

## C-IMAZ: LABORATORIO PARA EL ESTUDIO DEL MOVIMIENTO EN EL AULA



José Iván López Flores, Alberto Robles Nuñez,  
Jacobó Hernández Roldán, Antonio Cabral Valdéz  
ivan.lopez.flores@gmail.com  
Universidad Autónoma de Zacatecas  
Nivel Medio y Superior

### Resumen

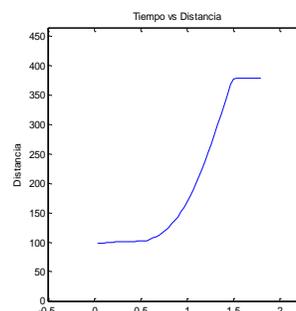
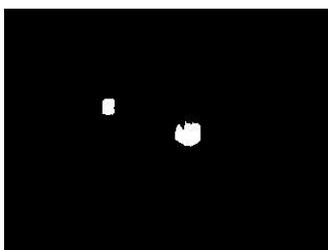
En el presente laboratorio se presentarán una serie de actividades relacionadas con el uso C-IMAZ, un software desarrollado con el propósito analizar videos con el fin de construir gráficas para el estudio de las situaciones de movimiento. Como parte del proyecto de investigación: “Diseño de una herramienta tecnológica para la resignificación de la Matemática en el Aula” se realizan tres investigaciones que tienen como referente teórico a la Socioepistemología, una en el nivel superior que comprende un diseño para el modelaje de una situación de movimiento usando la representación paramétrica de curvas y las otras dos, enfocadas al nivel básico (secundaria mexicana: 13-15 años) cuyo propósito es el diseño de un par de secuencias de aprendizaje que introduzcas elementos de modelación para el estudio del comportamiento lineal y cuadrático, respectivamente, en situaciones de movimiento.

**Palabras clave:** *Modelación gráfica, software C-IMAZ, Socioepistemología.*

### 1. PROPÓSITO Y ALCANCE

El propósito de este taller es doble, por una parte dar una introducción a una herramienta tecnológica diseñada en la Universidad Autónoma de Zacatecas que permite la modelación de situaciones de movimiento, proporciona gráficas de tiempo-distancia entre objetos que se mueven en un plano. Asimismo, el otro objetivo de este taller es presentar a los asistentes secuencias de aprendizaje en las que usa de manera importante este software.

El software diseñado, que hemos llamado C-IMAZ, usa de manera innovadora resultados de un campo de estudio lejano a la Matemática Educativa, en el campo de la visión por computadora existen numerosos algoritmos para la identificación de formas en imágenes y los usamos para generar gráficas de objetos que son captados en video. En este caso, el proceso de modelado pasa por la grabación en video de la situación de movimiento a modelar, el video en cuestión es analizado por el software, en este caso la escena que se graba pasa un montaje especial: los objetos que se mueven y son estudiados deben de ser rojos, y como es de suponerse, la escena tiene que limpiarse de ese color.



Proceso de análisis de una situación: rodamiento por un plano inclinado.

Se espera que el participante de este Laboratorio al final de él, conozca el manejo básico del software y también conozca algunos de los resultados que a la luz de éste, han sido descubiertos.

El nivel educativo al que está dirigido el taller es desde el básico (secundaria) y superior, las secuencias que se presentan son para estos niveles.

## 2. MARCO TEÓRICO O CONCEPTUAL

Este proyecto se enmarca en la Matemática Educativa, disciplina científica que tiene por objeto analizar, caracterizar, modelar cómo los seres humanos construyen conocimiento matemático (Cantoral, López, 2010), y de manera más específica en la línea de investigación de la modelación matemática, caracterizada fundamentalmente por la idea de que es posible construir modelos (gráficos, tabulares, analíticos, etc.) de la realidad y que estos modelos pueden y deben ser llevados al aula para la generación de conocimiento matemático. En específico, estamos interesados en la modelación gráfica a partir de movimientos de objetos: gráficas de tiempo contra distancia/velocidad/aceleración.

El trabajo con gráficas tiempo contra distancia como medio para generar conocimiento en los estudiantes es un tema bastante estudiado. Trabajos como los de Suárez, Carrillo y López (2005), Suárez (2008), Torres (2004), Lupiañez, Gómez, Rico y Marín (2007), Torres, Coutinho y Fernandes (2008), Buendía y Cordero (2005), Frade (2002), Arzanello y Robutti (2003, 2004), Arzanello y Paola (2003), Cicero y Spagnolo (2009) así como la presencia de los grupos de investigación relativos a la modelación en eventos internacionales como el ICME, el congreso del PME y la RELME nos permiten advertir el grado de consolidación de la modelación matemática como línea de investigación.

Una de las características comunes en este tipo de trabajos es el uso que hacen de los elementos tecnológicos disponibles, fundamentalmente trabajan con sensores de movimiento. La idea base de las actividades/diseños es la discusión sobre una gráfica generada por un sensor ultrasónico, al captar a un objeto que se mueve sobre una trayectoria recta frente al sensor que no puede alejarse más de cinco metros y no debe haber obstáculos entre el sensor y el objeto, esta idea puede considerarse como el paradigma que caracteriza a estos diseños. En algunos casos como en las investigaciones de Arzanello y Robutti (2003, 2004) se usan sensores de mayor alcance y sin la restricción de los obstáculos; sin embargo, predominan en la literatura los reportes centrados en el paradigma descrito en una primera instancia.

Bajo este mismo paradigma el postulante ha realizado aportes a la investigación en el área, ver Suárez, Carrillo y López (2005) y López-Flores, Cantú, Pastor y Flores (2007), los cuales son la

base para el presente proyecto, ya que es a partir de las reflexiones hechas sobre los resultados de estas investigaciones que se propone la actual propuesta.

En Suárez, Carrillo y López (2005) se reporta una investigación que provee una metodología para la incorporación de la tecnología de los sensores tendiendo un puente entre la gráfica, producto de tecnología, y los movimientos de los objetos enfrente del sensor. Se concluye que este puente permite la discusión de la matemática intrínseca al experimento. Por otra parte, en López-Flores, Cantú, Pastor y Flores (2007) se toma como base el estudio anterior y se incorpora el trabajo de Buendía y Cordero (2005). Esta fusión permitió construir una secuencia de aprendizaje que, bajo el marco de la Socioepistemología, ayudó a que estudiantes de bachillerato y de primeros años de licenciatura resignificaran la idea de periodicidad en un ambiente tecnológico, es decir, mediante el uso de sensores de movimiento.

Si se parte de la idea de que la tecnología condiciona nuestros diseños, en el sentido de que pensamos nuestras actividades en términos de lo que ella por permite (e.g. una pizarra nos permite sólo gráficos estáticos, un software de geometría dinámica nos permite un gráfico que se modifica manteniendo ciertas propiedades), es de suponer que un cambio en el paradigma hasta ahora usado, permitirá otra perspectiva en el diseño de las actividades para la reconstrucción del conocimiento matemático.

Toda vez que está en el marco de la Matemática Educativa, es necesario señalar algunas de las bases epistemológicas que sustentan este proyecto de investigación. Se ha señalado que el referente teórico para el mismo es la Socioepistemología (Cantoral y Farfán, 2003; Cantoral y López, 2010; López, 2005).

La Matemática Educativa (ME) es un disciplina científica que dirige sus resultados principalmente en dos direcciones: por un lado es conocimiento científico en el campo de las ciencias sociales y como tal es puesta al estricto escrutinio de las comunidades científicas, para ser evaluado, cuestionado y por qué no, reproducido. La otra dirección que toman los resultados en ME es la atención de la demanda social por la que existe como tal: atender la construcción de conocimiento matemático en las aulas vía libros, propuestas para enseñar, para evaluar y en general, del diseño de productos para su uso al seno de los sistemas escolares.

La Socioepistemología es una de estas explicaciones científicas al hecho de la construcción del conocimiento matemático, es una aproximación teórica de carácter constructivista que parte del hecho de que el saber se construye en ámbitos no escolares y que para su incorporación requiere de diversas transformaciones. Es una aproximación teórica que al seno de la ME ha construido explicaciones novedosas que explican la construcción de conocimiento, pone al centro de la discusión la noción de práctica social y ello representa una ampliación de la problemática de estudio de la ME, se dirige la atención ya no a la matemática misma, al objeto matemático, sino que pone en un primer plano la actividad de los seres humanos así como la razón de ser de esa actividad (López, 2005).

La metáfora detrás de esta teoría es la recreación de prácticas sociales (Alatorre, 2007; Sierra, 2008) en el aula. La práctica social es producto de las necesidades y problemas comunes de los seres humanos, el resultado colectivo es la construcción de un conocimiento funcional en el sentido de que va integrado no sólo a los individuos, sino que forma parte del grupo al que

pertenecen. Es la recreación de estas prácticas en el aula mediante la cual se construye conocimiento.

Esta aproximación teórica, si bien es una ampliación de la problemática atendida por la ME, no deja de lado ni niega los paradigmas anteriores. Considera dentro de sus estudios el análisis sistémico de lo que se han llamado las cuatro dimensiones de las que se compone la construcción del conocimiento, las dimensiones: epistemológica, social, cognitiva y didáctica.

Al resultado de la conjunción de estas cuatro dimensiones se le ha llamado aproximación socioepistemológica (Cantoral y Farfán, 1998; Cantoral, 2000; Cordero, 2001). Se marca así un nuevo paradigma en la investigación en ME, aquel que estudia de manera científica los procesos de construcción social del conocimiento matemático.

En este momento cabe hacer una distinción ya que, como se cita en (Buendía, 2007): “Por social, no nos referimos a algún tipo de equivalencia con *vida cotidiana* o con *interacción social*”, sino que asumimos a dimensión social como aquella que es fundamental en este paradigma:

En estos días se acepta de manera más o menos universal que es de una naturaleza distinta a las otras tres, en el sentido de que ellas, si son tomadas desde la aproximación socioepistemológica, debe de tener aspectos de la dimensión social y la dimensión social tiene que ser expresada y adquiere sentido en términos de las otras tres, tal es la naturaleza sistémica de la teoría (López-Flores y Cantoral, 2010).

Estamos asumiendo que son las prácticas sociales las que norman la generación de conocimiento.

Es en este marco de una “epistemología de prácticas” en que se inserta el presente trabajo. Se parte de que:

Una epistemología fundamentada en prácticas sociales, en contraposición de una de objetos matemáticos, favorecerá el establecimiento de relaciones funcionales, alejadas del utilitarismo, entre los diversos tópicos del saber matemático (Cordero, 2003, citado en Buendía, 2004).

La resignificación del conocimiento matemático, en este caso será tomada en el sentido de Rosado (2004):

...es la construcción del conocimiento mismo en la organización del grupo humano, normado por lo institucional y lo cultural. En todo caso, la resignificación es el uso del conocimiento en la situación donde se debate entre su función y su forma de acorde con lo que organiza el grupo humano.

En este sentido, la herramienta tecnológica será un medio, distinto hasta el usado hasta entonces, permitiendo que la investigación del estudio del movimiento pueda abarcar un espectro más amplio, se busca una matemática funcional en el aula.

En este Laboratorio se sustenta en tres investigaciones, una de ellas para el nivel superior, sobre el uso de la representación paramétrica de curvas en el plano para el modelado de situaciones de movimiento, se rescatan ideas del trabajo de Euler sobre la parametrización. El objetivo de esta investigación es la de proveer elementos para la introducción de la modelación-graficación como un eje para el estudio de la variación en situaciones de movimiento que sucedieran en un plano.

Las otras dos, dado el paralelismo entre ambas, en el Laboratorio serán abordadas de manera conjunta. Parten del hecho de que para el caso de los niveles bachillerato y superior existen numerosas investigaciones que arrojan luz, desde la Sociopistemología, hacia el estudio del Cálculo y la variación, este par de investigaciones tienen como punto de partida la pregunta: ¿qué elementos será necesario que los estudiantes de secundaria construyan de tal manera que se favorezcan es estudio de la variación y el cambio en bachillerato y superior? En este caso, las dos investigaciones están en realización todavía y constituyen, ambas, tesis de maestría.

### 3. MÉTODO

En un sentido teórico-metodológico la interacción del estudiante con la tecnología será considerada en un sentido similar a como se plantea en López, Carrillo y Suárez (2005), en tanto que la tecnología tiene un objetivo didáctico, en cuanto que propician un control sobre la situación. La metodología propuesta para su incorporación es la siguiente: se propondrá una interacción del estudiante con una gráfica-fenómeno, misma que se presenta en tres etapas: un *modelo gráfico* propuesto como hipótesis inicial por parte del alumno, *una simulación* de la situación usando la herramienta tecnológica (con posible ajuste de las variables si los participantes lo creen necesario) y por último un *contraste y ajuste* de la gráfica de su modelo gráfico. Esta metodología ha mostrado regularidad, en aspectos como la discusión y estudio de ideas matemáticas.

Bajo este tipo de ambiente el énfasis se pone no sobre cómo funciona la tecnología sino sobre cómo usarla para probar ciertas hipótesis.

Como se señala en López, Carrillo y Suárez (2005):

La obtención de gráficas con la calculadora a través de la toma de datos con el sensor se ha identificado como un motor que lleva a múltiples realizaciones en las que se toman decisiones sobre las características que se varían en cierta situación para la obtención de determinada gráfica.

Con estas actividades se ha observado que se puede tener una relación entre las características de una situación en términos de las magnitudes medibles y las características gráficas.

Se encontró que las ideas matemáticas surgieron a partir de la discusión entre los participantes de los talleres, ideas como la de relacionar velocidades con pendientes, en la cual se argumentaron tanto a nivel de la situación a simular como de la gráfica, así como de asociar a la velocidad en un sentido positiva y cuando el movimiento era opuesto era de signo negativo.

En el caso de las gráficas, pasaron de ser el mero objetivo, como el que se le da en la enseñanza tradicional, a ser un medio mediante el cual los participantes generan las explicaciones de las situaciones planteadas, para las cuales la tecnología fue un medio, que si bien se sitúa en segundo plano, permitió el contraste entre las gráficas que revelan sus concepciones (no todas acertadas) y aquellas que provienen de una toma experimental de datos.

Con la introducción de la componente tecnológica de esta forma singular, *se busca que los estudiantes puedan tender un puente sólido entre un particular fenómeno y la gráfica que se genera a partir de una tecnología específica*. Esta será la metodología que será usada en el Laboratorio.

El primer día se dará un introducción breve al Laboratorio, posteriormente los participantes interactuarán con los diseños didácticos, para finalmente pasar a una discusión global sobre los mismos. Como actividad final se presentarán algunos resultados de las investigaciones que son la base para este Laboratorio.

#### 4. ACTIVIDADES O DISEÑO DIDACTICO

Las actividades diseñadas para el nivel secundaria están enfocadas en la modelación de fenómenos de movimiento que involucran hechos ampliamente conocidos por los estudiantes de ese nivel: a) el tiro vertical y b) el recorrido a pie a velocidad constante.

En ambos casos se tiene un fenómeno a modelar mediante gráficas, se busca primero que el estudiante exprese un gráfica (que describa ese fenómeno y sea lo más incluyente posible de las características intrínsecas al mismo) y esta misma, la gráfica hipotética producto de la discusión en equipos será contrastada con la que nos provee la tecnología.

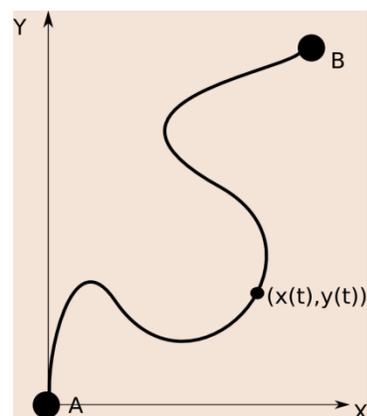
En el caso del recorrido a pie de personas a velocidad constante se busca que el estudiante pueda, mediante la modelación a través de las gráficas, tender un puente entre la pendiente de la gráfica de la función lineal y la velocidad de las personas, asimismo pueda relacionar el punto de inicio del recorrido con la ordenada al origen, en suma, que pueda darle significado a la expresión  $y = mx + b$  usando la modelación.

En el caso del tiro vertical se busca que el estudiante tienda un puente entre el vértice de la parábola y el punto más alto que alcanza el objeto, que relacione la parte del fenómeno cuando el objeto sube/baja con la parte creciente/decreciente de la gráfica. Se dará significado a la expresión  $y = a(x - b)^2 + c$ .

Estas dos situaciones están en una fase de diseño y están sujetas a ajustes todavía.

En el caso de la secuencia diseñada para el nivel superior, se tiene la siguiente propuesta para el abordaje de la representación paramétrica de fenómenos de movimiento, consta de tres problemas relacionados:

1. Un autobús sale de la ciudad A con destino a la ciudad B, siguiendo la carretera como se muestra en la figura:



- a) Describe ampliamente los cambios en la velocidad que sufre el autobús en su recorrido.
- b) Supongamos que se colocan unos ejes cartesianos con origen en A. Considere que a cada tiempo, podemos asignarle un punto, es decir, en nuestro sistema coordenado podemos asignar a cada  $t$ , un punto de él. El valor de  $X$ , dependerá de  $t$  y el valor de  $Y$  también dependerá de  $t$ . Proponga una gráfica para  $X(t)$  y otra para  $Y(t)$ . Discuta con sus compañeros las similitudes y diferencias entre las gráficas que propusieron.
- c) Usa C-Imaz para modelar la situación y compare la gráfica que proporciona la tecnología con sus propuestas.

En este problema se introduce de manera intencional la representación paramétrica, en pruebas experimentales se vio que es muy complejo que aparezcan como propuesta de los estudiantes. Los otros dos problemas de la secuencia son variantes de este mismo, en el segundo se mantienen todos los elementos, pero se introduce una variante: el considerar que el automóvil se detiene por 1 minuto en algún punto del recorrido. El tercer problema modifica nuevamente el primero, se considera ahora que el recorrido es por una zona serrana, en estos dos casos la pregunta que guía las discusiones, es: Tome como base las gráficas del primer problema, ¿cómo cambian sus gráficas si agregamos o modificamos elementos a la situación? Se busca en este caso darle un significado a la representación paramétrica de curvas usando la idea de modelación gráfica.

## 5. CONSIDERACIONES FINALES

Las aportaciones de la propuesta van en dos sentidos, uno es proveer de una herramienta tecnológica que posibilite la modelación gráfica de situaciones de movimiento, el software C-Maz fue diseñado para ello. Por otra parte, los diseños didácticos propuestos se constituyen como una herramienta para la introducción de significados al aula tomando en cuenta no solo la cuestión analítica sino mostrando que la matemática puede ser un elemento que nos ayude a entender y controlar nuestro entorno. Las propuestas para secundaria están en una fase de diseño aún, en el caso del diseño para superior ha sido implementada experimentalmente con estudiantes de licenciatura y maestría, los resultados muestran que es estable (3 reproducciones) y que permitieron que los estudiantes resignifiquen el conocimiento relativo a la representación paramétrica de situaciones de movimiento.

## AGRADECIMIENTOS

Investigaciones realizadas en el marco del proyecto: “Diseño de una herramienta tecnológica para la resignificación de la Matemática en el Aula” financiado por CONACYT Convocatoria: I0007-2011-01. Solicitud: 174692.

## 6. REFERENCIA

- Arzarello, F., Robutti, O. (2003). Approaching Functions through Motion Experiments, in: Nemirowsky et al., *Perceptuo-Motor Activity and Imagination in Mathematical Learning*. Research Forum, *Proceedings of PME 27*, Hawai.
- Arzarello, F. & Robutti, O. (2004). Approaching Functions through Motion Experiments, in Nemirowsky, R. & Borba, M. (ed.), *Educational Studies in Mathematics*, Special Issue.
- Arzarello, F., Paola, D. (2003). Mathematical objects and proofs within technological environments: an embodied analysis. WG9, *CERME*, Bellaria. 2156-2165.

- Buendía, G (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico)*. Tesis Doctoral no publicada. Cinvestav: México.
- Buendía, G., & Cordero, F. (2005). Prediction and the Periodical Aspect as Generators of Knowledge in a Social Practice Framework: A Socioepistemological Study. *Educational Studies in Mathematics*, 58 (3), pp. 299-333.
- Cantoral, R.; López-Flores, I. (2010). La Socioepistemología: Un Estudio de su Racionalidad. *Paradigma*, XXXI (1), 103-122.
- Cantoral, R., Farfán, R.-M. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*. *Kluwer Academic Publishers*, Netherthelands. Vol. 53, Issue 3, 255 - 270. Disponible en <http://cimate.uagro.mx/cantoral/>.
- Cicero, M., Spagnolo, F. (2009). The use of motion sensor can lead the students to understanding the cartesian graph. *Proceedings of CERME 6*, 2106-2115.
- Cordero, F. (2004). La modelación y la enseñanza de las matemáticas. Artículo *Innovación Educativa* 21 IPN.
- Domínguez, I. (2003). *La resignificación de lo asintótico en una aproximación socioepistemológica*. Tesis de Maestría inédita. Cinvestav-IPN. México, D.F
- Frade, R. (2002). La calculadora gráfica en el aula de Matemáticas. En Fernández, J. (Ed). *El lenguaje de las Matemáticas en sus aplicaciones*. 171-183. Ministerio de Educación: España.
- López-Flores, J. (2005). *La Socioepistemología. Un estudio sobre su racionalidad*. Tesis de Maestría no publicada. Cinvestav: México. Disponible en <http://cimate.uagro.mx/ivanlopez/>.
- López-Flores, I, Cantú C, Pastor C, Flores, J. (2007). Resignificación de lo periódico en un ambiente tecnológico. *Actas de la XII Escuela de Invierno en Matemática Educativa*. Mérida Yucatán: Red de Cimates.
- Lupianez, J.; Gómez, P.; Rico, L.; Marín, A. (2007). Una actividad de modelización con calculadora. Comunicación presentada en *XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* (4-7 Julio 2007). Granada.
- Suárez, L.; Carrillo, C.; López, J. (2005). Diseño de gráficas a partir de actividades de modelación. *Acta de la Decimotava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*.
- Suárez, L. (2008). *Modelación-Graficación, una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado en Ciencias: especialidad Matemática Educativa -CINVESTAV-IPN, México D.F.
- Torres, A. (2004). *La modelación y las gráficas en situaciones de movimiento con tecnología*. Tesis no publicada del Programa de Maestría del CICATA-IPN. México, D.F.
- Torres, T.; Coutinho, C.; Fernandes, J. (2008). Aplicações e Modelação Matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15, 9-32.