

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS



Dinazar I. Escudero, Eric Flores, José Carrillo
eadinazar@hotmail.com, ericfm_0@hotmail.com, carrillo@uhu.es
Universidad de Huelva (España)
Reporte de Investigación
Básico

Resumen

En este trabajo se presenta una investigación de corte teórico que analiza el carácter de *Especializado* en el modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* desarrollado por el grupo de investigación en Educación Matemática de la Universidad de Michigan. La motivación surge a partir de dificultades detectadas en el uso de dicho modelo, sobre todo en cuestión de delimitación entre los subdominios que lo conforman. Se expone el resultado de una amplia revisión bibliográfica en la cual se pone principal énfasis en la definición y ejemplificación de conocimiento especializado. Finalmente, se presenta un modelo que ha sido construido mediante elucubración teórica en la Universidad de Huelva, España como reacción a las dificultades identificadas en el anterior.

Palabras Clave: *Modelos de conocimiento, Conocimiento especializado*

1. INTRODUCCIÓN

La función del profesor de matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la materia ha sido un objeto relevante de estudio en el campo de la Matemática Educativa. Una de las líneas de investigación que responde a este interés se enfoca en el estudio del conocimiento y las habilidades que requieren los profesores para enfrentarse a este proceso.

Existen diversos autores que han propuesto modelos para sistematizar el conocimiento que requiere un profesor para enseñar matemáticas. En particular, el *Mathematical Knowledge for Teaching* [MKT] (Ball, Thames & Phelps, 2008) es un modelo analítico que ha cobrado relevancia a nivel internacional y cuyo propósito es diferenciar componentes para un tratamiento apropiado de las características del conocimiento matemático para la enseñanza. Este modelo tiene como base el trabajo de Shulman (1986), en el cual se propone un esquema general de la base de conocimientos requeridos para la enseñanza. El MKT surge de la observación, por lo tanto no es prescriptivo, sino descriptivo. Es precisamente en esta descripción donde se han observado problemas en la diferenciación de elementos de conocimiento en la práctica del docente (por ejemplo Ribeiro, Monteiro & Carrillo, 2010; Sosa & Carrillo, 2010).

En esta comunicación nos proponemos presentar las reflexiones surgidas de un análisis profundo de uno de los subdominios del MKT, el conocimiento especializado del contenido (SCK, por sus siglas en inglés), puesto que es este subdominio el principal aporte del modelo.

Por último mostraremos el resultado de dicha reflexión, la cual ha derivado en la conformación de un modelo que pretende sistematizar el conocimiento del profesor de matemáticas y que surge como reacción a las dificultades de delimitación que se detectaron del uso del MKT. Dicho

modelo es una pieza importante en la estructuración del marco teórico de las investigaciones en curso del grupo de investigación SIDM¹ de la Universidad de Huelva.

2. MARCO TEÓRICO

El trabajo de Shulman (1986) es seminal en la propuesta de modelos de conocimiento y habilidades desde diferentes ópticas. A partir de éste surge un interés por identificar y sistematizar el conocimiento que requiere un profesor para realizar su labor, poniendo en juego elementos propios del proceso de enseñanza-aprendizaje.

En un esfuerzo por tratar de dar especificidad a este esquema emerge el MKT como modelo de conocimiento propio del profesor de matemáticas. Este modelo proporciona un refinamiento del esquema de Shulman y ofrece una categorización de la tipología de conocimiento matemático observado en/requerido para la enseñanza.

Dicho modelo se presenta como el conjunto de dos tipos de conocimiento: el *Pedagogical Content Knowledge* y el *Subject Matter Knowledge*. El primero deriva directamente del esquema de Shulman, refinando su propuesta al categorizar este conocimiento a través de los subdominios:

- *Knowledge of Content and Students* (KCS), que se refiere al conocimiento que combina los saberes acerca de los estudiantes y los saberes acerca de las matemáticas, como por ejemplo el conocer los errores que los estudiantes comenten con mayor frecuencia (Ball *et al*, 2008).
- *Knowledge of Content and Teaching* (KCT), que combina el conocimiento acerca de la enseñanza con el conocimiento sobre las matemáticas. Se utiliza al momento de realizar acciones en las cuales se tiene que decidir la secuencia de las tareas, con cuál ejemplo iniciar o escoger apropiadamente las representaciones más adecuadas a cada situación (Ribeiro *et al*, 2010).
- *Knowledge of Content and Curriculum* (KCC), que está representado por el conjunto de programas que se diseñan para la enseñanza de temas específicos y temas a un nivel determinado, la variedad de materiales educativos disponibles en relación con los programas, y el conjunto de características que sirven como indicaciones y contraindicaciones para el uso del plan de estudios (Sosa *et al*, 2010).

Por su parte, el *Subject Matter Knowledge* se divide a su vez en tres subdominios:

- *Common Content Knowledge* (CCK), que se caracteriza como el conocimiento que posee cualquier persona instruida al nivel correspondiente al que estemos analizando, no siendo único, por tanto, de los profesores de matemáticas. Este subdominio da cuenta también del saber hacer, como hacer una resta o saber dividir (Ball *et al*, 2008).
- *Horizon Content Knowledge* (HCK), que es presentado por Ball y sus colegas (2008) como el conocimiento de cómo los temas de matemáticas se relacionan a lo largo de todo el currículum. También incluye una visión útil para ver las conexiones con las ideas

¹ Se denomina SIDM al Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática, espacio para la discusión y producción investigativa en dicha área y que tiene sede en la Universidad de Huelva, España.

matemáticas posteriores. Estudios más recientes han ido agregando características a este subdominio, de manera que se habla también del conocimiento de la trayectoria de un contenido matemático a lo largo de las diversas etapas educativas, así como las conexiones intra y extramatemáticas. En el HCK incluimos también las habilidades que tienen los profesores para saber la importancia que tiene un determinado contenido matemático durante su trayectoria curricular (Sosa *et al*, 2010).

- *Specialized Content Knowledge* (SCK), que se define como el conocimiento matemático que va más allá del que se espera de cualquier adulto bien educado (Ball *et al*, 2008). Mientras que en el CCK consideramos el saber hacer, en el SCK se incluye el saber por qué se hace así, lo que permite que el profesor pueda explicar la procedencia matemática de los errores de los alumnos. Este subdominio ha sido considerado uno de los aportes más relevantes de este modelo, según sus autores y otros investigadores (por ejemplo, Herbst & Kosko, 2012) en Matemática Educativa.

3. MÉTODO

Derivado del interés por profundizar la noción de conocimiento especializado, nos propusimos realizar una revisión bibliográfica de documentos en los que se define o se hace uso del SCK. (Delaney, Ball, Hill, Schilling & Zopf, 2008; Hill, Ball & Schilling, 2008; Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep & Ball, 2008; Knapp, Bomer & Moore, 2008; Krauss, Baumert & Blum, 2008; Carreño & Climent, 2009; Godino, 2009; Kazemi *et al*, 2009; Markworth, Goodwin & Glisson, 2009; Suzuka *et al*, 2009; Ribeiro, Monteiro & Carrillo, 2010; Sosa & Carrillo, 2010; Castro, Godino & Rivas, 2011; Herbst & Kosko, 2012; Rivas, Godino & Castro, 2012) Esta revisión nos proporcionó distintos puntos de vista sobre la naturaleza de este conocimiento y una idea de cómo se entiende éste en la comunidad que lo reconoce como uno de los mayores aportes del MKT.

Además de la revisión teórica y la sistematización de la información de estos documentos, hemos desarrollado algunos de los ejemplos más representativos del SCK. Dichos ejemplos son tareas específicas del profesor en las cuales se requiere del uso de conocimiento especializado.

4. RESULTADOS

El análisis del SCK nos llevó a reconocer dos elementos en los cuales se apoyan los autores para definirlo: 1) la profesión, que aparece al definir el SCK en términos de un conocimiento que es único del profesor y que, aunque algunas otras profesiones podrían tenerlo, en el caso del profesor de matemáticas es indispensable, y 2) el CCK, que se identifica en las definiciones del SCK como una ampliación del CCK, es decir, el SCK va más allá del CCK pero sin hacer uso de conocimientos de los alumnos o conocimiento de la enseñanza. Estos elementos son identificables en la definición de partida en Ball *et al* (2008). Cabe señalar que ninguna de las definiciones encontradas caracteriza la naturaleza del conocimiento en sí, sino que se recurre a agentes externos. Enfatizaremos que el SCK está definido como un conocimiento puramente matemático, los elementos de enseñanza y aprendizaje no intervienen en él.

Definir de manera extrínseca al conocimiento plantea cómo saber, por ejemplo, que un cierto tipo o forma de conocer un contenido sea propia del profesor de matemáticas y no lo sea de otra profesión, ¿acaso se requiere analizar a cada una de las profesiones para determinarlo? Asimismo, la definición a través del CCK nos genera la dificultad de identificar cuál es el

conocimiento que cualquier persona instruida debería saber a cierto nivel, lo cual depende de aspectos generales (como el tipo de sistema educativo) o aspectos puntuales (las intenciones educativas en el aula).

A nuestro parecer, la noción de Especializado en el MKT responde a que se le define con actividades propias del profesor de matemáticas, es decir, se define en términos de lo que permite hacer la posesión ese tipo de conocimiento: “encontrar un ejemplo para desarrollar un tema matemático específico, [...] conectar el tema que se enseña con temas de años anteriores o del futuro [...], modificar tareas para hacerlas más fáciles o difíciles” (Ball et al., 2008, pág. 400), entre otras. Estas actividades son claramente específicas del profesor, pero ¿cuál es conocimiento de base que permite realizarlas? A continuación presentamos uno de los ejemplos más representativos de SCK. Lo hemos elegido para desarrollarlo y averiguar el conocimiento base que permite abordarlo.

Este ejemplo ha sido redactado por sus autores (Ball *et al*, 2008) en forma de tareas específicas de la enseñanza. En el intento por identificar de manera explícita las características del conocimiento puramente matemático que demanda la resolución de estas tareas, la afrontamos paso a paso desempaquetando la información.

En la Figura 1, se muestra una sustracción y un algoritmo habitual para resolverla, además de dos posibles errores en la resolución de la resta. Siendo la detección de errores una tarea específica del profesor, se declara que el conocimiento matemático involucrado en el análisis de los procedimientos que conducen a éste será SCK.

Sobre este ejemplo, los autores hacen el siguiente análisis:

...en el ejemplo de la sustracción [...], reconocer una respuesta errónea es conocimiento común del contenido (CCK), mientras que dimensionar la naturaleza del error, especialmente un error no familiar, normalmente requiere agilidad en el pensamiento acerca de los números, atención hacia los patrones, y flexibilidad de pensamiento sobre los significados en formas que son distintivas del conocimiento especializado (SCK). En contraste, la familiaridad con errores comunes y decidir cuáles de estos errores son cometidos normalmente por los estudiantes son ejemplos de conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS), (p. 401).

En este caso observamos que se hace una caracterización del SCK de la cual podemos cuestionarnos, por ejemplo, ¿A qué se refieren con dimensionar la naturaleza del error?, ¿Qué significa que un error no sea familiar?, ¿Qué significa tener agilidad de pensamiento numérico o flexibilidad de pensamiento sobre los significados?, ¿A qué se refiere el ir más allá de la solución de la resta? Además podríamos preguntarnos ¿Qué en esto es puramente matemático?

La resta con reagrupación.

Se presenta la resta:

$$\begin{array}{r} 307 \\ - 168 \\ \hline \end{array}$$

La mayoría de los lectores conocerán un algoritmo para producir la respuesta 139, tal como el siguiente:

$$\begin{array}{r} 2 \ 0 \\ \cancel{3}07 \\ - 168 \\ \hline 139 \end{array}$$

Muchos de los estudiantes de tercer grado luchan con el algoritmo de la sustracción, a menudo cometen errores. Un error común es el siguiente:

$$\begin{array}{r} 307 \\ - 168 \\ \hline 261 \end{array}$$

Considere otro error que los profesores deben confrontar cuando enseñan este problema de sustracción:

$$\begin{array}{r} 307 \\ - 168 \\ \hline 169 \end{array}$$

Figura 1: La resta con reagrupación (Ball *et al*, 2008, pp. 396-397).

A continuación presentamos algunos de los argumentos matemáticos que nos ayudan a respaldar la identificación y caracterización del origen de cada uno de los errores propuestos en el ejemplo.

Con respecto al primer error, el procedimiento utilizado consiste en restar el dígito más pequeño al más grande en cada uno de las tres columnas, se puede afirmar que el estudiante no distingue relación entre la primera y segunda fila de la resta, tal como afirman Ball *et al.* (2008). El conocimiento que permite llegar a esta conclusión es la interpretación de la resta como la distancia que hay entre dos números.

La interpretación de Ball *et al* (2008) sobre el segundo error se centra en la falta de consideración del valor posicional al momento de reagrupar. A esto añadimos la consideración de que dentro del procedimiento se asocia al cero con la ausencia de valor, por lo que no puede “prestar”, forzando a pedirle prestado al 3. Los conocimientos que posibilitan hacer esta afirmación son los de las diferentes interpretaciones del cero y el uso y justificación del algoritmo de la resta.

En ambos ejemplos se requiere conocimiento sobre la notación desarrollada de un número para interpretar la razón de este algoritmo de la sustracción.

Los conocimientos explicitados en el análisis anterior (uso y justificación del algoritmo de la resta, notación desarrollada de un número, la resta como distancia entre dos números y las interpretaciones del cero) podrían categorizarse como SCK, puesto que se refieren a conocimientos que usa el profesor para dar o evaluar las explicaciones matemáticas del porqué de estos errores, además de atender a su detección y análisis. Sin embargo, nosotros consideramos que no hay evidencias que nos permitan garantizar que estos conocimientos puramente matemáticos son exclusivos de la labor del profesor, además, todos ellos podrían ser categorizados como conocimiento común del contenido dependiendo de las creencias que el investigador tenga acerca de la forma en la que el estudiante debe conocer este contenido.

Si bien, en esta comunicación sólo presentamos un ejemplo, se realizó un análisis idéntico con cada uno de los encontrados en las referencias mencionadas en la sección “Método” de este mismo documento, localizando que las tareas específicas demandan del profesor conocimiento de significados, propiedades y definiciones de los tópicos matemáticos involucrados. Ahora bien, sería natural preguntarnos si estos conocimientos son especializados del profesor de matemáticas. Asumimos que la respuesta es negativa. No vemos una manera especial de mirar el contenido involucrado, ni tampoco conocimiento de un tipo de matemática especial a la que no requieran tener acceso los estudiantes u otros profesionales. Lo que sí es evidente es un uso específico de esos conocimientos. Fue notoria la dificultad de delimitación entre el CCK y el SCK, más aún, al tomar en cuenta la intención didáctica era imposible no vincular el SCK con el KCS.

5. CONCLUSIONES

¿Qué es especializado en el conocimiento del profesor de matemáticas? Apoyándonos en Shulman (1986), podemos distinguir componentes (desde una perspectiva analítica) del conocimiento profesional de un profesor, algunas de las cuales se refieren a la materia que dicho profesor enseña. Es esta parte específica, asociada al objeto de enseñanza y aprendizaje, la que interesa al investigador y al formador en el área de Didáctica de la Matemática. Es ésta también la principal aportación de Shulman. Por su parte, el equipo de Ball subraya el conocimiento matemático en esta parte específica y es precisamente el carácter matemático lo que plantea problemas al aplicarse al conocimiento didáctico del contenido.

En el grupo de investigación SIDM de la Universidad de Huelva tratamos de enfocar la especialización desde otra perspectiva. Hablamos, en lugar del conocimiento especializado del contenido, del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (*Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* –MTSK). Intentamos alejarnos de la idea del conocimiento matemático para la enseñanza y pensamos en el conocimiento del profesor de matemáticas que sólo tiene sentido para él.

La especialización del MTSK permite diferenciarlo del PPK (conocimiento de pedagogía y psicología general), del XTSK (conocimiento especializado del profesor de otra materia) y del MYSK (conocimiento especializado de otro profesional de la matemática).

Las tareas profesionales ayudan a definir el conocimiento del profesor y su diferenciación del conocimiento de otros profesionales, con los que, no obstante, coincidirá parcialmente. Por ejemplo, un profesor de matemáticas tiene que saber calcular la función derivada de una función, al igual que otros matemáticos cuya profesión sea distinta, como el investigador en Análisis Matemático o el ingeniero. Ahora bien, las preguntas que el profesor se formula en relación con la derivada, lo que el profesor problematiza, es muy distinto a lo que problematizan los otros profesionales.

Al aplicar una herramienta estadística, el farmacéutico no se plantea los fundamentos matemáticos de una distribución, pues su interés se centra en los resultados en relación con la bondad de un tratamiento, mientras que al matemático interesan dichos fundamentos y se plantea la posibilidad de que otra distribución pueda modelar mejor el fenómeno; y, por su parte, el profesor se preocupa por cómo hacer que sus alumnos comprendan las características y propiedades de esa distribución, y la distinguen de otras similares.

Para abordar estos problemas, para enfrentarse a estos desafíos que el mismo profesor se plantea, ha de disponer de un amplio bagaje de conocimientos que incluye, entre otros, el conocimiento matemático que comparte con otros matemáticos, el conocimiento de la idoneidad de una determinada estrategia didáctica en relación con el curso y con el objeto matemático en cuestión, el conocimiento del proceder habitual del alumnado (errores, dificultades, obstáculos, procedimientos habituales correctos e incorrectos) y su correspondiente fundamento (correcto o incorrecto) matemático, y el conocimiento de relaciones de ese contenido con otros estudiados o por estudiar.

6. AGRADECIMIENTOS

Los autores son miembros del proyecto de investigación “Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento” (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

7. REFERENCIAS

- Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Carreño, E. y Climent, N. (2009). Polígonos: conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII*, 187-196. Santander: SEIEM.
- Castro, W., Godino, J. D. y Rivas, M., (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 25, 73-88.
- Delaney, S., Ball, D. L., Hill, H., Schilling, S. & Zopf, D. (2008). Mathematical knowledge for teaching: adapting U.S. measures for use in Ireland. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 171-197.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *UNION Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Herbst, P. & Kosko, K. (2012). Mathematics Knowledge for Teaching High School Geometry. *Proceedings of the 34th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Kalamazoo, MI.
- Hill, H., Ball, D. L. & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research of Mathematics Education*, 39(4). 372-400.
- Hill, H., Blunk, M., Charalambous, C., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, 26, 430-511.
- Kazemi, E., Elliott, R., Lesseig, K., Mumme, J., Carroll, C., Kelley-Petersen, M. (2009). Doing Mathematics in Professional Development to Build Specialized Content Knowledge for Teaching. In D. S. Mewborn & H. S. Lee (Eds.). *AMTE Monograph, 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers*, 171-186. San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Educators.
- Knapp, A, Bomer, M., Moore, C., (2008). Lesson Study as a learning environment for mathematics coaches. In O. Figueras, & Sepúlveda, A. (Eds.). *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of*

Mathematics Education, and the XX North American Chapter Vol. 1, XXX-YYY. Morelia, Michoacán, México: PME.

- Krauss, S., Baumert, J., Blum, W., (2008). Secondary mathematics teachers' pedagogical content knowledge and content knowledge: validation of the COACTIV constructs. *ZDM Mathematics Education*, 40, 873–892.
- Markworth, K., Goodwin, T., Glisson, K. (2009). The Development of Mathematical Knowledge for Teaching in the Student Teaching Practicum. In D. S. Mewborn & H. S. Lee (Eds.). *AMTE Monograph, 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers*. 67–83. San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Educators.
- Ribeiro, M., Monteiro, R., Carrillo, J. (2010). ¿Es el conocimiento del profesorado específico de su profesión? Discusión de la práctica de una maestra. *Educación Matemática*, 22(2), 123-138.
- Rivas, M., Godino, J. D. y Castro, W. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema*, Río Claro, 26(42B), 559-588.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Sosa, L., Carrillo, J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV*, 569-580. Lleida: SEIEM.
- Suzuka, K., Sleep, L., Ball, D. L., Bass, H., Lewis, J. M., & Thames, M. H. (2009). Designing and Using Tasks to Teach Mathematical Knowledge for Teaching. In D. S. Mewborn & H. S. Lee (Eds.). *AMTE Monograph Series, 6. Scholarly Practices and Inquiry in the Preparation of Mathematics Teachers*, 7-24. San Diego, California: Association of Mathematics Teacher Educators.