ESTUDIANDO LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE FRACCIÓN EN SITUACIONES DE MEDICIÓN, DIVISIÓN Y EN LA RELACIÓN PARTE-TODO

Ivón García, Guadalupe Cabañas-Sánchez
bony_999@hotmail.com, gcabanas.sanchez@gmail.com
Universidad Autónoma de Guerrero
Reporte de investigación
Medio superior (16-18 años)

Resumen
El artículo analiza el aprendizaje construido por estudiantes de un bachillerato, acerca del concepto de fracción. Nos apoyamos en un estudio sobre los significados de este concepto, así como de una noción de significado, que se discute en términos de comprensión de conceptos matemáticos, en las que destacan cuatro categorías: identificación, discriminación, generalización y síntesis. El estudio reporta que en situaciones de medición y la relación parte-todo, cuando la fracción aparece en un contexto continuo, como la recta a los estudiantes les resulta complejo trabajar tanto con en la partición como con el valor posicional. Muy pocos hacen uso de propiedades matemáticas y las usan de modo adecuado.

Palabras clave: *Fracción, medición, división, parte-todo.*

1. INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las fracciones ha sido una de las áreas más problemáticas en la enseñanza de la matemática. Las investigaciones evidencian que muchos estudiantes más que desarrollar una comprensión adecuada acerca de este concepto, muestran una fuerte dependencia por los algoritmos, mismos que son aprendidos de memoria y además, a menudo son incorrectos (e.gr. Naik & Subramaniam, 2008; Valdemoros, 2008). Se ha documentado que en la enseñanza básica los niños tienen más éxito para comprender la relación de equivalencia y de orden entre fracciones por medio de magnitudes en situaciones que involucran a la división, que en aquellas referidas a la medición (Nunes, Bryant & Watson, 2007). Se ha evidenciado también, que el discurso matemático escolar en este nivel de enseñanza prioriza el significado del fraccionamiento de la unidad y el dominio en las reglas de cálculo, en detrimento de situaciones que articulen a la medición con la comparación y el reparto, así como con la transformación de medidas (e.g. León & Fuenlabrada,1996).

Nunes, Bryant y Watson (2007) hacen diversas recomendaciones tanto a la enseñanza como a las investigaciones en nuestra disciplina, derivada de la problemática que subyace en torno a los procesos de aprendizaje del concepto de fracción en estudiantes de nivel básico y bachillerato (5-16 años de edad). La que nos interesó atender en este trabajo, es la que sugiere que deberían considerarse en el estudio de la fracción, situaciones vinculadas a la medición y la división para comprender el tipo de razonamiento que desarrollan los estudiantes al resolverlas, ya que las identifican como una de las áreas problemáticas en su comprensión. Es así que nos interesamos por explorar el conocimiento que los estudiantes construyeron en su paso por la escuela secundaria, en torno al concepto de fracción, así como de las relaciones que establecen entre su comprensión conceptual y los procedimientos que emplean al resolver problemas en contextos tanto continuo como discreto en que se presenta el concepto de fracción. Para ello, elegimos como población de estudio a jóvenes matriculados en primer año de bachillerato. En ese contexto, nos planteamos dar respuesta a las preguntas siguientes: a) ¿Cuál es el conocimiento que los estudiantes han construido acerca de las fracciones y cómo lo ponen en juego ante situaciones que involucran a la medición, la división y la relación parte todo?; b) ¿Qué relaciones establecen entre su comprensión conceptual de las fracciones y los procedimientos que les fueron enseñados para y representarlas en contextos tanto continuo como discreto?

2. Orientación teórica

El estudio se sustenta en las investigaciones de Fandiño (2009) y de algunos constructos teóricos definidos por Sierpinska (1996) para la comprensión de conceptos. De Fandiño (2009), retomamos la categoría de significados matemáticos asociados al concepto de fracción, asimismo, de las dificultades que se sabe, enfrentan los estudiantes. Del estudio de Sierpinska (1996), asumimos la noción de significado, quien lo discute en términos de compresión de conceptos matemáticos. La investigadora afirma que una persona comprende algo (objeto de comprensión), cuando logra relacionarlo con un contenido en sus estructuras mentales (bases de comprensión), a través de una serie de operaciones mentales, dentro de un proceso de comprensión compuesto por actos de comprensión que se relacionan entre sí. Es en este sentido que define a la comprensión, en términos de actos de comprensión y los caracteriza por medio de cuatro operaciones mentales que los sujetos realizan en el proceso de comprensión, estas operaciones son:

a) La *identificación* de un objeto entre otros objetos se refiere al acto de reconocer un objeto. Es la operación principal involucrada en los actos de comprensión que consiste en una reorganización del campo de conocimientos, de modo que algunos objetos que hasta ahora eran un mero antecedente, de pronto aparecen como el objeto principal de la descripción; a menudo queremos darle un nombre, o, si ya lo tiene, este nombre inesperadamente y obtiene una categoría de término científico en nuestra mente, porque lo ha interiorizado.
b) *Discriminación* entre dos o más objetos, está presente al momento en que se reconocen diferencias entre dichos objetos, con relación a características invariantes, así como entre sus propiedades.
c) *Generalización.* Se comprende como una operación mental en la cual una situación dada se entiende como un caso particular de otra situación. El término situación es usado en un sentido amplio, desde una clase de objetos (material o mental) a una clase de eventos (fenómeno) a problemas, teoremas o enunciados y teorías. Conduce a un conocimiento que puede extenderse al rango de las aplicaciones; algunas afirmaciones resultan irrelevantes y nuevas posibilidades de interpretación son descubiertas.
d) *Síntesis.* Se entiende como la búsqueda de una relación común, un principio de unificación una similitud entre varias generalizaciones y su comprensión como un todo. Es la percepción de relaciones entre hechos hasta ahora aislados; como un resultado, hechos, propiedades, relaciones, objetos, etc. están organizados en un conjunto consistente.

Los procesos de comprensión se articulan a los de razonamiento, y se manifiestan a través de argumentos verbales y no verbales. Ambos, fueron objeto de análisis en este trabajo.

3. Aspectos metodológicos

Desde el punto de vista metodológico es un estudio de tipo cualitativo, con carácter interpretativo. Se sustenta de cinco actividades, las cuales situaron a los estudiantes a trabajar en un ambiente de lápiz y papel. Los datos provienen de las explicaciones escritas y verbales producto de la interacción entre los estudiantes y el investigador durante el proceso de solución, así como de las notas de campo.

Los participantes

En la exploración participaron 30 estudiantes (15 – 18 años de edad) matriculados en el segundo semestre de un bachillerato de la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG). Los antecedentes académicos de los participantes consistieron de contenidos matemáticos relacionados con números enteros, fraccionarios y decimales que fueron objeto de estudio en la escuela básica, así como del uso que hacen del concepto de número racional y conceptos algebraicos como ecuación, objeto de estudio en el bachillerato (UAG, 2008).

Las actividades y su aplicación

Las actividades fueron presentadas a través de instrucciones y preguntas, y situaron a los participantes a trabajar con las fracciones en dos contextos, en el continuo y en el discreto. Los significados considerados en su diseño fueron el de medida, relación parte-todo, como operador, cociente y razón. Se resolvieron en equipo, conformados de tres integrantes. La organización de estos grupos de trabajo quedó a cargo de la profesora titular del curso de matemática II en el que se llevó a cabo la exploración. El criterio convenido para esta forma de organización, es que en cada uno ubicara a un líder académico, a fin de que promovieran las discusiones de los equipos. Se constituyeron diez equipos que denominamos como E1, E2,…E10. Las actividades se aplicaron en dos sesiones de dos horas cada una, las que fueron videograbadas para su posterior transcripción y análisis.

Aspectos considerados en el análisis de las actividades

El análisis de los resultados tomó como base los argumentos presentados por los estudiantes. Los aspectos a considerar fueron los significados asociados al concepto de fracción, así como las acciones mentales que Sierpinska (1996) categoriza para el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos.

4. DISCUSIÓN Y ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Por cuestiones de espacio, discutimos los resultados de los argumentos presentados por los equipos a una de las actividades, a la que se articulan los significados siguientes: Relación parte-todo, operador, cociente y medida.

Actividad 1: Los dados. Van a hacer tres lanzamientos con dos dados, cada vez que realicen uno, obtendrán dos números, con los que formarán números fraccionarios, como se muestra en el dibujo adjunto.

a) Registra las fracciones que obtuviste en la siguiente tabla:

Primer lanzamiento		Segundo lanzamiento		Tercer lanzamiento	

b) Ubica de menor a mayor, cada una de las fracciones que obtuviste en una recta numérica. Apóyate en la recta siguiente:

c) ¿Qué fracción es mayor? ___________________________

¿Qué fracción es menor? ___________________________

d) Escribe una fracción distinta a las que registraste en la tabla, que se encuentre entre 4/7 y 2/3.

Discusión y análisis

La solución de la actividad involucra el lanzamiento de dos dados y es a partir del resultado de los tres lanzamientos, que se espera, los estudiantes *identifiquen* las fracciones formadas, en seguida, llamarlas por su nombre y además, estas que pueden expresarse mediante otra, de forma equivalente e incluso por medio de una expresión decimal. Para representar las fracciones, una de las exigencias de la actividad, debían compararlas, a fin de determinar (o *discriminar*) cuál es mayor, menor o igual según el caso. En ese proceso, podrían transformarlas, ya sea a su expresión decimal o a otra equivalente y posteriormente representarlas en la recta de forma adecuada (*síntesis*).

Al transformar las fracciones a otra equivalente, se esperaba que se percibiera por los estudiantes, que todas pueden expresarse en términos de un mismo numerador o bien de un mismo denominador (*generalización* y *síntesis*), en otros casos, que se dieran darse cuenta que una fracción propia también puede representarse mediante un número entero y una fracción (*síntesis*) y seguidamente representarlas en la recta. Posteriormente debían determinar cuál de esas fracciones es mayor y cual es menor. Para culminar las exigencias de la actividad, debían determinar una fracción que se encuentre entre 4/7 y 2/3.

Análisis de la actividad en equipo

a) *Fracciones formadas con los lanzamientos*
Como resultado de los tres lanzamientos los equipos formaron tres tipos de fracciones: unitaria, equivalentes y enteras, que registraron en la tabla. Las fracciones unitarias las relacionaron con la unidad, las fracciones enteras con el número entero correspondiente y también reconocieron fracciones equivalentes.

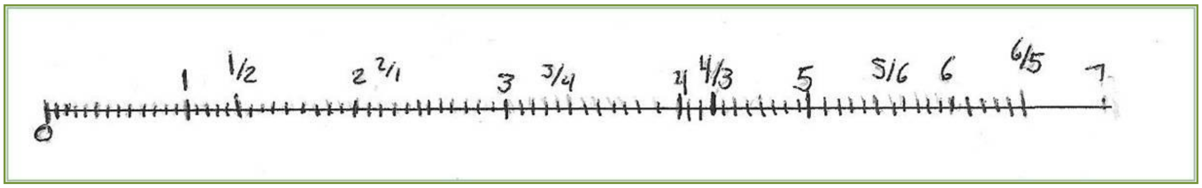
b) *Representación de las fracciones en la recta*
Una relación matemática que apareció articulada a esta actividad, tiene que ver con la relación de orden (de las fracciones), en un contexto continuo. Es claro que para ubicar las fracciones que formaron debían compararlas, en ese proceso, recurrieron a la equivalencia entre fracciones o a una expresión decimal o a ambos casos. Sin embargo, aun cuando transformaron una fracción a otra expresión, ya sea decimal o equivalente para compararlas, pocos tuvieron éxito (80%) para distinguir cuándo una es mayor o menor que otra. Observamos por ejemplo, que dos equipos (20%) trasformaron las fracciones a su correspondiente expresión decimal, uno (10%) recurrió a las fracciones equivalentes con común denominador, y; siete equipos (70%) las representaron sin transformarlas. Sin embargo, sólo el 30% tuvo éxito para representarlas de manera adecuada, analizaremos casos de ambos tipos, en las secciones siguientes.

b.1) *Partición del continuo.* La partición del continuo resultó complejo para una mayoría de estudiantes (ocho equipos), así como la comprensión del papel desempeña el numerador y el denominador en una fracción, particularmente en las impropias. Observamos por ejemplo, que una mayoría dividió la recta en partes enteras y estas a su vez, en décimos, sin éxito. Al momento de ubicar las fracciones sobre dicha recta, al numerador lo usaron para representar una parte entera, y al denominador, como el número de décimos que posicionarían a partir de "la parte entera". Un caso fue E9, quien además de esas complejidades que enfrentó, tampoco tenía claro la división del continuo en décimos, esto es, el significado de décimos.

Fracciones formadas por E9:

Primer lanzamiento		Segundo lanzamiento		Tercer lanzamiento	
$\frac{6}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{2}$

Representación de las fracciones sobre la recta, por E9:



Al indagar sobre la forma de proceder de E9 una vez que resolvieron la actividad, explicaron que primero dividieron la recta en siete partes, en seguida, que cada parte la dividieron en décimos. No obstante, sus argumentos escritos indican lo contrario ya que aparecen más de diez décimos en cada partición del continuo. Vamos sus explicaciones a este respecto.

> Equipo 9: Pusimos una rayita … ese es el cero … después pusimos diez rayitas … y pusimos el uno … después del uno al dos otras diez y así … hasta que llegamos al siete.
>
> Entrevistador: ¿Cómo decidieron que tres cuartos iba aquí … en ese lugar?
>
> Equipo 9: Comenzamos a contar a partir del tres … luego cuatro rayitas
>
> Entrevistador: ¿Por qué desde el tres?
>
> Equipo 9: Porque es … tres cuartos es el tres … y cuatro rayitas

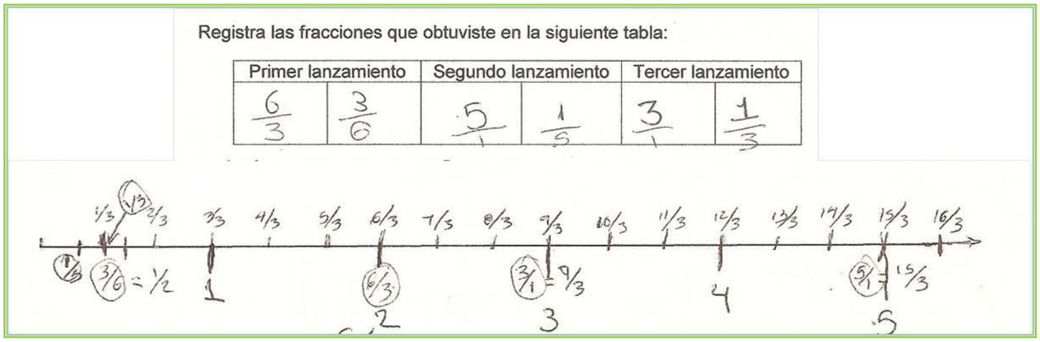
Al menos dos de los diez equipos ubicaron con éxito las fracciones sobre la recta, como E3, quien se auxilió de transformaciones, esto es transformaron las fracciones a otras, equivalentes.

Su método consistió en convertir los denominadores a múltiplos de tres, excepto la fracción 1/5. Se apoyó de este tipo de transformaciones para dividir las partes enteras del continuo en tres partes iguales y con ello facilitar su ubicación.

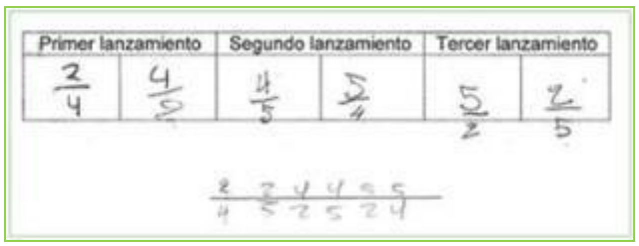
Se reconoce que el procedimiento usado por E3 para ubicar las fracciones sobre el continuo, se sustenta en la propiedad de orden de las fracciones, siguiente:

> "Dadas dos fracciones con el mismo denominador, es menor, la que tiene menor numerador".

Esta forma de proceder también fue usada por otro de los equipos, E2.

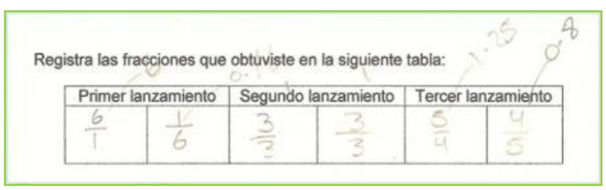


b.2) *Sin participación del continuo*. Tres equipos representaron las fracciones sin dividir la recta dada. Para ubicarlas, primero compararon los numeradores y si reconocían que había más de uno representado mediante un mismo dígito, procedían a comparar denominadores. La comparación de denominadores fue básica para determinar cuál de las fracciones con igual numerador era menor o mayor. De este modo, establecían que la fracción menor, era la del denominador más pequeño, tal como lo hizo E7 (Véase la figura siguiente).

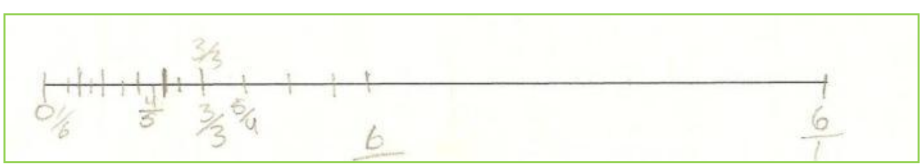


b.3) *Transformación de fracciones a su equivalente en número decimal.* En los casos en que transformaron la fracción a decimal (lo asocian al significado de cociente), solo E4 tuvo éxito. Veamos algunos de sus procedimientos y respuestas.

Fracciones formadas por E4



En su proceder, E4 transformó 1/6 a 0.16, 5/4 a 1.25 y 4/5 a 0.8. Al ubicar las fracciones sobre la recta, lo hizo como sigue:



Independientemente de la dificultad de E4 para partir el continuo, el convertir a decimal las fracciones le ayudó a comprender mejor la posición en que las ubicaría. Planteamos la hipótesis de que entienden mejor el valor posicional de los números decimales, sin embargo, sabemos que no es la generalidad.

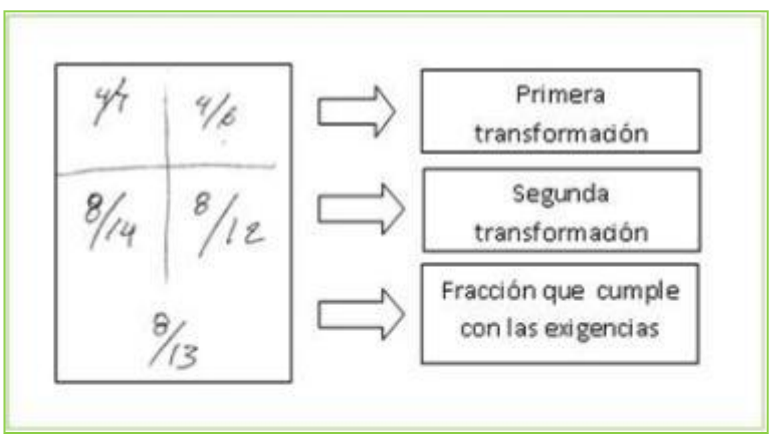
Para dar respuesta a la pregunta del inciso c, nos percatamos que una mayoría de equipos se basó en la posición en que ubicaron las fracciones sobre la recta, para determinar cuál era la menor y cuál la mayor, aun cuando lo hicieron de modo incorrecto. Aunque este hecho no lo percibieron, ya que para ellos sus procedimientos y conclusiones, eran adecuados. E9, por ejemplo, al momento de ser cuestionados sobre su decisión, argumentó:

> Entrevistador: Para decidir cuál es la fracción mayor y cual menor… ¿Qué hicieron?
>
> E9: Elegimos a un medio como menor y a seis quintos como la mayor.
>
> Entrevistador: ¿Por qué?
>
> E9: Porque un medio está más cerca del cero y seis quintos está más lejos.

Mientras que para la última parte de la actividad, donde se les pedió encontrar una fracción diferente a las que habían formado a través de los tres lanzamientos con los dados, con la condición que se ubicara entre 4/7 y 2/3, el análisis reporta que la fracción determinada por una mayoría no atendió a las exigencias, debido al uso erróneo de un método para comparar fracciones. El método que siguieron fue el usado por E7, que comparó numeradores y en seguida, los denominadores. Esta forma de proceder da cuenta de su nivel de comprensión, según las categorías que caracteriza Sierpinska (1996), no identifican cuando una fracción es mayor o menor que otra debido a que desconocen o no recuerdan el método. Sin embargo de todos los equipos, sólo E3 determinó la fracción que cumplía las con condiciones, apoyándose para ello en una de las propiedades de orden de las fracciones. La propiedad que aplicaron fue la siguiente:

> "Si las fracciones tienen igual numerador, será menor la que tenga mayor denominador"

Se dieron cuenta por ejemplo, que las fracciones 4/7 y 2/3 tenían distinto tanto el numerador, como el denominador, por ello transformaron 2/3 a otra equivalente que cumpliera con la propiedad, es decir, la transformaron a 4/6, así tendrían igual numerador.



Una vez realizado este procedimiento, observaron que entre 4/7 y 4/6 no había ninguna "consecutiva" entre ellas que cumpliera con las exigencias de la situación, así como con la propiedad a la que recurrieron. Por ello, realizaron una nueva transformación, ahora, a las fracciones 4/7 y 4/6. Consistió en multiplicar tanto su numerador como el denominador por 2. De este modo obtuvieron 8/14 y 8/12. A partir de esta transformación, reconocieron que 8/13 cumplía con las exigencias y la propiedad en la que sustentaron sus procedimientos.

5. REFLEXIONES FINALES

Las explicaciones de los estudiantes en la actividad 1, dan cuenta que, en lo que atañe a las situaciones de medición y la relación parte-todo, cuando la fracción aparece en un contexto continuo, como la recta (medida de longitud) les resulta complejo trabajar con la tanto con la partición como con el valor posicional. En este contexto, una dificultad aparece ligada a:

a) La división del entero, que usualmente lo hacen en décimos (algunos de forma errónea), aun cuando el denominador de la fracción sea distinto de diez. Planteamos la hipótesis, que es debido a propio sistema decimal y a su enseñanza. Incluso hubo quien evidenció dificultades para dividir en décimos las unidades enteras, como E9.

b) La concepción equivocada que tienen acerca del concepto de fracción, en razón de que conciben al numerador como parte entera y al denominador como la parte fraccionaria y usan este conocimiento para ubicarlas sobre la recta. Incluso planteamos la hipótesis que una mayoría no tienen claro el rol que desempeñan tanto el numerador como el denominador en este objeto matemático.

Una relación matemática que apareció articulada a las situaciones planteadas es la de orden de las fracciones, en un contexto continuo. Los estudiantes debían ubicar sobre una recta seis fracciones formadas por ellos al azar, como resultado del lanzamiento de dos dados. Para ubicarlas, debían compararlas. Se observó que en ese proceso recurren a la equivalencia entre fracciones o a una expresión decimal o a ambos casos. Sin embargo, aun cuando transforman una fracción a otra expresión, ya sea decimal o equivalente para compararlas, les resulta difícil distinguir cuándo una es mayor o menor que otra, como el caso de E7. Algunos estudiantes (E2 y E3) compararon las fracciones apoyándose en la relación de orden siguiente:

> "Dadas dos fracciones con el mismo denominador es menor la que tiene menor numerador"

Ello da cuenta de su nivel tanto de comprensión como de abstracción.

6. REFERENCIAS

Fandiño, M. (2009). *Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos*. Bogotá:Magisterio.

León, H & Fuenlabrada, I. (1996). Procedimiento de solución de niños de primaria en problemas de reparto. *Revista Mexicana de Investigación Educativa 1* (2), 268-283.

Nunes, T., Bryant, P. y Watson, A. (2007). *Key Understanding in Mathematics Learning*. England: University of Oxford.

Naik, S. & Subramaniam, K. (2008). Integrating the measure and quotient interpretation of fractions. In O. Figueras and A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX* (Vol. 4, pp. 17-24).

Sierpinska, A. (1996). *Understanding in Mathematics*. London: The Falmer Press

Valdemoros M. (2004). Lenguaje, fracciones y reparto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 7* (3), 235-256.