, experimentación y evaluación de situaciones de aprendizaje, cuyo objetivo es lograr que los estudiantes adquieran el concepto de parábola y transiten entre su representación verbal, tabular, gráfica, analítica y funcional. Este documento contiene el estatus epistemológico de la parábola, la propuesta, el objetivo de la investigación, la revisión literaria, el marco teórico que sustenta nuestro trabajo, la metodología y resultados parciales.

Palabras clave: *Concepto, parábola, representación, genética, visualización.*

1. INTRODUCCIÓN

Las investigaciones realizadas en los últimos años acerca del aprendizaje de un concepto son relativamente frecuentes en la educación matemática. Los resultados de estas investigaciones, aunada a nuestra experiencia como profesores, nos permiten afirmar que los estudiantes confrontan muchas dificultades al adquirir un concepto, ampliar su extensión construyendo nuevos elementos y transitar entre sus diferentes representaciones.

Creemos que estas deficiencias están directamente relacionadas con la planeación y la práctica del proceso de enseñanza, que no tiene en cuenta los procesos de formación y desarrollo de un concepto, y por tal motivo, consideramos que el aporte principal de nuestra propuesta, en el ámbito escolar, es contribuir en el fortalecimiento de estos procesos didácticos. Partimos del hecho de que un concepto, en el contexto escolar, provoca fenómenos didácticos que obstaculizan su aprendizaje y consideramos que esto se debe a que los estudiantes e incluso algunos profesores, presentan inconsistencias al construirlo y representarlo.

En nuestro intento de superar estas inconsistencias, es que se diseñan situaciones de aprendizaje que van desde la construcción del concepto, su definición, la ampliación de su extensión y su transformación.

2. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En la enseñanza de la matemática, la formación de conceptos y su representación representan gran parte de los contenidos curriculares. Las investigaciones realizadas en esta dirección por Dolores (1996), Font (2001), Cabezón (2003), entre otros, son el resultado de varias propuestas para fortalecer los procesos didácticos en la enseñanza de la matemática. En ellas se manifiesta la preocupación por generar herramientas que soslayen las dificultades que presentan los estudiantes para formar un concepto, definirlo o transitar entre su representaciones.

La matemática que se imparte en el bachillerato o *matemática elemental*, sirve como transición para la *matemática superior* (Dolores, 1996). Nuestra experiencia como profesora en los niveles

medio y superior nos permite reconocer la necesidad de robustecer los métodos de enseñanza de la matemática elemental para minimizar la problemática que se presenta en la matemática superior.

La Geometría Analítica (GA), es una de las ramas de la matemática elemental y uno de los objetivos fundamentales del curso, es la transición entre las diferentes representaciones de las cónicas (SEP, 2009-11). Particularmente nos interesan los problemas relacionados con la formación y desarrollo del concepto de parábola y su representación funcional, ya que generalmente se analizan como si fueran dos objetos matemáticos diferentes, cuando simplemente son dos representaciones de un mismo objeto o bien, es la conversión de la parábola (objeto) en su representación funcional (Duval, 1993). Consecuentemente, el problema de investigación que nos planteamos es el siguiente: ¿Qué papel juegan las transiciones entre las diferentes representaciones de un objeto en la formación y desarrollo del concepto de parábola?

Ahora bien, la naturaleza del problema de investigación y el desarrollo alcanzado por la didáctica nos sugiere la creación de una secuencia didáctica, que sirva como herramienta para que los estudiantes logren vencer las dificultades en los procesos de formación y desarrollo del concepto de la parábola.

Las características de este concepto, hacen que elijamos la vía genética¹ porque describe de una manera muy sencilla el proceso de formación de una parábola, como el movimiento en un plano de un punto P , que mantiene iguales sus distancias a un punto F y a una recta r fijos.

La simplicidad de este proceso y su carácter esencialmente geométrico permiten:

- La implementación computacional para facilitar el proceso de visualización
- La participación directa de cada estudiante en el proceso de formación de la parábola.
- La rápida construcción de representaciones geométricas de muchos objetos, tantos como lo deseen, de la extensión del concepto de parábola.

Para llevar a cabo este proceso nos planteamos el siguiente objetivo:

Comprobar si la puesta en escena del diseño de las actividades propuestas en este documento, permite que los estudiantes logren formar el concepto de parábola y transitar entre sus diferentes representaciones.

Para dar solución al problema de investigación y dar cumplimiento al objetivo planteado, se realizarán actividades donde los estudiantes construyan y grafiquen la parábola para que identifiquen las características invariantes propias de la curva y sean capaces de representarlas en sus diferentes formas.

Aunado a lo anterior, utilizaremos tecnologías de la información y la comunicación (TIC's), específicamente Cabri-Géomètre II (1995), ya que el uso de este programa hace dinámico lo que sin ellos es estático. Además se considera que los mediadores son idóneos para la visualización, el desarrollo y evolución de los estudiantes que participan en las actividades propuestas para adquirir los conceptos de la GA.

¹ Por vía genética entendemos el proceso de formación, y definición, de un concepto mediante un procedimiento de formación (...) propio y exclusivo del objeto dado. (Gorki y otros, s.f. p.72)

Por otro lado, una vez que se analicen los resultados de la propuesta didáctica estaremos en posición de determinar si nuestra hipótesis se cumple:

La transición entre las representaciones y la visualización, son parte integrante de los procesos de formación y desarrollo del concepto de parábola.

3. ESTADO DEL ARTE

Para poder establecer las causas que dieron sentido y significado a la parábola, cómo se aborda el tema a través del tiempo y cuáles son las tendencias de su tratamiento en el momento de realizar nuestra propuesta, se han realizado las siguientes tareas de investigación: revisión de libros históricos y de texto, tesis de maestría y doctorales, artículos científicos, páginas electrónicas, construcciones que dieron origen a la parábola, programas oficiales que atienden particularmente la enseñanza de la GA y tendencias en la enseñanza de la parábola, las cuales se describen a continuación.

3.1 LA EVOLUCIÓN DE LA PARÁBOLA

Los primeros vestigios que tenemos sobre la existencia de la parábola datan del siglo VI a. C. Fueron los pitagóricos quienes por primera vez la mencionaron. Sin embargo, no se referían al concepto que ahora utilizamos; ellos describían la *parabolé* como "yuxtaponer a un segmento dado, según un ángulo dado, un paralelogramo que sea igual (en área) a un triángulo dado". Lo que para nosotros, actualmente, equivale a resolver $ay = S$ (De Guzmán, 1986).

Es a Menaechmus (380–320 a. C.) a quien se le atribuye el descubrimiento de las cónicas tal como las construimos en la actualidad, *la sección resultante de cortar un cono recto con un plano paralelo a su generatriz* que es una variante de la vía genética (Tapia, 2002).

Sin embargo, no es hasta el siglo II a. C. que el matemático griego Apolonio de Perga genera el cono circular *oblicuo de dos hojas*. Es el primero en estudiar las curvas cónicas y encontrar la propiedad plana que las definía (otra variante de la vía genética). Introduce, con instrumentos puramente sintéticos, nociones tales como normal a una curva, evoluta, centro de curvatura, etc. y logra obtener estos elementos para las cónicas de la manera más rigurosa (Tapia, 2002).

El estudio de la Geometría Analítica utilizando herramientas del álgebra y encontrando representaciones analíticas de sus objetos, fue presentado por René Descartes en su libro llamado *Géometrie* que se publicó en el año de 1637 (Smith y Lathman, 1954). En esta obra se determinan representaciones analíticas de diferentes curvas con representaciones geométricas conocidas. La mayoría de los matemáticos de los siglos XVI al XVIII, contribuyeron al desarrollo de esta nueva teoría, que en la actualidad, se fundamenta en la utilización de diferentes sistemas de coordenadas (Anfossi, 1958).

Es importante destacar que los planes y programas de estudio del nivel medio superior (SEP, 2009-11), centran su atención, precisamente, en el desarrollo de la parábola desde el punto de vista de la GA, haciendo a un lado los conocimientos obtenidos por la vía genética. En nuestra propuesta retomamos la Geometría Sintética (GS), como lo hicieron los geómetras griegos, para que los estudiantes de bachillerato participen en el proceso de formación del concepto de parábola utilizando la vía genética, ya que consideramos que esta es la vía más adecuada para este propósito en este nivel de educación, y que facilita el posterior estudio cartesiano como lo presenta Descartes (Smith y Lathman, 1954).

3.2 REVISIÓN LITERARIA

Para la revisión literaria hemos seleccionado algunos libros de texto que comúnmente se utilizan en los cursos de GA (Goodman, 1980; Zill, 1987; Lehmann; 1990; Fuller y Tarwater 1995; López, Regueiro, Santa, y Jinich, 1997; De Oteyza, Lam, Hernández, Carrillo, y Ramírez, 2001; Fuenlabrada, 2007; Mata, 2010; Cuellar, 2010). La revisión que hacemos de ellos está enfocada, específicamente, en la forma en que los autores abordan el tema relacionado con la parábola con vértice en el origen y eje de simetría y, para poder determinar las implicaciones didácticas relacionadas con la formación del concepto de parábola y sus diferentes representaciones.

En esta revisión, hemos encontrado que en la mayoría de los textos se define la parábola como *la curva que se forma cortando un cono con un plano inclinado, que no contiene al vértice y es paralelo a una y solo una generatriz*² y como *el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto (foco) y una recta (directriz) fijos*. Del mismo modo, se muestran los cortes del cono, se definen los elementos de la parábola, se obtienen la ecuación a partir de sus elementos, y los elementos a partir de su ecuación, se mencionan las propiedades que se utilizan para definirlas como lugar geométrico. Además, hacen referencia a las aplicaciones que se destacan en los trabajos de Apolonio, Arquímedes, Kepler, Galileo, Descartes o Newton y relacionan la parábola con la ecuación de segundo grado en las variables x e y . Sin embargo, las actividades no están diseñadas para que sea el alumno quien las descubra, que es el propósito de nuestro proyecto doctoral.

3.3 INVESTIGACIONES PREVIAS

La propuesta de Luna (1997) consiste en diseñar modelos matemáticos o físico-matemáticos que permitan analizar situaciones reales, obtener y registrar los efectos que se generan. La idea fundamental de estas prácticas es vincular la parte teórica con la práctica, de manera tal, que esta relación se dé de manera natural. La experiencia del maestro indica que el solo hecho de cambiar de lugar físico, hace que el alumno cambie su actitud y por tal motivo su visión.

Fernández (2003) presenta básicamente los contenidos tradicionales de las cónicas, difiere con los materiales que revisamos en la forma de construirlas, presenta inicialmente la definición, ecuación y la gráfica de la parábola, pero luego inicia el proceso de construcción de la cónica con ayuda del Cabri-Géomètre.

Otro artículo importante es el que presenta Font (2001), ya que se refiere a la importancia de las traducciones entre diferentes representaciones, básicamente hace reflexiones sobre cuatro representaciones: verbal, gráfica, tabular y analítica. En el caso de la parábola, se busca la mejor forma de obtener una expresión simbólica a partir de su gráfica.

Abreu (2001), Díaz (2001) y Cabezón (2003) entre otros muchos, diseñan diferentes actividades para que los estudiantes trabajen con Geometría Dinámica (GD) en la solución de problemas de diferentes tipos relativos a la parábola. Las actividades están diseñadas siguiendo la forma tradicional que presentan los libros de texto, se realizan construcciones, se dan definiciones, se determina la ecuación y las propiedades de la curva, se definen, además, objetos relacionados con la parábola, Todo ello en el marco de la GD, lo cual representa una herramienta idónea para disminuir el tiempo de estudio de este concepto.

² Aplicase a la línea o a la figura que al moverse engendra respectivamente una figura o un sólido geométrico... (Pinto, 1995, p. 301).

En el reporte que presentan Ibarra y Fernández (2007), se describen el diseño, la experimentación y la evaluación de una situación didáctica para la enseñanza de la función cuadrática en el bachillerato. Afirman que la participación en la actividad permitió a los alumnos la identificación de la parábola en los diferentes registros de representación y que los resultados obtenidos, brindan la posibilidad de continuar con este tipo de actividades donde se debe profundizar sobre lo que se ha hecho y lo que se puede hacer, retomando diferentes contenidos matemáticos en el bachillerato.

En el trabajo que nos precede (Gaspar De Alba, 2007), presentamos una serie de actividades cuyo propósito fue analizar los efectos que produce en el alumno, el aprendizaje de las cónicas a través del uso de la tecnología en el contexto geométrico, con una implementación fundamentada en diversas representaciones. En el proceso de investigación se introdujeron en la práctica educativa una serie de actividades para lograr que el alumno interactuara con su entorno y construyera el conocimiento en base a su propia experiencia. Los alumnos definieron las cónicas, reprodujeron cortes en conos e identificaron las curvas.

En el trabajo de Rojas, Londoño, Cañate, Abuabara y Pacheco (2009), se muestran los resultados de una investigación sobre la importancia del uso de la tecnología en los diferentes sistemas de representación de la parábola. Diseñan, aplican y analizan actividades que promueven la articulación del sistema algebraico al gráfico y viceversa.

Álvarez (2010), presenta los resultados de una investigación cuyo propósito es el de explorar la construcción de la parábola a partir de ciertos elementos y revisar las propiedades de sus tangentes.

De la Rosa (s. f.), realiza una propuesta didáctica para abordar la parábola utilizando mediadores informáticos. Durante el desarrollo de las actividades, los alumnos llegan a comprender el concepto de la parábola y un manejo adecuado del programa de GD.

En general, en todos los materiales que se han revisado, se define la parábola, se determina su ecuación a partir de la definición, se determina el lugar geométrico que corresponde a la ecuación. Observamos el tránsito entre las representaciones gráfica y analítica, en algunos casos la tabular y la verbal, pero en ningún caso la funcional, sin embargo, en ninguno de los documentos consultados se describe un proceso de formación de este concepto, y mucho menos están dirigidos a que los estudiantes participen en este proceso.

4. EL MARCO TEÓRICO

4.1 REGISTROS DE REPRESENTACIÓN SEMIÓTICA

Las investigaciones que se han realizado en los últimos años en el campo de la matemática educativa, en relación a los registros de representación semiótica, confirman que el aprendizaje de las matemáticas se enriquece cuando se incorporan actividades didácticas en la enseñanza, que favorecen la utilización y articulación de diferentes representaciones (Duval, 1993, 1999, 2006).

Según Duval (1993), para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiosis (*significante*): formación, tratamiento y conversión. Duval (1999) afirma que el conocimiento conceptual es como el invariante de múltiples representaciones semióticas y para que este se dé, es necesario que el alumno sea capaz

de interactuar entre diferentes registros de representación y delimitar esas representaciones semióticas como producciones constituidas por el empleo de signos (lenguaje, escritura, álgebra, gráficas, tablas, entre otros).

Los objetos de la extensión de muchos conceptos matemáticos se aprenden mediante la construcción de un registro de representación o de colecciones de registros de representaciones equivalentes; los registros de representaciones geométricas, como es el caso de la parábola, están entre los que más contribuyen a su visualización. En nuestro trabajo hemos elegido la vía genética, mediante la utilización de diferentes registros de representación y la transformación de una representación a otra, para que los estudiantes participen en los procesos de formación y desarrollo del concepto de parábola.

Los registros de representación que utilizaremos son: *verbal, gráfico, algebraico, tabular y funcional*. Consideramos que la selección adecuada del registro de representación, será suficiente para permitir la comprensión del contenido conceptual representado. Por todo lo antes señalado, el diseño de herramientas didácticas para que los estudiantes participen en el proceso de formación del concepto de parábola, se comienza utilizando representaciones geométricas, se hace posteriormente el paso a representaciones en un plano cartesiano y finalmente a representaciones funcionales.

4.2 PROPUESTA DIDÁCTICA

Nuestra propuesta se basa en la necesidad de diseñar actividades, hojas de trabajo, orientaciones y actividades grupales, para que los estudiantes participen en los procesos de formación y desarrollo del concepto de parábola (aprendizaje activo) y actividades grupales para propiciar que los estudiantes medien en el aprendizaje de otros estudiantes (aprendizaje mediado). El eje sobre el cual giran las actividades planteadas, es la búsqueda de comportamientos matemáticos y cognitivos en el quehacer de los estudiantes que propicien la formación de un concepto, haciendo que el tratamiento y pasaje entre registros de representación sean productivos para la enseñanza y aprendizaje del concepto de la Parábola.

4.3 PROCESO DE FORMACIÓN DE UN CONCEPTO

La formación de un concepto es un proceso complejo que puede seguir diferentes vías: inductiva, deductiva, mediante la modelación, a partir de un conjunto de conceptos, genética, entre otros. La complejidad del proceso se debe a que está formado por subprocesos más simples, como por ejemplo, subprocesos de comparación, análisis, abstracción, síntesis, generalización y restricción (Mederos y Martínez, 2005). El conjunto de subprocesos que intervienen en el proceso de formación puede variar según la vía que se utilice. Si se utiliza la vía inductiva, el subproceso de generalización juega un papel fundamental y el de restricción no aparece. En el caso de la vía deductiva el papel fundamental lo asume el subproceso de restricción. En nuestro trabajo se utiliza la vía genética para realizar el proceso de formación del concepto de parábola.

Muchos de los conceptos de la GA se forman mediante un proceso genético que describe el procedimiento de formación o de origen, de los elementos de su extensión, el cual es propio y exclusivo de dichos objetos. La diferencia específica en este tipo de definición está constituida por este procedimiento, es decir, por el procedimiento que describe el proceso de formación u origen de los objetos de la extensión.

4.4 PROCESO DE DESARROLLO DE UN CONCEPTO

El desarrollo de un concepto matemático es un proceso complejo que se logra realizando, varios subprocesos, entre otros: el de ampliación de la extensión de los elementos conocidos de la extensión del concepto, el de determinación de nuevas propiedades de los elementos de la extensión, el de determinación de diferentes registros de representación de elementos de la extensión y de paso de una representación a otra, un proceso de relación e integración con otros conceptos. Por esta razón, un concepto lo consideraremos, en determinados momentos, como una terna (E, C, R) , donde por E se indica su extensión, por C el contenido y por R se indicarán los distintos tipos de representación de los objetos de la extensión (Mederos y Martínez, 2005).

4.5 MEDIADORES INFORMÁTICOS

Para que los estudiantes participen en los procesos de formación y desarrollo de un concepto, en particular del concepto de parábola, es necesario que construyan objetos de su extensión, lo cual se logra mediante la construcción de diferentes registros de representación y mediante el paso de un registro a otro. Investigaciones didácticas han demostrado los efectos que puede tener el uso adecuado de la tecnología en este proceso. Parte fundamental de nuestro trabajo de investigación es la implementación de mediadores informáticos como una alternativa didáctica para la *visualización de la parábola*.

Es necesario reconocer la utilidad del *Cabri-Géomètre II*, ya que permite a los alumnos entrar en contacto con la GD y la visualización de sus propiedades (Cabri-géomètre, 1995). La presente investigación se desarrolla en el propio contexto de las cónicas a través de diversas representaciones. Es precisamente en el contexto gráfico que la implementación del programa puede resultar de gran utilidad ya que permite que el alumno, en menos tiempo, reproduzca cortes, represente figuras y analice el comportamiento de la parábola.

Podemos concluir afirmando, en base a nuestra propia experiencia, que la mayoría de los estudiantes de nivel medio superior presentan dificultades de entendimiento de los conceptos fundamentales de la GS y la GA, no solamente en lo que se refiere a la modalidad euclíadiana, sino también con el área analítica. El desarrollo conceptual de los distintos objetos matemáticos que componen a la GA, determina en gran medida una evolución cognitiva en las estructuras matemáticas del alumno.

5. LAS HOJAS DE TRABAJO Y LAS ORIENTACIONES

Las actividades para construir nuestra propuesta didáctica, están orientadas para que los estudiantes participen activamente en los procesos de formación y desarrollo del concepto de parábola y que medien en el aprendizaje de otros estudiantes.

6. MÉTODO

Hemos dividido la metodología en tres etapas, que corresponden a las componentes fundamentales de cualquier sistema didáctico: alumnos, profesores y contenidos. Nos referiremos a estas etapas como: *organización del conocimiento escolar, diseño de actividades didácticas y actividades para el aprendizaje activo y mediado de los estudiantes*.

7. RESULTADOS PARCIALES

Primera etapa: Antes de llevar a cabo el estudio de evaluación, se realizó una validación de las actividades propuestas para analizar su adecuación con estudiantes del nivel medio superior. Para esta etapa de la investigación se aplicaron las hojas de trabajo a una muestra de 12 estudiantes. La validación se completará con una muestra definitiva constituida por estudiantes de bachillerato durante el semestre agosto-diciembre del 2012. Los participantes serán estudiantes del tercer semestre de preparatoria y se llevará a cabo, con las actividades definitivas resultantes del estudio de la validez de contenido. Al finalizar el proceso estaremos en posibilidad de evaluar nuestra propuesta por métodos estadísticos y determinar si la utilización de los diferentes tipos de representación y la visualización contribuyen a que los estudiantes formen el concepto de parábola y transitén entre sus diferentes representaciones.

8. REFLEXIONES

Se ha construido una organización del conocimiento escolar coherente con lo expuesto en este artículo, que consideramos es original. Esta organización facilita el diseño de actividades didácticas, dirigidas a que los estudiantes participen en su propio aprendizaje y medien en el de sus compañeros.

9. REFERENCIAS

- Abreu, J. L. (2001). *Las curvas cónicas*. Recuperado el 2 de Mayo del 2011, de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Conicas/Indice_conicas.htm.
- Álvarez, M. (2010). *De la Parábola y sus tangentes*. Revista digital, Matemática, Educación e Internet. Recuperado el 18 de septiembre de 2010 de <http://www.cidse.itcr.ac.cr/revistamate/TemasGeometria/parabola/index.html>.
- Anfossi, A. (1958). *Geometría Analítica*. México: Progreso.
- Cabezón, M. (2003). *Las cónicas*. Recuperado el 2 de Mayo del 2011, de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Las_conicas/indice.htm
- Cabri-géomètre (1995). *Enseñanza y aprendizaje de la geometría*. Extraído el 22 de Marzo del 2009 de: <http://ued.uniandes.edu.co/ued/servidor/em/recinf/software/cabri.html#40>
- Cuellar, J. (2010). *Matemáticas III, Enfoque por competencias*. México: Mc Graw Hill.
- De Guzmán, M. (1986). *Los Pitagóricos*. Recuperado el 4 de agosto de 2010 de <http://www.upasika.com/docs/atica/Guzman%20Miguel%20de%20-%20Los%20pitagoricos.pdf>
- De la Rosa, L. (sf). *Una propuesta didáctica para abordar la parábola utilizando un procesador*. Recuperado el 20 de septiembre de 2010 de <http://www.geometriadinamica.org/actividad/Actividades/Construyendoalaparabola.pdf>
- De Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A. y Ramírez, A. (2001). *Geometría Analítica y Trigonometría*. México: Pearson Educación
- Díaz, C.V. (2001). *La función cuadrática. Paráboles*. Recuperado el 2 de Mayo del 2011, de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/La_parabola/index.htm
- Dolores, F. (1996), Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada en el bachillerato. Tesis de maestría no publicada. Instituto Superior Pedagógico Enrique José Varona. La Habana, Cuba.
- Duval, R. (1993), Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Eds.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. pp. 173-201.

- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. (1^a ed. Traducida). Colombia: GEM.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*. 1(1), 143-168.
- Fernández, H. (2003). *Construcción y Exploración de las Cónicas y de sus Propiedades usando el Cabri*. Tesis de licenciatura no publicada. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. México
- Font, V. (2001). Expresiones simbólicas a partir de gráficas. El caso de la parábola. *Revista Ema: Investigación e Innovación en Educación Matemática*, 6, p. 180-200.
- Fuenlabrada, S. (2007). *Geometría Analítica* (3^a ed.). México: Mc Graw Hill.
- Fuller, G. y Tarwater, D. (1995). *Geometría Analítica*. (7^a ed.). Wilmington: Addison Wesley Iberoamericana.
- Gaspar de Alba, A. (2007). *Efectos y dificultades que produce en el alumno de tercer semestre de preparatoria el aprendizaje de las cónicas a través del uso de la tecnología en el contexto geométrico, con una implementación fundamentada en diversas representaciones*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez, México.
- Goodman, A. W. (1980). *Geometría Analítica y Cálculo*. (1^a ed. traducida). México: UTHEA
- Gorski, D. P., Tavants y otros, (s.f.) *Lógica*, pp,72. Ediciones Pedagógicas. Imprenta Nacional de Cuba. La Habana.
- Ibarra, S. y Fernández, L., (2007). La enseñanza de la función cuadrática en el bachillerato. Resultados de un proyecto de desarrollo docente. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 20, p. 26-30
- Lehmann, C. (1990). *Geometría Analítica*. México: Limusa
- López, A., Regueiro, M., Santa, C. y Jinich, E. (1997). *Relaciones y Geometría Analítica* (2nd ed.). México: Longman y Alambra
- Luna, J. (1997). *La geometría Analítica a través de Modelos Físicos*. Tesis de maestría no publicada. Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. México.
- Mata, P. (2010). *Matemáticas 3*. México: ST
- Mederos, O. y Martínez J. (2005). La resolución de problemas y la formación y desarrollo de conceptos. El concepto de media numérica. *Revista números* 62, 53-63. Canarias. España.
- Pinto, M. (1995). Diccionario de la lengua española. Programa educativo visual S.A. de C.V. pp. 301. Colombia
- Rojas, C., Londoño, N., Cañate, D., Abuabara, R., y Pacheco, L. (2009). Efectos del uso de la tecnología computacional sobre la articulación de los sistemas de representación de la parábola en un grupo de alumnos. *Zona próxima: revista del instituto de Estudios en Educación. Universidad del Norte*. 10, 70-79.
- SEP (2009-11). *Programa de estudio, educación media superior*. Dirección General del Bachillerato de la Subsecretaría de Educación Media Superior de la Secretaría de Educación Pública, México.
- Smith, E. y Latham, M. (1954). Traducción de *The Geometry of René Descartes*. New York: Dover Publications.
- Tapia, F. (2002). Apolonio, el geómetra de la antigüedad. *Apuntes de historia de las matemáticas*, 1, 19-31
- Zill, D. (1987). *Cálculo con Geometría Analítica*. México: Iberoamérica