

FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA: SU ENSEÑANZA EN BACHILLERATO TECNOLÓGICO. INDAGACIONES EN SESIONES EXTRA- AULA



Rogelio Martínez García, Ignacio Garnica y Dovala
rmartinezga@ipn.mx, igarnica@cinvestav.mx
Cinvestav-IPN
Experiencia didáctica
Medio Superior

Resumen

En sesiones *extra-aula* se indagó respecto al reconocimiento de los conceptos de las funciones exponencial y logarítmica después de su enseñanza en el desarrollo de la Unidad de Aprendizaje “Geometría y Trigonometría” del bachillerato tecnológico. A cuarenta y cinco estudiantes se les aplicó un cuestionario al inicio del curso; y, bajo una estrategia de enseñanza, doce estudiantes realizaron actividades *extra-aula* durante dos sesiones aplicándoseles un cuestionario al inicio y otro al finalizarlas. Luego del proceso se realizaron dos entrevistas. Se reportan resultados respecto a la representación gráfica de la función exponencial, sus interpretaciones y el conflicto al representar el valor de la función para $x = 0$.

1. ANTECEDENTES

El Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav y el Departamento de Investigación y Desarrollo Tecnológico del CECyT No 4 concertaron desarrollar un vínculo que motivara a los docentes de Matemáticas de ésta institución hacia su iniciación en la indagación de su propia práctica en el aula, e investigar, a su vez, ese proceso. Las dos instancias mencionadas, establecieron compromisos con la Figura de un “Acuerdo Académico Colegiado” (AAC) estableciendo definiciones, propósitos, objetivos y metas de un Plan de desarrollo para el trienio 2011-2013. El desarrollo de los procesos de indagación y de investigación se realiza en espacios para tal efecto dentro del Departamento de Matemática Educativa que se representan en el esquema, en particular el correspondiente al de “Extra-aula” (AAC-DME/Cecyt#4, 2012, p. 6).

2. MARCO DE REFERENCIA

Al tema “Funciones Exponenciales y Logarítmicas” Unidad I [UI] del programa de la Unidad de Aprendizaje Geometría y Trigonometría [UA-GT] le anteceden los tratamientos de “Números reales” “el manejo de expresiones algebraicas” “funciones y ecuaciones lineales” y “funciones y ecuaciones cuadráticas” (Butts, Phillips, Shaughnessy, 1998) Los contenidos de la U-I se fundamentan en Actividades que ponen en foco la resolución de problemas, entendiendo por problema “una situación matemática o extramatemática que no tiene solución inmediata, ...” (Academia Institucional de Matemáticas. Dirección de Educación Media Superior. Secretaría Académica del IPN, 2004) [AM-DEMS-SA-IPN]. La estrategia de enseñanza se diseñó bajo la consideración de iniciar el proceso a partir de los contenidos de la unidad I como tema de indagación: “interpretaciones de las funciones exponencial y logarítmica después de haber concluido una estrategia de enseñanza” propuesto, mediante un plan de seguimiento consistente en la aplicación de tres cuestionarios: uno [CE] al inicio de la UI, el otro [CEv] al final de ésta; el tercero al concluir la estrategia de enseñanza realizada en “extra-aula” [CEex-a] todos ellos sustentados en los Resultados de Aprendizajes Propuestos [RAP] correspondientes. El seguimiento en cuestión consideró: la propuesta de la obra de Butts y sus colaboradores (1998)

así como la de Gustafson (2000) para el tratamiento de contenidos utilizando las funciones y ecuaciones, exponenciales y logarítmicas en la solución de problemas de su entorno personal, social y global.

2.1. PROPUESTA INSTITUCIONAL

El Programa de Estudios de la Unidad de Aprendizaje: Geometría y Trigonometría (Dirección de Educación Media Superior –Secretaría Académica del IPN (DEMS), 2008) señala 72 horas en Aula; 18 horas en otros ambientes de aprendizaje, “*extra-aula*”, (una hora por semana) que suman un total de 90 horas por semestre. El programa de estudio asigna 25 horas (20%) para el estudio del tema de funciones exponenciales y logarítmicas. La primera unidad señala como competencia particular a lograr que el estudiante “Emplea las propiedades de las funciones exponenciales y logarítmicas en situaciones teóricas y reales de su entorno personal, social y/o global”. Esta unidad incluye tres Resultados de Aprendizaje Propuestos, a saber: RAP 1. Identifica las funciones exponenciales y logarítmicas en sus diferentes expresiones: verbal, simbólico y gráfico; RAP 2. “Aplica los principios de las propiedades fundamentales de funciones exponenciales y logarítmicas en la solución de ecuaciones” y, RAP 3. “Utiliza las funciones y ecuaciones, exponenciales y logarítmicas en la solución de problemas de su entorno personal, social y global”.

3. MÉTODO

Se trabajó con un grupo de cuarenta y cinco estudiantes del segundo semestre de bachillerato tecnológico; se les aplicó un cuestionario CE (véase Tabla 1.) para obtener información respecto a las condiciones de conocimientos adquiridos antes del inicio del curso. La estrategia de enseñanza consistió en el desarrollo de cinco problemas, en el aula, durante cuatro horas distribuidas en una semana. Se incluyó el recurso al desarrollo de tareas en el aula bajo el formato que se propone en (Butts, *et al.* 1998). Al término de la U-I se aplicó un cuestionario de evaluación institucional (CEv, véase Tabla 2.). Doce estudiantes participaron en el desarrollo de actividades en el curso de dos sesiones de cuatro horas cada una bajo la modalidad de Extra-aula, caracterizada “Para fortalecer el desarrollo autónomo del estudiante, se dosificará la carga horaria total del trabajo de tipo teórico, destinándose un total de 18 horas... para la realización de actividades de aprendizaje en otros ambientes fuera del aula” (Programa de estudios, fundamentos, p.2).

Las actividades en cuestión se realizaron en las instalaciones del DME durante dos sesiones separadas por una temporalidad de 3 meses. En la primera, los estudiantes realizaron dos actividades: una consistió en repetir el doblar a la mitad, sucesivamente un cierto número de veces, una hoja de papel, con el objetivo de **identificar y tabular** las dos progresiones (dobles; partes marcadas en la hoja). Al término de la tabulación se les pidió representar la expresión matemática de la función; la otra consistió en resolver un problema que implicó el reconocimiento, identificación y uso de la función “ 3^x ”. Tres meses después se les aplicó el cuestionario CEx-aula (véase Tabla 3). Con base en los resultados obtenidos se realizaron entrevistas a dos de los doce estudiantes, registradas en audio-video, con el fin de profundizar respecto a su comprensión de conceptos en foco para la indagación-investigación. El contenido-guion de la entrevista se basó en uno de los problemas, “el chisme”, que se desarrolló como estrategia de enseñanza durante el proceso de enseñanza en el aula.

Tabla 1. Caracterización del Cuestionario CE_{antecedentes}

Objetivo: reconocer nociones adquiridas:	Contenido
Acerca de la representación gráfica de funciones exponenciales.	Dominio de la variable x : $[-2, 2]$ a) función exponencial base 2, exponente negativo; b) exponente entero positivo; c) función lineal

III.- Dibuja la gráfica de las siguientes funciones: [Sugerencia considera los valores de x de -2 a 2].		
a) $y = 2^{-x}$	b) $y = 2^x$	c) $y = x$

Figura 1.1

Tabla 2. Caracterización del Cuestionario CE_{v_institucional primera unidad}

Característica de reactivo	Objetivo	Contenido
Operatividad de las propiedades de la función logarítmica y verificación mediante el uso de la noción de la función exponencial R-II: 1, 2	Resolver problemas de ecuaciones que implican las propiedades de los logaritmos;	Ecuaciones que implican nociones de las funciones logarítmica y exponencial
Operatividad en la resolución del problema: R-II:3	Resolver un problema que implica el uso del concepto de logaritmo	Resolución de problemas que implican el uso de las propiedades de las funciones exponencial y logarítmica

II. Lee detenidamente cada una de las siguientes indicaciones y responde correctamente. [60 ptos. 20 ptos. c/u.]

1. Aplica las propiedades de los logaritmos para resolver la siguiente ecuación. Comprueba la solución en la ecuación original: $\log_5 25 - \log_5 (x+100) = -1$
2. Aplica las leyes de los exponentes para resolver la siguiente ecuación. Comprueba la solución en la ecuación original: $3^{x^2+5x-12} = 9$
3. Altura de los árboles. El aumento de la altura arbórea se describe a menudo mediante una ecuación logística. Supongamos que la altura h (en pies) de un árbol de edad t (en años) es $h = \frac{120}{1+200e^{-0.2t}}$
¿A qué edad medirá 5 pies?

Figura 2.1

Tabla 3. Caracterización del Cuestionario CE_{X-AULA}

Objetivo	Contenido
Reconocer la función exponencial, y emplearla en la solución de un problema.	Modelo algebraico a partir de los datos dados Construcción de la gráfica exponencial.

Conceptualizar el Número “e” y representarlo gráficamente

El concepto del número “e” y su representación funcional en el plano cartesiano
Representación gráfica de la función exponencial

1. Un Bioquímico observa experimentalmente en su laboratorio el crecimiento de una población inicial de 1000 bacterias y descubre que se duplican cada hora.

Tiempo en horas	Número de bacterias
0	1000
1	2000
2	4000

Encuentra una fórmula que permita hacer la predicción de ¿Cuántas bacterias existirán después de 24 horas y represéntalo gráficamente?

Figura 3.1

4. **Resuelve el problema** que tratamos en clase: Un alumno del CECyT 4 ha contado un chisme acerca de una de sus compañeras a tres de sus compañeros; le tomó 15 minutos contarlos. Cada uno de los tres compañeros contó el chisme a otros tres compañeros y también les tomó 15 minutos a cada uno. Esta replica ocurre con cada uno de los alumnos que se va enterando por primera vez del chisme. Su modelo es $Y = 3^x$.

Demuestra gráficamente puesto que $2 < e < 3$, que la gráfica de $y = e^x$ está entre las gráficas de $y = 2^x$ y $y = 3^x$.

Figura 3.2

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Los resultados que se obtuvieron en cuanto a las respuestas correctas a los reactivos de cada uno de los instrumentos aplicados se presentan concentrados en correspondencia a las tres tablas siguientes (Tabla 4; Tabla 5 y Tabla 6). En cada tabla se subrayan los reactivos en foco que fundamentaron el contenido de la aplicación de las dos entrevistas, a saber: RIII-a, b, c (ver Figuras 4.1); RII-3 (ver Figura 5.1) y R4 (ver Figura 6.1).

Cuestionario: CE-antecedentes

Tabla 4. Resultados generales al cuestionario CE_{antecedentes}

Reactivos	Funciones logarítmicas y exponenciales					% Máximos de respuestas correctas
	Operaciones exponentes enteros	Operaciones exponentes racionales	Ecuación 1 ^{er} y 2 ^{do} grado	Representación gráfica con tabla	Representación gráfica sin tabla	
I: 1,2,3,4						27% 27% 12% 61%
5,6,7,8,9, 10						51% 56% 17% 12% 17% 34%
II: a,b						34% 1%
RIII: a,b,c						8% 10% 24%
IV:a,b,c,d						10% 11% 8% 17%

RIII a) 8%, b) 10%, c) 24%. (CE-antecedentes).

Dibuja la gráfica de las siguientes funciones: $y = 2^{-x}$; $y = 2^x$; $y = x$.

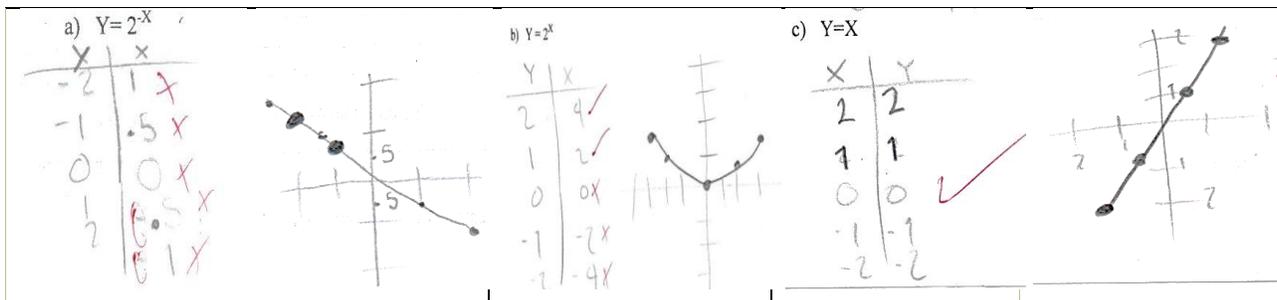


Figura 4.1(a)

Figura 4.1 (b)

Figura 4.1 (c)

4.1 EXTRA-AULA: DOS INSTRUMENTOS

En la Tabla 5 y en la Tabla 6 se concentran los resultados de las respuestas correctas correspondientes a la aplicación de cada cuestionario. Se advierte, por ejemplo en la Tabla 5, que solamente 8% de los estudiantes resuelve el problema que implica la aplicación de las leyes de los exponentes, y 0% resuelve el problema 3: ecuación que implica nociones de las funciones exponencial y logarítmica.

Cuestionario: CEv-institucional primera unidad

Tabla 5. Resultados generales del cuestionario CEv institucional.

Reactivos	Funciones logarítmicas y exponenciales					% Máximo de respuestas correctas
	Forma logarítmica y exponencial	Propiedades de los logaritmos	Ecuación logarítmica	Ecuación exponencial	Problema de aplicación	
I: 3,4						58%,8%
I:1,2						67%,67%
II:1						42%
II:2						8%
RII:3						0%

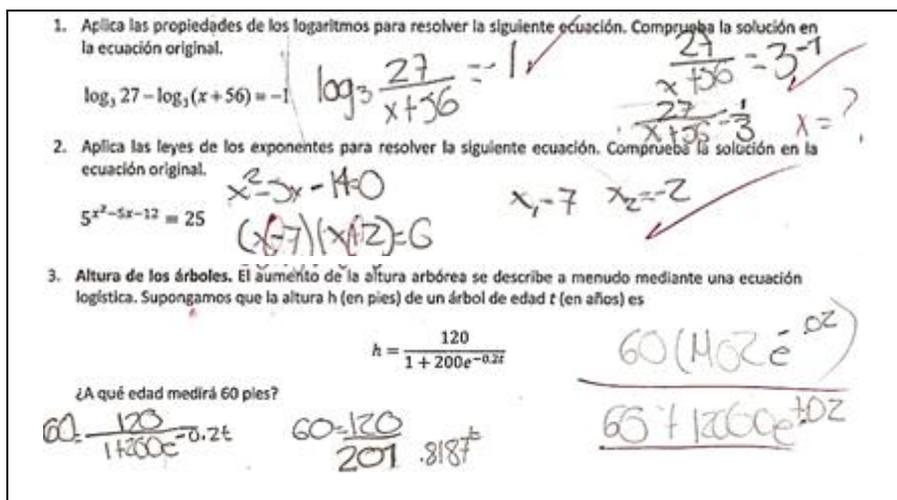


Figura 5.1

Cuestionario: CEx-aula

Tabla 6. Resultados generales de respuestas correctas al cuestionario CEx-AULA

Reactivos	Funciones logarítmicas y exponenciales					Máximo % de resp. Correctas
	Encontrar la ec. y graficar función exp.	Marcar puntos en la gráfica	valor del No "e" y graficarlo	Sustituir valores y graficar la función logarítmica.	Cambiar de la forma log a exp y propiedades	
R1						41%,33%
2						17%
3, R4						75%,25%
5						41%,17%
6						58%,8%

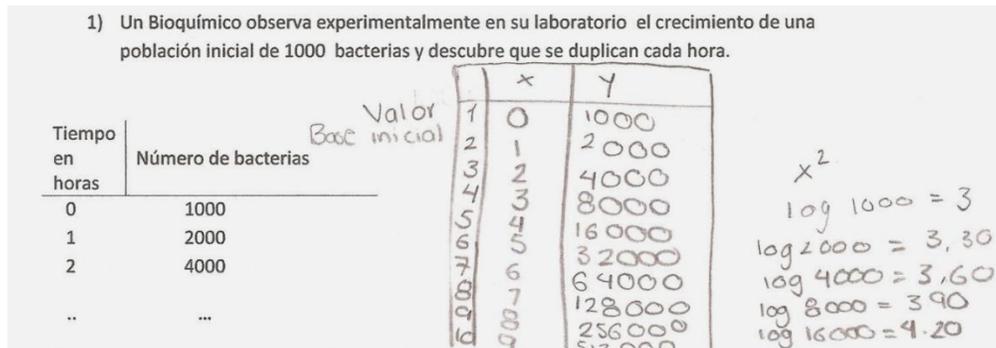


Figura 6.1

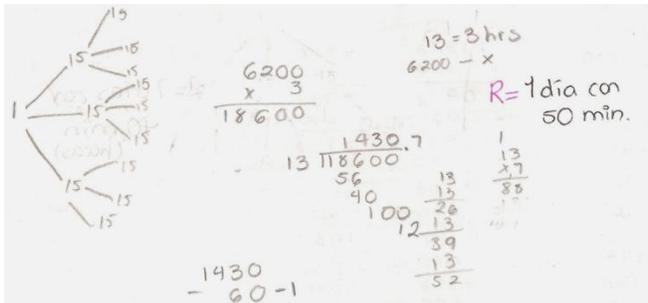


Figura 6.2

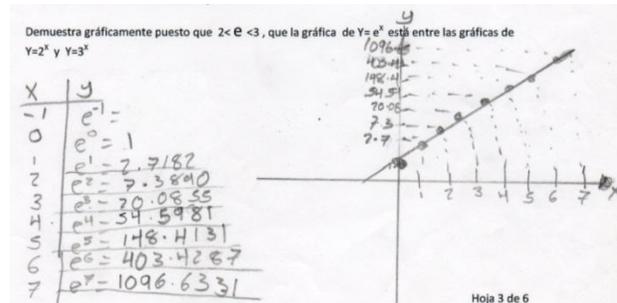
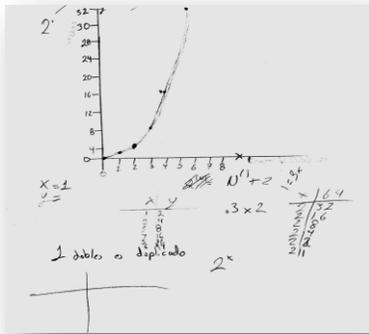


Figura 6.3

4.2 PRIMERA SESIÓN. DOS ACTIVIDADES

Al concluir el proceso de doblado del papel: a) lograron construir la tabulación de las progresiones correspondientes, para el caso de bipartición (base 2), aunque no reconocieron el “valor 1” cuando hay “cero” doblez; respecto a la gráfica no manifestaron dificultad para representar la función $y = 2^x$ excepto para el valor de $x = 0$ (véanse, Figuras: 7a y 7b).



Del proceso de dobles a la tabulación, de ésta a la representación gráfica (Figura 7a)

Distintas interpretaciones del problema “Chisme”: diagrama de árbol; tabulación de valores sin identificar la función exponencial “base 3” en el contexto (Figura 7b).

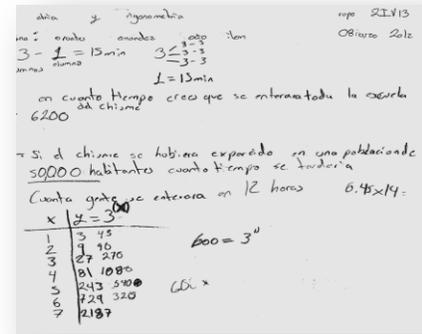


Figura 7a. Dobles – gráfica

Figura 7b. Situación-tabulación: $y = 3^x$

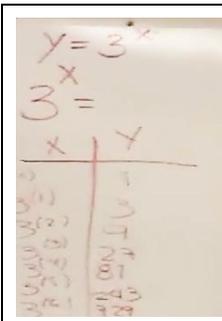


Figura 7c. Tabla

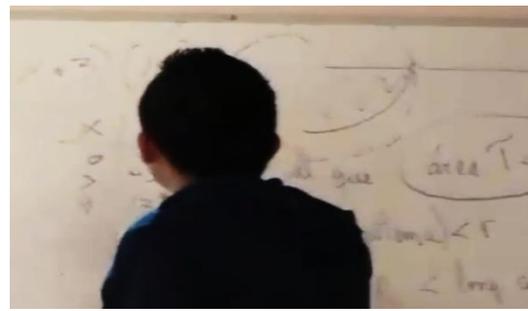


Figura. 7d. Interpretación errónea de la función

Reflexión entre estudiantes: uno propone el modelo (Figura 7c) que representa la propagación del chisme, el otro (Figura 7d) insiste en que se debe multiplicar por tres... no identifica la función Exponencial $y = 3^x$.

4.3. ENTREVISTAS

Guión. Respuestas a los reactivos correspondientes a la resolución de los problemas planteados: 1o) [EJ], crecimiento de bacterias; 2o) [EO], propagación de “rumor”: determinación el modelo; representación gráfica y solución a la situación planteada.

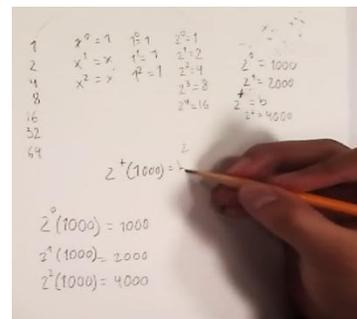
Casos: [EJ] y [EO]

[EJ] 1o)... población inicial 1000 bacterias; se duplican cada hora:

a) El modelo.

P: ¿Puedes predecir el resultado que te piden (cantidad de bacterias en $t=24$ hrs)?...

J: Bueno ¿no sería $2t(1000) = b?$...



P: ¿La representación gráfica de lo que está ocurriendo cómo queda?
 J: ¿Comienza en mil no?
 P: ¿Entonces no empieza en el origen?
 J: así si si...
 P: Fíjate en la tabla
 J: Entonces si empieza en mil.



b) Representación de la gráfica para la cantidad de bacterias 24 horas después.

¿Qué tiene que ver 3^x ?
 Una vez que logró graficar las funciones 2^x y 3^x :
 P: Si ya tienes la gráfica de las dos funciones ¿Cómo será la gráfica de la función e^x ?
 J: Quedaría aquí (señala el espacio entre las dos gráficas)

[EO] 2o) “Rumor”: modelo; gráfica y solución y conflicto.

Tri-dobles...

P: Si los dobles son en tres partes ¿podrías establecer una relación semejante?
 O: Sí (procede a realizar los dobles, desdobra; establece la relación correspondiente y la registra en la tabla)...
 P: Bien,...

Dobles	Partes
1	3
2	9
3	27
4	81
7	2187

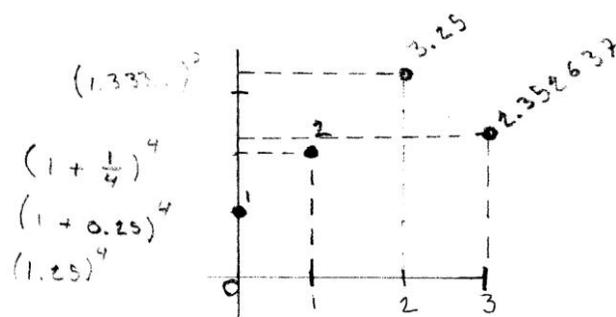
3^n

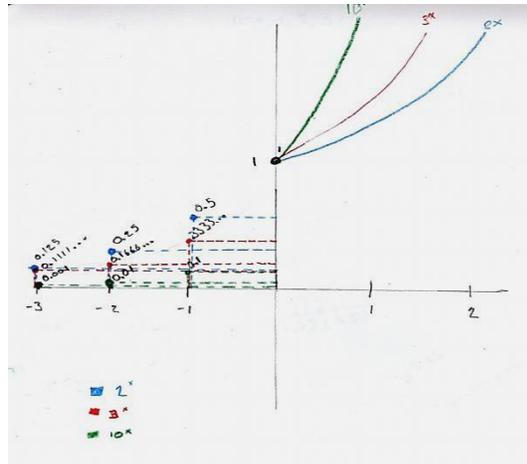
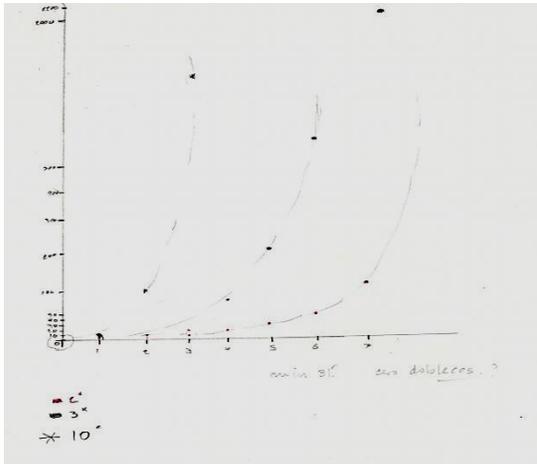
$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 3 \\ \hline 9 \\ \times 3 \\ \hline 27 \\ \times 3 \\ \hline 81 \\ \times 3 \\ \hline 243 \\ \times 3 \\ \hline 729 \\ \times 3 \\ \hline 2187 \end{array}$$

Y ¿Cuál es la reflexión?

P: Ahora... grafica la expresión: $(1 + 1/n)^{1/n}$... para valores de n...
 O: ... aquí no hay dobles?
 P: No, es una expresión matemática...
 O: [Valora... a la vez que grafica...]
 P: Bien,...

P: Ya tienes las gráficas para las funciones: 2^x , 3^x y e^x
 ... ¿Cuál el valor de ésta para n=0?
 O: ... (Recupera su información, precisa y grafica...)...





5. CONCLUSIONES

Los resultados del análisis permiten concluir:

- La adquisición, entendida ésta como las nociones que manifiestan en las respuestas correspondiente a los cuestionarios (ver tablas de resultados: 4, 5 y 6), por los estudiantes, del concepto de función exponencial se reduce a la identificación de relaciones entre las progresiones, aritmética y geométrica, correspondientes (fenómeno binario);
- Serios problemas para identificar relaciones que implican la “base 3” del modelo exponencial ante situaciones concretas;
- La noción de la función logarítmica no se concibe, como se advierte en los conflictos para interpretar los resultados de la resolución de los problemas respectivos a los modelos de: 2^x para el caso de la bipartición de bacterias y 3^x para el caso del de la propagación del “rumor,” por parte de los estudiantes;
- Respecto a la función exponencial “base e ” solamente se identifica su representación gráfica;
- No se ha adquirido el concepto de función exponencial, los estudiantes lo manifiestan en sus respuestas ante la cuestión del valor de la función cuando $x = 0$.
- Respecto a la función (inversa) no hay sentido. Su presencia en la resolución se asocia al uso de la calculadora como medio.

6. REFERENCIAS

- Académica de Matemáticas, DEMS. (2003). *Geometría y Trigonometría. Libro para el estudiante* (primera edición). México: IPN.
- Acuerdo Académico Colegiado: DME/Cinvestav—CECYT No 4/IPN. Informe Técnico (2012).
- Gustafson, D. R. (2000). *Álgebra intermedia*. México: Internacional Thomson Editores.
- Butts, T; Phillips, E. y Shaughnessy, M. (1998). *Álgebra con aplicaciones*. Oxford, University Press.
- Dirección de Educación Media Superior, Secretaría Académica, Instituto Politécnico Nacional (DEMS, SA, IPN) (2008). *Geometría y Trigonometría. Plan de estudios*. México: IPN.