CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS. FASE FILOSÓFICA

Lorena Jiménez Sandoval, Gustavo Martínez Sierra
Universidad Autónoma de Zacatecas, CICATA-IPN
lorejim79@gmail.com, gmartinezsierra@gmail.com
Reporte de investigación
Superior

Resumen
Los resultados de la investigación que se presentan, aportan elementos para entender las dificultades que se generan con nivel de abstracción y el lenguaje formal bajo los cuales se abordan materias en las que se estudian Estructuras Algebraicas. Se muestra cómo es que el nivel de abstracción y el enfoque formal que las caracterizan tienen su origen en una intencionalidad de un colectivo de matemáticos que compartían algunos principios de la corriente formalista impulsada por David Hilbert y que pretendían resolver un problema metamatemático. La metodología de un análisis histórico y la construcción de un sistema conceptual basado en constructos teóricos de P. Berger e Y. Chevallard; permitieron realizar una interpretación útil para caracterizar la Construcción Social de las Estructuras Algebraicas.

Palabras Clave: *Construcción social, conocimiento, difusión, representación, reproducción.*

1. INTRODUCCIÓN

Los problemas de aprendizaje de las Estructuras Algebraicas que muestran los estudiantes, radican fundamentalmente en el nivel de abstracción, el lenguaje formal implícito en su teoría y la función que desempeñan en la sistematización de diferentes estructuras particulares (Dubinsky, Dauthermann, Leron & Zazkis, 1994; Simpson & Stehlílková, 2006; Weber, 2002, Hazzan, 1999 y Hazzan, & Zazkis 2005). El análisis preliminar que se realizó como parte de la metodología que se empleó en la investigación de la cual se presentan algunos resultados, muestra que el concepto de Estructura Algebraica emerge una vez que varias estructuras particulares, que surgen en diversos campos de la matemática, en momentos y etapas diferentes; son axiomatizadas, clasificadas y sistematizadas posteriormente a su construcción desde un nivel, que incluso podría considerarse metamatemático (empleando los métodos, símbolos y significados matemáticos para estudiar y construir la axiomatización, clasificación y sistematización de la matemática misma).

Estas son las razones por las que centramos el interés de la investigación en explicar cómo se construyeron socialmente las Estructuras Algebraicas, buscando responder cómo, por qué y debido a quién, las estructuras algebraicas sobrevivieron procesos de validación, legitimación e institucionalización de conocimiento que las dispusieron como conocimiento matemático didácticamente significativo y justificar su presencia en el ámbito escolar.

2. ANTECEDENTES

Desde la matemática educativa un estudio de construcción social del conocimiento puede darse en dos planos: 1) El contexto escolar cuya finalidad es entender cómo los estudiantes y/o profesores construyen el conocimiento matemático escolar y los factores que de una u otra manera inciden en esta construcción y, 2) La construcción social del conocimiento matemático como objeto de saber y su devenir hasta convertirse en objeto de enseñanza para entender o dar sentido a su presencia en el sistema escolar.

La literatura consultada permite por un lado, dar cuenta de la escasa investigación que se ha hecho para analizar el devenir de las Estructuras Algebraicas para llegar al aula, y por otro, ubicar posibles relaciones entre los obstáculos que tienen los estudiantes en su aprendizaje, el origen epistemológico de éstas y los propósitos de los integrantes de diferentes comunidades académicas que intervinieron y llevaron las Estructuras Algebraicas al salón de clase.

En Romero y Rico (1999) la construcción social se refiere a aquellos factores que inciden en la generación del clima en donde transcurre el proceso de enseñanza, los aspectos actitudinales en este mismo escenario y a los factores que están presentes en la definición de los límites de los objetivos cognitivos en las diferentes comunidades que inciden en esta.

El estudio de Dubinsky, Dauthermann, Leron y Zazkis (1994) enfatiza las dificultades que tienen los alumnos en el encapsulamiento de procesos para su conversión en objetos en el aprendizaje de los grupos cociente, que son particularmente ilustrativos de la comprensión de la estructura de grupo.

Los resultados de la investigación que presentan Simpson y Stehlílková (2006), dan cuenta de cómo un *cambio de atención* puede orientar la adquisición del sentido estructural que ellos llaman *aprehensión de la estructura*. Estos autores consideran, que existen problemas de aprendizaje que implican la consideración de aspectos tan generales que forman parte del desarrollo cognoscitivo de quienes estudian Álgebra Abstracta sus resultados permiten afirmar que los estudiantes son incapaces de verbalizar simbólicamente relaciones y propiedades que sí han podido distinguir, como similitudes entre los objetos de una o diversas estructuras, y que esto les impide su articulación.

Weber (2002), reporta cómo los estudiantes que han terminado un doctorado en matemáticas cuentan con estrategias que les permiten resolver problemas de Álgebra Abstracta, eligiendo adecuadamente los teoremas o propiedades aplicables de acuerdo a las hipótesis que tiene el problema a resolver, manipulando correctamente los símbolos que los llevan a clarificar su aplicación, mientras que estudiantes que aún no adquieren un grado académico carecen de este conocimiento estratégico y ensayan la aplicación de diferentes resultados o propiedades antes de identificar alguno que los lleve a la solución del problema que se les ha planteado.

Por su parte Hazzan (1999), plantea que quienes estudian temas del Álgebra Abstracta tienden a *reducir el nivel de abstracción* de diferentes formas para lograr comprenderlos, convirtiéndolos inconscientemente en conceptos mentalmente más accesibles.

Estudios como el de Katz (2007), dan cuenta del devenir histórico de las Estructuras Algebraicas que, como conocimiento matemático que ha pasado por procesos previos a la transposición didáctica, son presa de condicionamientos ideológicos y filosóficos individuales o colectivos que lo hacen poco o más asequible a través de un proceso de enseñanza aprendizaje. El artículo de Katz describe, cómo es que a partir del siglo XX el Álgebra se había convertido en la búsqueda de estructuras comunes a diversos objetos matemáticos para establecer un sistema axiomático que la sistematizara.

3. CONSTRUCCIÓN SOCIAL DEL CONOCIMIENTO

Chevallard (1996) considera que la construcción social del conocimiento comienza una vez que éste es difundido, momento al que se llega luego de que dicho conocimiento ha pasado por un proceso de despersonalización de su productor y comienza a cumplir funciones totalmente diferentes: *reproducción* y *representación* del saber.

En las ideas sociológicas de Berger (1969), este momento se puede identificar como una acción de lo que él llama *externalización* y que describe como "el vuelco permanente del ser humano hacia el mundo, tanto de la actividad física como mental que realiza" (Berger, 1969, p. 14).

Berger considera que la construcción social de la realidad es un proceso dialéctico que ocurre entre la realidad que se asume "como una cualidad propia de los fenómenos que reconocemos como independientes de nuestra propia volición" (Berger y Luckmann, 2001, p. 13) y la actividad física y mental que en ella se realiza. Este proceso dialéctico pasa por tres momentos: *externalización, objetivación e internalización*. La *externalización* es el momento a través del cual el conocimiento se etiqueta como producto humano. La *objetivación* ocurre cuando este producto humano se hace independiente de la manera de pensar y de sentir y "se convierte en una realidad *sui generis"*(Berger, 1969, p. 15). La *internalización* es la reapropiación de esa realidad del mundo objetivo transformada nuevamente por la consciencia subjetiva (Berger, 1969).

El conocimiento, entendido como producto de la actividad cognoscitiva del hombre, se externaliza a través de la *difusión* poniéndolo a disposición de otros por algún medio oral o escrito. Este medio es a través del cual ocurre la objetivación del conocimiento y es el que hace posible su representación y reproducción. La *representación* es la acción que integra un conjunto de símbolos y significados que les dan sentido para conformarse en un lenguaje que permite la difusión. La *reproducción* refiere la acción de emplear el conocimiento, construido por otros y que ha sido internalizado, en un contexto específico. Los productos de estas acciones pueden ser artículos, libros y toda clase de documentos en donde se reportan resultados de una investigación.

Todo individuo produce conocimiento y lo externaliza al seno de una comunidad que le imprime un carácter intersubjetivo y lo hace susceptible, en principio, de ser cuestionado por los mismos integrantes de esa comunidad y posteriormente, ya sea tal cual o modificado, será validado. Es esta comunidad quien finalmente lo producirá como conocimiento científico, producto de la actividad de los científicos y quien, de acuerdo a Chevallard (1996), lo transformará en objeto de saber. La *validez* es así, el proceso mediante el cual, una comunidad académica, reconoce y aprueba la pertinencia de un conocimiento construido por una o un colectivo de personas en un área específica del conocimiento científico, aceptándolo y respaldándolo como una producción propia de esa comunidad académica. La permanencia cultural de estos objetos (su valencia epistemológica, según Chevallard, 1996), dependerá de una comunidad específica y del uso que ésta les dé (Berger 1969).

La *legitimación* ocurre cada vez que un individuo emplea el conocimiento construido por otros en el marco de su propia construcción de conocimiento. Esta legitimación se expresa de manera implícita o explícita habilitándolo, distinguiéndolo y separándolo de su historia para que éste sea incorporado al bagaje cultural y/o científico de una comunidad o, o en su caso, al sistema de enseñanza.

La institucionalización del conocimiento es posible gracias a la intersubjetividad que adquieren los objetos materiales y simbólicos así como las acciones y la intencionalidad de los individuos en una comunidad. Estos objetos, productos de la difusión, representación y reproducción del conocimiento, adquieren un carácter significativo y las acciones se identifican como una forma de actuar que se hace habitual. Esa forma de hacer las cosas, en el marco de significados asociados a los objetos simbólicos y materiales, se constituye en un programa que regula la interacción de los integrantes de la comunidad y que ellos ponen en práctica como modos de ejecución prescritos que gozan de una aceptación generalizada e incondicional (Berger y Luckmann, 1997). Este comportamiento típico como sistema de acciones estructuradas en el marco de intenciones sociales e individuales se llama *práctica institucionalizadora*. Éstas permitirán caracterizar las fases en las que concurren los procesos de validación, legitimación e institucionalización de la construcción social del conocimiento matemático.

La construcción social del conocimiento debe dar cuenta de los momentos de externalización, objetivación e internalización, de los procesos de validación, legitimación e institucionalización del conocimiento, de las comunidades en donde ocurrieron tales momentos y procesos, de los individuos, que como agentes activos de esta construcción social, integran estas comunidades, del rol que tienen en ellas, de las acciones de difusión, representación y reproducción del conocimiento que realizan y de las condiciones socioculturales que enmarcan dichas acciones en el tiempo. Cada uno de estos elementos, se consideran en este escrito, como componentes constitutivas de la construcción social del conocimiento.

La temporalidad y contexto sociocultural en los que ocurren estas acciones las describiremos a través de *fases contextuales*. Estas fases estarán integradas por un periodo de tiempo especifico y se caracterizarán por las acciones de difusión, representación y reproducción del conocimiento de uno o varios *agentes* protagonistas de la fase contextual que prefiguran o sostienen una práctica institucionalizadora.

En la figura 1 se ilustra la relación entre cada uno de los constructos teóricos mencionados en los párrafos anteriores. Al frente integramos los de una fase contextual y superponemos varias fases contextuales para representar que la construcción social del conocimiento ocurre en varias fases contextuales consecutivas.

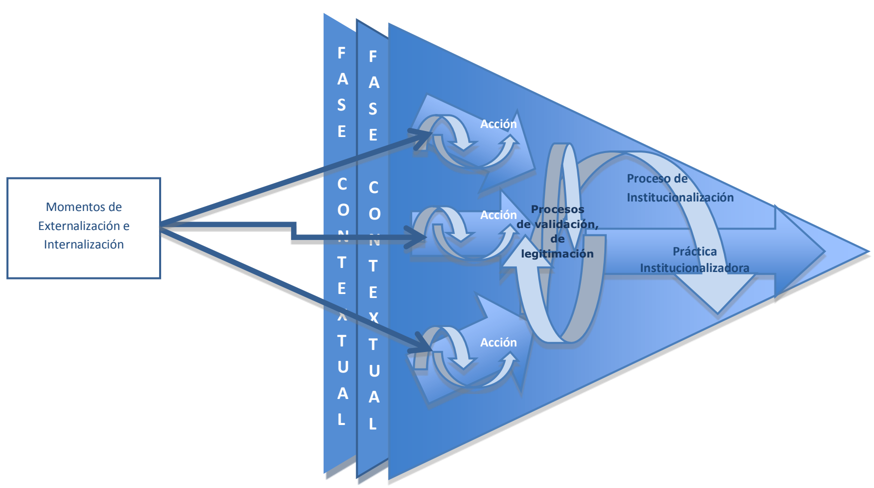

Figura 1. Esquema de la Construcción Social del Conocimiento.

4. METODOLOGÍA

Se realiza una investigación de carácter histórico-epistemológico siguiendo la metodología de un análisis histórico que se propone en González y Sierra (2003), mismo que es usado por García y Juárez (2011). Esta metodología consiste de 5 etapas: 1) planteamiento de la investigación, 2) etapa heurística crítica, 3) análisis de la documentación, 4) etapa hermenéutica y 5) etapa de exposición.

En la *etapa de planteamiento de la investigación* se delimita el tema de investigación. Con base en un primer sondeo del material bibliográfico, se traza una trayectoria posible que permite determinar la factibilidad de la investigación de acuerdo al material que se dispone y a las hipótesis iniciales que se formulan.

En este primer sondeo bibliográfico se ubicó el libro *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, publicado en el 2004, en donde se aborda el origen de las Estructuras Algebraicas desde una perspectiva histórica. El texto permitió trazar una ruta epistemológica de las estructuras algebraicas y establecer cortes en el tiempo para marcar las fases contextuales.

En la *etapa heurística crítica* se lleva a cabo la búsqueda y selección de fuentes documentales que aportarán algún elemento en torno al tema en cuestión. Se elabora una crítica histórica comprobando la autenticidad de la fuente y el aporte que el análisis de dicha fuente puede hacer al alcance de los objetivos planteados en la investigación. En esta etapa se seleccionaron cuatro publicaciones que forman parte de nuestro material de análisis; *A Treatise on Algebra* de George Peacock publicado en 1845, *Lehrbuch der Algebra* de Heinrich Martin Weber publicado en 1895, *Modern Algebra* de B. L. Van der Waerden, publicado en 1930 y *Los Elementos de la Matemática* de Nicolas Bourbaki publicado en 1935.

La *etapa de análisis de la documentación* consiste en estudiar las fuentes teniendo en cuenta criterios históricos, diseñar algún instrumento que permita abordar el objetivo que se haya planteado y la interpretación de los datos a la luz de los análisis realizados. Diseñamos dos fichas como instrumentos para el análisis de contenido; una de estas permite, sin realizar propiamente el análisis de contenido, ubicar la intencionalidad de los agentes al momento de la difusión de las obras. Por cada obra analizada, se ubicó algunos aspectos que permitieron identificar las otras componentes constitutivas de la construcción social de las Estructuras Algebraicas y las recopilamos en una segunda ficha.

La *etapa hermenéutica* es en la que se da respuesta adecuada a las preguntas plantadas en la investigación y se indican las causas de los hechos históricos analizados, esta etapa se realizó por partes y corresponden justamente con las fases contextuales que establecimos en la etapa heurística crítica. Presentamos aquí sólo la caracterización de la segunda fase contextual: *fase filosófica de formalización del álgebra.*

5. FASES CONTEXTUALES

Revisando las Estructuras Algebraicas en su forma actual se puede decir que se caracterizan fundamentalmente por tres aspectos; el trato formal, su función como sistematizadoras de diversas estructuras particulares y su nivel de abstracción.

Para formalizar una teoría matemática ésta debe ser previamente axiomatizada, considerando a los axiomas como puntos básicos, independientes y consistentes entre sí, y sobre los cuales se puede construir una estructura teórica matemática sin contradicciones internas (Rañada, 2003). De acuerdo a Palomar (1971), la axiomatización puede considerarse como el medio mediante el cual, dada una colectividad o conjunto no vacío cualquiera, se determinan ciertas propiedades o condiciones lógicas que son satisfechas por todos los elementos de la colectividad dada y que pueden constituirse en su axiomática.

Una teoría axiomatizada y formalizada contiene un sistema de símbolos que se caracteriza por lo que Berger y Luckmann (2001) llaman *separatividad*, transformando el lenguaje de la teoría en el depósito de bastas acumulaciones de significados y experiencias que lo preservan a través del tiempo y hacen posible su trasmisión a generaciones futuras (Berger & Luckmann, 2001).

Cuando la teoría sirve como modelo matemático para explicar nuevos comportamientos e interpretar o construir nuevas teorías, la búsqueda de interconexiones permiten emplearla en la explicación de comportamientos de otros entes matemáticos diferentes a los que generaron su emergencia. Se establece el inicio de un proceso de sistematización que sólo es posible a través de la abstracción y generalización. Aplicando la teoría como modelo, se busca organizar el conocimiento matemático a partir de esta teoría y convertirla así en un sistema, visión o enfoque teórico que, no sólo explique el fenómeno o comportamiento al que debe su origen, sino que ensanche su dominio para analizar otros fenómenos y comportamientos.

El proceso de conversión de una teoría en un enfoque, visión o sistema teórico, valida y legitima la teoría de origen y la posiciona en la antesala de un proceso de institucionalización; generando su propia estructura de relevancias, que les son adjudicadas socialmente, por integrantes de una comunidad que serán quienes establecerán mediaciones institucionales a los conglomerados de conocimientos que se construyan. Este cúmulo de conocimientos institucionalizado se cristaliza como objeto de saber para ponerse a disposición de otras comunidades, entre ellas, la que lo convertirán en objeto de enseñanza a través del proceso de transposición didáctica.

Según Corry (2004), el método axiomático de la matemática tiene su origen en el planteamiento de David Hilbert de que fuera éste el método de investigación de la matemática. Hilbert defendió la importancia de que un sistema de axiomas quedara totalmente libre de contradicciones (a partir de él y mediante razonamientos lógicos es imposible deducir un enunciado y su negación) para sustentar su consistencia. Hilbert probó la consistencia relativa de la geometría y quería probar la consistencia de las matemáticas en sí mismas. La comunidad de matemáticos de 1870 a 1910 vivieron la preocupación de lo que se llamó “rigorización de la matemática” y que consistió justamente en establecer un sistema axiomático para las teorías matemáticas existentes.

Hilbert fue protagonista de una de las discusiones más importantes en la historia de la matemática y en la que se considera se da la emergencia del Enfoque Estructural. Como resultado de estas discusiones surgen lo que se conoce como corrientes filosóficas clásicas de la matemática: formalismo, logicismo e intuicionismo. Mientras que para los intuicionistas, el significado de un enunciado matemático depende de la habilidad para reconocer, ante cada construcción matemática, si constituye o no una prueba del enunciado y, en tal caso, la aserción del enunciado no se entiende como algo que dice la verdad sino como una afirmación cuya prueba existe o puede ser construida. Los formalistas como Richard Dedekind, fueron explícitos y firmes en que se debe renunciar a la intuición, y en considerar que los símbolos evitan el peligro de recurrir a las asociaciones intuitivas ligadas a las palabras del lenguaje usual. Hilbert propone la formalización de toda la matemática de modo tal que todos en el planeta Tierra pudieran estar de acuerdo en que una demostración es correcta o incorrecta.

Emmy Noether y Emil Artin llevarían por todo el mundo la tradición de Hilbert (Rodríguez, 2000). La internalización que estos autores hicieron de sus ideas fue plasmada en productos de difusión, representando y reproduciendo su conocimiento construido. Van der Waerden luego de ser discípulo de Noether durante siete meses en la universidad de Göttingen, conoció a Artin en la universidad de Hamburgo en donde participó en un curso y planearon de inicio, escribir un libro juntos. Se dice que posterior a una revisión inicial de algunos avances que presento Waerden a Emil, éste le sugiere que continúe escribiendo y lo publique de manera independiente (Rodríguez, 2000). El resultado de este trabajo fue finalmente los dos tomos de *Modern Algebra* en los que Waerden declara: “Based in part on lectures by E. Artin y E. Noether” (Waerden, 1966). A estos textos se atribuye el tratamiento estructural del Álgebra. (Corry, 2004; Hernández, 2009)

El Enfoque Estructural implícito en los trabajos de los citados matemáticos Alemanes proporcionaron a los integrantes del colectivo Bourbaki la inspiración y elementos necesarios para sustentar el Enfoque Estructural para la matemática que proponían en *Los Elementos de la Matemática* y que ponía en claro la meta fundamental de sus publicaciones: dotar a la matemática de una sistematización teórica ante la aparente dispersión que se vivía durante el primer tercio del siglo XX (Hernández, 2009). Las publicaciones de los Bourbaki se posicionaron fuertemente no solo en el ámbito de la matemática misma sino también en el terreno de su enseñanza convirtiéndose así en los que marcaban la diferencia entre lo que se legitimaba como matemáticamente interesante y lo que no.

Considerando los aspectos descritos hasta el momento, dividimos la Construcción Social de las Estructuras Algebraicas en cinco fases: *la Fase de Formalización Incipiente, la Fase Filosófica de Formalización, la Fase de Vivencial de Formalización, la Fase de Sistematización y la Fase de Preámbulo de la Transposición Didáctica del Álgebra* y asociamos a cada fase uno o dos agentes, así como los productos de las acciones de difusión, representación y/o reproducción de conocimiento y lo sintetizamos en la Tabla 1.

		FASES CONTEXTUALES	TEMPORALIDAD	AGENTES	PRODUCTOS DE ACCIONES DE REPRESENTACIÓN, REPRODUCCIÓN Y/O DIFUSIÓN
FORMALIZACIÓN		*FASE DE FORMALIZACIÓN INCIPIENTE DEL ÁLGEBRA*	***1870-1895***	Bourbak ⟷ Dirichlet	*Lehrbuch der Algebra*
		FASE FILOSÓFICA DE FORMALIZACIÓN DEL ÁLGEBRA	***1890-1920***	Hilbert ⟷ Dedekind	• *Über den Zahlbegriff* • *Axiomatisches Denken* • Neubegründung der Mathematik, • Die Logischen Grundlagen der Mathematik, • Über das Unendliche • Die Grundlagen elementaren Zahlenlehre
		FASE VIVENCIAL DE FORMALIZACIÓN Y DEL ÁLGEBRA	***1900-1930***	Noether ⟷ Artín	
SISTEMATIZACIÓN		*FASE DE SISTEMATIZACIÓN DEL ÁLGEBRA*	***1930***	Van der Waerden	*Modern Algebra*
	TRANSPOSICIÓN	*FASE DE SISTEMATIZACIÓN Y PREÁMBULO DE LA TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA DEL ENFOQUE ESTRUCTURAL ÁLGEBRA*	***1935***	Bourbaki → Piaget	• *Elementos de la Matemática* • *Enseñanza de las Matemáticas*

Tabla 1. Fases contextuales de la Construcción Social de las Estructuras algebraicas.

6. Fase Filosófica de Formalización del Álgebra

La axiomatización y formalización de la matemática se consideró necesaria en la primera década del siglo XX porque se esperaba responder a preguntas que surgieron en torno a los fundamentos de la matemática, toda vez que surgen las paradojas de la teoría de conjuntos infinitos de Cantor. Hilbert, en su artículo *Über den Zahlbegriff* (1900), plantea el método axiomático como un procedimiento de investigación que le permitiría dar una exposición definitiva y lógicamente segura de los contenidos matemáticos resaltando el hecho de que dicho procedimiento carece de todo valor pedagógico.

La intencionalidad de Hilbert, al pretender dotar a todas las teorías matemáticas de una base axiomática, se expone en *Axiomatisches Denken* (1918), se explica que la ordenación de cada campo de conocimiento permitiría un progreso similar al que se conocía en la geometría de la época. Además de axiomatizar una teoría, era de fundamental importancia proporcionar una visión de la dependencia (o independencia) de los enunciados de la teoría y garantizar la su consistencia (Hilbert, 1918), para esto se echaría mano del lenguaje formal. Sin embargo algo que también quedaba claro, es que éste procedimiento no era, de ninguna manera, el inicio para la construcción de la teoría, sino más bien, un procedimiento para la ordenación de las teorías existentes que permitía evidenciar la solides de sus fundamentos, de los cuales podrían desprenderse todos los resultados conocidos en el marco de la teoría para generar condiciones optimas para un mayor desarrollo.

Corry (2002) sostiene que Hilbert, en efecto, no asumió dicha metodología para el desarrollo de su propia investigación en el campo de las matemáticas y cita:

> El espacio no es un producto de mis reflexiones. Antes bien, me es dado a través de los sentidos … Como la mecánica, la geometría también emerge de la observación, de la experiencia. En este sentido esta es una ciencia experimental…Pero sus fundamentos experimentales han sido tan irrefutablemente, y tan generalmente reconocidos… ellos han sido confirmados a tal grado, que ya no se considera necesario dar pruebas adicionales de ellos. Es más todo lo que se necesita es derivar estos fundamentos de una colección mínima de axiomas independientes y así construir el edificio todo de la geometría por medios puramente lógicos…. (p. 14).

Sin embargo, de 1990 a 1930 se publican al menos 6 documentos en los que Hilbert representa las ideas sobre la axiomatización y formalización de la matemática e incluso de la física; Über den Zahlbegriff, Axiomatisches Denken, Neubegründung der Mathematik, , Die Logischen Grundlagen der Mathematik, Über das Unendliche, Die Grundlagen elementaren Zahlenlehre, en los cuales enfatiza la importancia de la metodología propone y escribe que el desarrollo y progreso de cada una de las esferas del conocimiento consistirá en la extensión lógica del aparato conceptual que se dispone a partir de los axiomas. Este es el enfoque dominante en las matemáticas puras (Hilbert, 1918).

De este modo las formas de representación del conocimiento matemático difundidas por Hilbert en estos escritos trascendieron las ideas empiricistas que practicaba en la enseñanza y fueron internalizadas por diversos matemáticos de su época al seno de sus propias investigaciones, externalizadas en productos de reproducción del conocimiento que finalmente, sobrevivieron procesos de validación y legitimación al interior de la comunidad académica de la que formaban parte.

La matemática no sólo se integró como un cuerpo de conocimientos sino como un sistema complejo que guiaba los pensamientos y las acciones. La proposiciones matemáticas se internalizaban como procedimientos que normaban el quehacer de la investigación matemática. Así las ideas de Hilbert no sólo manifestaron una mirada particular de las matemáticas, sino una forma de actuar, que en el fondo remitía la potencialidad del lenguaje formal fijando criterios de comportamiento apropiado para la construcción de nuevo conocimiento matemático.

6. REFERENCIAS

Berger, P. (1969). *El Dosel Sagrado. Elementos para una Sociología de la Religión*. Buenos Aires: Amorrortu Editores.

Berger, P. & Luckmann, T. (1997). *Modernidad, Pluralismo y crisis de sentido: la orientación del hombre moderno*, Madrid: Paidós Studio.i

Berger, P. & Luckmann, T. (2001). *La Construcción Social de la Realidad*. Buenos Aires: Amorrortu Editores.

Chaintin, G. J. (2003). Ordenadores, Paradojas y Fundamentos de las Matemáticas, *Investigación y Ciencia* 322, 28-35.

Chevallard, Y. (1996). *Transposición Didáctica*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Corry, L. (2002). David Hilbert y su Teoría Empiricista de la Geometría, *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*. IX (1).

Corry, L. (2004). *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structure*, Washington D.C.: Birkhäuser Verlag.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U. & Zazkis, R. (1994). On Learning Fundamental Concepts of Group Theory, *Educational Studies in Mathematics Springer Netherlands*, 27 (3), 267–305.

Ferreiros, J. (1999). Matemáticas y Platonismo(s), *La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas*, 2, 446–473.

García, G. M. & Juárez L. J. (2011). Revisión del Constructo de Actitud en Educación Matemática 1959-1979, *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 26, 117-125.

González, A. M.T. & Sierra V. M. (2003). El Método de Investigación Histórica en la Didáctica del Análisis Matemático, Investigación Matemática: VII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, 109-130, Granada.

Hazzan, O. & Leron, U. (1996). Students use and misuse of mathematical theorems: The case of Lagrange’s theorem, *For the Learning of Mathematics*, 16(1), 23–26.

Hazzan, O. (1999). Reducing Abstraction Level when Learning Abstract Algebra Concepts, *Educational Studies in Mathematics* 40(1), 71–90.

Hazzan, O. & Zazkis R. (2005). Reducing Abstraction Level when Learning Abstract Algebra Concepts, *Educational Studies in Mathematics* 58(1), 101–119.

Hernández, J. (2009). Las Estructuras Matemáticas y Nicolas Bourbaki, *Seminario “Orotava” de Historia de la Ciencia*, IV, 55-78

Hilbert D. (1900), Über den Zahlbegriff, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereninigung* No. 8 p. 180-194

Hilbert D. (1918), Axiomatisches Denken, *Mathematische Annalen* No. 78, p. 405-415

Katz, V. J. (2007). Stages in the History of Algebra with Implications for Teaching, *Educational Studies in Mathematics*, 66, 185-201. doi: 10.1007/s10649-006-9023-7.

Olivé, L. & Sousa S. B., otros (2009). *Pluralismo Epistemológico. Por una auténtica interculturalidad basada en el reconocimiento de la pluralidad epistemológica*, Bolivia: Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales, 19-30.

Palomar, T. J. E. (1971). El Método Axiomático y el Álgebra de Relaciones y Condiciones Lógicas, *Gaceta Matemática*, Instituto Jorge Juan de Matemáticas y la Real Sociedad Matemática Española 1-2,10-25.

Rañada, M. F. (2003). David Hilbert, Hermann Minkowski, la Axiomatización de la Física y el Problema número seis, *La Gaceta de la RSME*, 6.3, 641-664.

Rodríguez, B. (2000). Hilbert. En Martión, A. (Ed.), *Las Matemáticas del Siglo XX: Una Mirada en 101 Artículos* (21-24), Madrid: Universidad de la Laguna: Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas.

Romero, I. L. & Rico L. (1999). Construcción Social del Concepto de *Número Real* en Alumnos de Secundaria: Aspectos Cognitivos y Actitudinales. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 17 (2) 259-272.

Simpson, A. & StehlíIková, N. (2006). Apprehending Mathematical Structure: A Case Study Of Coming To Understand A Commutative Ring, *Educational Studies in Mathematics*, 61, 347–371. doi: 10.1007/s10649-006-1300-y

Weber, K. (2002). Student Difficulty In Constructing Proofs: The Need For Strategic Knowledge, *Educational Studies in Mathematics* 48, 101–119, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.