LOS ESQUEMAS DE ACCIÓN DE LOS ESTUDIANTES DE BACHILLERATO EN PROBLEMAS RELATIVOS A LAS ECUACIONES LINEALES DE UNA VARIABLE

Francisco Javier Mejía Guardado, Nancy Janeth Calvillo Guevara,
Luis Manuel Aguayo
fco_mejia@live.com.mx, ncalvill@mate.reduaz.mx, l_aguo@yahoo.com.mx
Universidad Autónoma de Zacatecas
Reporte de investigación
Superior

Resumen
En este escrito se presenta una problemática existente en torno a la enseñanza de las ecuaciones lineales. Esto se relaciona con lo detectado en los estudiantes de matemáticas I del colegio de bachilleres del estado de zacatecas; que pocas veces utilizaban el álgebra como una herramienta útil para resolver problemas. Por tal situación se optó por profundizar en los esquemas de acción que utilizan estos estudiantes, para ello se tomaron algunas nociones fundamentales de la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la resolución de problemas de Schoenfeld y la fenomenología didáctica de Freudenthal; que nos suministraron las herramientas de análisis didáctico necesarias para la caracterización de las formas en que los estudiantes actúan al momento de enfrentarse a tareas relativas a las ecuaciones lineales de una variable. Además, mediante la reflexión de lo encontrado a través de la puesta en marcha de un instrumento, se pudo inferir que la escuela enseña a resolver ecuaciones lineales; más no a plantearlas.

Palabras clave: *Esquema, campo conceptual, ecuaciones lineales.*

1. INTRODUCCIÓN

"Debido al papel fundamental que la matemática tiene para la humanidad, desde hace más de 3000 años, se le ha dado un importante lugar en la educación" (Caballero, 2010, p.1), esto se debe en gran parte a los avances científicos y tecnológicos de los cuales la matemática es pieza fundamental. Es por ello que la *escuela* elige ciertos objetos matemáticos para ser enseñados. Por ejemplo, el objeto matemático denominado ecuación lineal que pertenece al álgebra, aparece como tema de estudio dentro del programa de segundo y tercer año de la Educación Secundaria y en el de primer semestre del nivel medio superior (bachillerato), en particular en los Colegios de Bachilleres en la materia de Matemáticas I. Además dicho tema en muchos de los casos llega hasta la enseñanza superior en materias como Álgebra Superior o Álgebra lineal, que se llevan en las Licenciaturas de Matemáticas, e incluso en las Ingenierías Civil y Telecomunicaciones y Electrónica.

Sin embargo, la enseñanza de este objeto matemático no es sencilla, pues existen dificultades de aprendizaje que manifiesta el alumnado a lo largo de su proceso educativo, y que han sido estudiadas desde múltiples perspectivas y han generado marcos conceptuales y modelos explicativos diversos, como en los estudios de Artigue (2000, en Mabel, 2004) y Mabel (2004), en los que se trabaja con estudiantes los sistemas de ecuaciones lineales mediante sus representaciones semióticas.

Aunque el álgebra elemental no es la única área en la que los alumnos presentan errores, sí es una parte esencial de la matemática escolar, ya que estudia las estructuras, las relaciones y las cantidades, permite hacer generalizaciones y en consecuencia abstracciones (Caballero, 2010). Es así que, por ejemplo, según Guzmán (2000, en Mabel, 2004) los estudiantes tienen dificultades para usar las operaciones aritméticas más elementales en problemas reales que involucran ecuaciones.

Es así que el presente trabajo surge a partir de la problemática relativa al aprendizaje del álgebra señalada en los párrafos anteriores, aunada a lo observado con alumnos de bachillerato, particularmente del colegio de bachilleres del plantel “Luis Moya”. A partir de la experiencia como profesor en dicho plantel se observó que los estudiantes nunca o casi nunca hacían uso de las ecuaciones lineales (sin importar el grado que estuvieran cursando) como una herramienta que les podría ayudar a resolver situaciones de la vida real, situación similar a la caracterizada en los trabajos de Maffey (2006), Giraldo (2010) y Nava (2012).

Por lo anterior se propone investigar sobre el aprendizaje que tienen los alumnos del primer semestre del colegio de bachilleres del plantel Luis Moya después de haber estudiado el tema de ecuaciones lineales. Fundamentalmente, las inquietudes surgidas llevaron a una:

Pregunta de investigación: ¿Qué esquemas de acción emplean los estudiantes del curso de Matemáticas I del Colegio de Bachilleres del plantel Luis Moya en el estado de Zacatecas, al momento de enfrentarse con situaciones del tipo matematización horizontal y vertical que se pueden resolver usando ecuaciones lineales de una variable?

Además, para contestar dicha pregunta nos propusimos un objetivo general: identificar y describir a partir de la Teoría de los Campos Conceptuales los esquemas de acción que sobre las ecuaciones lineales de una variable tienen los estudiantes del curso Matemáticas I, del Colegio de Bachilleres plantel Luis Moya, en el estado de Zacatecas.

2. MARCO CONCEPTUAL

Para poder lograr el objetivo planteado, caracterizar los esquemas de acción, se han elegido conceptos básicos de la fenomenología didáctica de Freudenthal, de la teoría de los campos conceptuales, y de la resolución de problemas de Schonfeld, mismos que a continuación son descritos.

En un enfoque de estudio en el cual se utilizan situaciones del mundo real para aprender matemática, como es el caso del enfoque por competencias, se busca que estas situaciones sean matematizadas para establecer relaciones formales y estructuras abstractas y así tener una mejor competencia sobre las mismas, por eso es imprescindible identificar el conocimiento que posee un individuo sobre estas dos características después de haber estudiado ciertos conocimientos, en este sentido es que ayudará la teoría de Freudenthal.

Al organizar un problema y tratar de identificar los aspectos matemáticos, descubriendo las regularidades y las relaciones con otros problemas ya trabajados, los alumnos hacen uso de lo que Treffers (1987, en Santamarina, 2006) denomina “matematización horizontal”. Posteriormente se utiliza la “matematización vertical” para desarrollar conceptos matemáticos por medio del uso de modelos.

Dentro del proceso de matematización horizontal, los alumnos generalizan herramientas matemáticas, las cuales los ayudan a organizar y a solucionar una situación problemática presentada dentro de un contexto de la vida real. Identificar o describir la matemática específica que es relevante dentro de un contexto general, esquematizar, formular y visualizar un problema de diversas maneras, descubrir relaciones y regularidades, reconocer un aspecto isomorfo en diversos problemas son ejemplos de actividades de matematización horizontal. Para Treffers (1987, en Santamarina, 2006) lo anterior implica convertir un problema contextual en un problema matemático.

La matematización vertical es el proceso de reorganización dentro del mismo sistema matemático. Representar una relación como fórmula, probar regularidades, mejorar, ajustar, combinar e integrar modelos, formular un modelo matemático y generalizar son ejemplos de las actividades de matematización vertical. Por esta razón se dice que la matemática vertical es tomar una situación matemática y elevarla a un nivel más alto de abstracción. Al proponer en la clase problemas que admitan soluciones en diferentes niveles matemáticos, se puede inducir a los alumnos a realizar este tipo de matematización vertical (Freudenthal, 1991; Gravemeijer y Terwel, 2000, en Santamarina 2006, p. 18).

Ahora, dado que se puede ver "el grado de conocimientos" que posee un individuo a través de la matemática horizontal y matemática vertical, es necesario tener un modelo que nos ayude a interpretar lo que un sujeto sabe al momento de enfrentarlo a una situación dada; es decir, poder analizar qué es lo que utiliza mentalmente, para ayudarnos en esta tarea se tomará la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud.

Esta teoría es importante para este estudio, puesto que dará una visión sobre cómo los estudiantes aprenden a resolver ecuaciones lineales, describiendo el proceso sobre el que construyen su conocimiento, es así que Vergnaud hace una distinción entre los esquemas[1] que un individuo utiliza cuando sabe cómo resolver una situación y los esquemas que construye a partir de enfrentarse a una nueva situación.

Para describir el esquema utilizado por un sujeto es necesario que éste resuelva una tarea, de esta manera, se observará el funcionamiento del esquema en la situación; es decir, el "esquema de acción" es el tipo de acción o "algoritmo" que utiliza un sujeto para una tarea específica. La descripción de los esquemas de acción de un alumno cuando afronta una situación que involucra ecuaciones lineales, nos proporciona información sobre la competencia que se tiene, pues como se ha dicho anteriormente las competencias son la forma en que el sujeto responde a una tarea específica, por ello es necesario tenerlas en cuenta.

Pero para ello, se requiere distinguir lo que se entiende por la expresión "concepto en acto" y "teorema en acto", que según Vergnaud (1990) se refieren a los conocimientos contenidos en los esquemas y se les puede designar también como "invariantes operatorios".

Los conceptos en acto aluden a categorías referidas a los objetos, sus propiedades y sus evoluciones, cuyo conocimiento permite hacer una interpretación de la realidad y aplicar los esquemas adecuados a un determinado tipo de situación (Soto, 2003) por ejemplo para el caso de ecuaciones se puede hablar de algunos conceptos en acto como: número, igualdad, ecuación, suma, resta, multiplicación y división.

[1] Llamaremos "esquema*" a la organización invariante de la conducta para una clase de situaciones dadas* (Vergnaud, 1990, p. 2). Esto es el tipo de acción o "algoritmo" que utiliza un sujeto para una tarea especifica.

Mientras tanto, los teoremas en acto se manifiestan como proposiciones verdaderas que se aplican en un gran número de situaciones, en éstos, los alumnos manifiestan ciertos axiomas matemáticos pero sin ser comprendidos como tales (Soto, 2003). Por ejemplo para el caso de ecuaciones algunos teoremas en acto son: propiedad conmutativa, asociativa y distributiva, existencia del neutro aditivo, neutro multiplicativo, inverso aditivo, inverso multiplicativo y la propiedad uniforme[2].

Hasta este momento se sabe cómo interpretar lo que un sujeto entiende sobre un concepto, sin embargo, aún faltan elementos teóricos que permitan observar cómo es que él mismo afronta la situación dada, qué es lo que piensa, que pasará con ella a futuro antes de que comience, además de qué método usará y con qué pertinencia sobre él lo usa. Por esta causa es imperativamente necesario hacer uso de algunos conceptos de la teoría de Schoenfeld que colaborará para ayudarnos a observar y posteriormente analizar las tareas antes mencionadas.

Los recursos son los conocimientos previos que posee el individuo; se refiere, entre otros, a conceptos, fórmulas, algoritmos, y, en general, todas las nociones que se considere necesario saber para enfrentarse a un determinado problema. Es decir, son los esquemas (Vergnaud) que tiene el individuo en su repertorio histórico.

Por otro lado, para Polya (1965) la Heurística Moderna trata de comprender el método que conduce a la solución de problemas, en particular las operaciones mentales típicamente útiles en este proceso. La heurística se puede considerar como el primer paso del esquema, por eso cuando en el análisis del esquema se encuentra que solo consta de un paso, se hablará solo de heurística, por el contrario si este consta de más pasos este se describirá mediante los demás pasos del esquema.

Como se ha podido observar nuestro marco conceptual está conformado por varias teorías, por lo que es necesario que expliquemos la relación entre ellas. Primero, es necesario saber que cuando un individuo ha estudiado algún tema de matemáticas, entre los conocimientos que posee se puede hacer una partición: el nivel de abstracción que tiene dentro de ese mismo tema, es decir, hasta qué nivel de complejidad puede llevar a operar ese saber y por otro lado, la capacidad que tiene de relacionarlo con otros saberes o con otras disciplinas.

Los elementos de dicha partición no serían sino la matematización vertical y la horizontal respectivamente (Freudenthal). Después, para analizar las concepciones que tiene el individuo acerca de cualquiera de estas particiones, es necesario enfrentarlo a una situación específica de modo de que sus representaciones nos den cuenta de los conceptos en acto y teoremas en acto que está utilizando (Vergnaud), para esto es necesario tener presente qué saberes posee el individuo en su repertorio o los recursos con los que cuenta para enfrentar la situación (Schoenfeld).

3. MÉTODO

En esta sección se describe el instrumento utilizado así como las características de la aplicación de las tareas.

[2] Establece que si dos miembros de una igualdad se les suma, resta, multiplica o divide por una misma cantidad, la igualdad se conserva.

En este caso, se ha construido una aproximación al método que utiliza Vergnaud para sus estudios sobre las concepciones y las competencias[3]; es decir, se le dará alguna tarea al sujeto que precisa la modelización y resolución de una ecuación de primer grado para que la resuelva en una hoja de papel y después con lo expuesto en esa hoja se analizarán los esquemas de acción que utilizó para resolver dicha tarea, específicamente se tratará de identificar el tipo de heurística o esquema de acción y las características de los errores cometidos.

El instrumento que se utilizará para analizar las concepciones consistirá en dos pruebas: una que ayude a identificar la matematización vertical y otra que ayude con la horizontal. Para el caso de la matematización horizontal se propone la siguiente situación:

-Instrucciones: Únicamente Plantea la o las ecuaciones que resuelven el siguiente problema:

"Gera, Jos y Alex ganan entre los tres $120. Jos gano $20 menos que Gera y Alex ganó el doble que Jos ¿Cuánto ganó cada uno? "

Para el caso de matematización vertical se tiene la siguiente:

Instrucciones: Resuelve el siguiente problema con la ecuación que se te da o de la forma que prefieras:

"Gera Jos y Alex ganan entre los tres $120. Jos gano $20 menos que Gera y Alex ganó el doble que Jos ¿Cuánto ganó cada uno? "

$$x + x - 20 + 2(x - 20) = 120$$

La primer prueba es simplemente para ver la capacidad que tiene el alumno para pasar de un problema contextual a un problema matemático, para ver los esquemas de acción que se tienen sobre el concepto de ecuación lineal, la otra prueba ayudará para ver qué esquemas de acción tienen los alumnos, específicamente en el contexto algebraico, cuando se le pide resolver un problema de ecuaciones lineales. Como se puede observar, la diferencia entre las tareas consiste en que en la primera, el estudiante tendrá que relacionar el problema con un sistema de ecuaciones, traduciéndolo a un lenguaje matemático, en la segunda actividad se pide que resuelvan el problema a partir de la herramienta (ecuación) que se les da y se esperarían diferentes formas de resolver el mismo.

En cada una de las actividades o tareas se pretende observar las heurísticas, los conceptos, los errores y teoremas en acto mediante el análisis de sus representaciones, teniendo siempre en cuenta los recursos que el individuo posee y le deberían ayudar a resolver la misma.

Las tareas se aplicaron a dos grupos de primer semestre del Colegio de Bachilleres plantel Luis Moya[4], en el grupo A fueron 27 alumnos y en el grupo C, 28, cabe mencionar que en cada uno de ellos había al menos un repetidor.

Estos grupos comenzaron el semestre con una maestra como titular de la materia de Matemáticas I, que sólo estuvo dos semanas y media. Posteriormente, el autor de este trabajo tomó el grupo

[3] Básicamente, Vergnaud plantea ciertas "tareas" a los sujetos estudiados y una vez registradas sus acciones en hojas de papel o en videograbaciones, hace un análisis de los "esquemas de acción" que utilizaron los sujetos para resolver la tarea o la manera en la que éstas van evolucionando.

[4] Esto se debió a que el autor del presente trabajo les había impartido clase en el trascurso del semestre.

durante tres meses. Para finalizar, las últimas dos semanas de clase estuvieron a cargo de otro profesor; es decir, este grupo tuvo tres profesores distintos durante el semestre.

La aplicación de las tareas se tenía planeada al concluir el tema de ecuaciones lineales, no obstante el cambio de profesor se dio una semana antes de que esto ocurriera, por lo que se optó por entrevistarse con el último profesor para pedirle que aplicara las tareas al terminar el tema.

Además, hay que decir que la primera tarea se aplicó a los dos grupos, mientras que en la segunda sólo se le pudo aplicar a uno, la explicación dada por el maestro encargado fue que ya no tuvo clases con el otro grupo y se le terminó el semestre.

La aplicación de las tareas se dio de la siguiente manera:

La primera se aplicó al grupo C el Miércoles 7 de Diciembre del 2011 antes del receso (9:40 a 10:30), según las evidencias esta tarea comenzó a las 9:50 y los estudiantes tuvieron alrededor de 20 minutos para responderla, fue aplicada a 26 alumnos.

Al grupo A se le aplicaron las dos el Viernes 9 de Diciembre del 2011 en la penúltima hora de clase del día (12:40 a 13:30), en promedio las tareas tuvieron una duración de 20 minutos, la dinámica consistió en aplicar la primera tarea durante los primeros 20 minutos de la sesión, posteriormente se recogió a todo el grupo, e inmediatamente se comenzó con la segunda, estas tareas fueron aplicadas a 15 alumnos.

4. RESULTADOS

En esta sección se describirán algunos de los esquemas de acción más importantes que caracterizamos a partir de nuestro estudio.

1 En la situación de matematización horizontal (tarea 1), se obtuvo la heurística algebraica, con los siguientes esquemas de acción: tomar a Gera como incógnita principal, tomar a Gera como incógnita principal con una interpretación literal del enunciado, tomar a Jos como incógnita principal, interpretación conjunta del dinero de Gera y Jos, interpretación que da preferencia a los números involucrados en el enunciado y método de repartición. A continuación describiremos las heurísticas basadas en establecer una relación algebraica a partir del dinero de Jos:

Este tipo de heurística se caracteriza porque los estudiantes que la ejecutan toman a Jos como incógnita principal. La característica principal es que los estudiantes toman como incógnita y dan el valor de x a Jos y después de eso buscan las relaciones que tienen las demás cantidades con ésta; es decir, llaman x a la cantidad de dinero que ganó Jos y por lo tanto, asumen que el dinero que ganó Gera es $x + 20$ y el de Alex es $2x$; además, como la suma de los tres es de 120 plantean la ecuación como se muestra en la Figura 1. Siendo ésta una buena matematización.

$$\boxed{x + x + 20 + 2x = 120}$$

Figura 1

De esta categoría de representación se puede concluir que este grupo de alumnos hace uso de los métodos convencionales para el planteamiento de una ecuación, además se considera que esta matematización sí modela la situación planteada.

2. En la heurística algebraica de la prueba 1, los errores cometidos fueron: usar el álgebra para repartir, traducción literal de todo el enunciado, interpretación del dinero de Alex con base en el dinero de Gera, dos incógnitas en misma variable, traducción literal del dinero de Jos y no plantearon ecuación. Veamos lo sucedido en el error Las Heurísticas basadas en plantear en una expresión el dinero de Gera y Jos.

Este tipo de heurísticas se caracteriza porque se da una interpretación conjunta al dinero de Gera y Jos, En esta heurística se puede observar que se asigna la x a Gera, y por otro lado, la siguiente relación se plantea como $x - 20$, que en el problema equivale a decir que el dinero de Jos es igual al dinero de Gera menos 20 pesos. Por último, se asocia $2x$ al dinero de Alex, en la Figura 2 se puede observar cómo se plantea la ecuación.

Figura 2

En la Figura 2, se puede observar que solamente tomó en cuenta el dinero de Jos y el de Alex, dejando de lado el dinero de Gera, una interpretación para esto puede ser que al poner x en la ecuación, el alumno pudiera pensar que ya incluyó a Gera, posteriormente, al querer incluir el dinero de Jos, en la ecuación, que ganó $x - 20$, sólo le resta 20 a las x que ya tenía, por último, para el dinero de Alex, toma literalmente la interpretación del enunciado.

3. En la situación de matematización vertical (tarea 2), se observan dos tipos de heurísticas; las aritméticas y la algebraica. Dentro de las aritméticas se aprecia la de dividir el total y la de estimar. En ambas clasificaciones se encuentra que los estudiantes utilizaron conceptos en acto como: Número, División, Igualdad, Resta y Suma.

4. En la heurística algebraica se utilizaron los conceptos en acto: Número, División, Igualdad, Resta, Suma y Ecuación y teoremas en acto como: Propiedad uniforme para la suma, Propiedad uniforme para el producto, Asociativa, Juntar términos semejantes, Asociativa del producto. En lo siguiente analicemos uno de ellos: Simplificación de resultados

Como se puede ver en la siguiente figura, el estudiante toma la ecuación propuesta, luego utiliza el teorema en acto de sumar términos semejantes (propiedad asociativa); es decir, sumó el término x con su semejante x y puso $2x$.

Para el análisis se considera como teorema en acto el sumar términos semejantes (propiedad asociativa) para referirnos a la operación que realizan los estudiantes con variables, y teorema en acto propiedad asociativa para la operación que realizan los estudiantes con números.

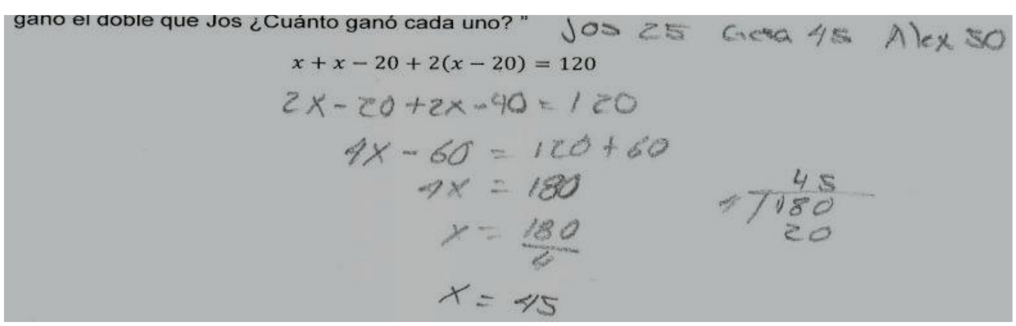

Figura 3

Después de eso, utilizó el teorema en acto de multiplicación de polinomios que usó en el término *2(x–20)* donde se dice que se multiplican "todos contra todos" (propiedad distributiva), utilizando aquí el teorema en acto de multiplicación algebraica y aritmética, que a partir de ahora se referirá a él como el teorema en acto propiedad distributiva. Por eso puso la expresión: *2x–40*. En el siguiente paso del esquema volvió a utilizar el teorema en acto de sumar términos semejantes que en ese caso eran *2x* y *2x* además del teorema en acto propiedad asociativa cuando suma los términos *-20* y *-40*, de este modo puso del lado izquierdo de la igualdad *4x – 60*.

Aquí (Figura 3) se observa que en el lado derecho existe un + *60*, y se considera que es porque usó el teorema en acto de la propiedad uniforme[5] para la suma, con el número – *60*, del lado izquierdo de la igualdad, faltándole en este paso ponerlo también del otro lado, sin embargo, se observa que lo toma en cuenta y lo aplica bien ya que en el siguiente paso escribe de forma correcta la siguiente ecuación, Enseguida, como se puede ver en la Figura 3, para encontrar el valor de *x* utiliza la propiedad uniforme para el producto, al despejar *x* de la expresión *4x*, por tanto, se observa que dividió *180/4*, llegando con esto al resultado para *x.* Para finalizar la resolución del problema, como se puede ver en la Figura 3, este grupo de alumnos asocia el valor encontrado con el dinero de Gera, posteriormente le resta *20* para encontrar el dinero de Jos, obteniendo *25*. Por último, multiplica éste resultado (*25*) por *2*, para obtener el dinero de Alex (*50*).

En la segunda tarea, los principales errores estuvieron ligados a: la jerarquía de operaciones, la variable menos un número, las leyes de los signos, las leyes de la igualdad y la suma de exponentes.

5. CONCLUSIONES

A partir de lo analizado con la teoría, se puede afirmar que el proceso de aprendizaje de las ecuaciones lineales que llevaron esta serie de alumnos en el curso de matemáticas I, les hizo falta trabajar con situaciones de matematización horizontal, como son el planteamiento de ecuaciones o la búsqueda de relaciones entre los objetos matemáticos y otras disciplinas del conocimiento.

La variedad de esquemas encontrados en el análisis de la prueba 1, sobre matematización horizontal remite a la ausencia de esquemas en los recursos que tienen los alumnos para enfrentar situaciones de este tipo. En lo referido a la matematización vertical, también existe una variedad de esquemas, sin embargo, la mayoría de los teoremas en acto en los que reposan dichos esquemas carecen de validez. Es decir, es necesario realizar modificaciones en las actividades de enseñanza y aprendizaje propuestas por el programa de estudios para mejorar el nivel de desarrollo de las competencias que se pretenden.

Por otra parte, es importante destacar que no se encontraron formas de solución distintas de las que la escuela proporciona, por ejemplo hubo alumnos que en la tarea 1 habían encontrado un sistema de ecuaciones adecuado y distinto al planteado en la tarea 2, sin embargo, no lo retomaron cuando intentaron resolver la tarea 2. Además solo en un estudiante se encontró la verificación del resultado por lo que se puede decir que hace falta que el alumno aprenda, una vez encontrado un posible resultado, a verificarlo, aprendizaje que tampoco se incluye entre las competencias de los programas de estudio.

[5] Establece que si dos miembros de una igualdad se les suma, resta, multiplica o divide por una misma cantidad, la igualdad se conserva

Para finalizar, se puede decir que, el esquema construido para realizar el análisis de la información constituye una herramienta metodológica fecunda, ya que a partir de ella se considera que pueden desarrollarse múltiples trabajos que exploren los procesos de conceptualización de objetos matemáticos y por lo mismo puede ser utilizado en otros trabajos de este estilo. La presente investigación también puede servir como punto de partida para investigaciones concernientes al desarrollo de instrumentos de prevención para una enseñanza defectuosa del tema de ecuaciones lineales en una variable, como la mejora de la intervención de las situaciones de matematización horizontal presentes en el plan de estudios.

6. REFERENCIAS

Caballero, M. (2010). *Concepciones y enseñanza del concepto de ecuación lineal, un estudio con profesores de bachillerato.* Tesis de licenciatura no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Yucatán.

Freudenthal, H (1991): *Revisiting Mathematics Education: China lectures*. Dordrecht: Kluwen Academia.

Giraldo, J.D. (2010). *Enseñanza del Algebra escolar desde la solución de problemas.* Colombia. Disponible en internet: http://faccbi.ucpr.edu.co/ecei/attachments/007_Ensenazadelaalgebraescolardesdelasolucion deproblemas.pdf

Mabel, S. (2004). Sistemas de Ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* Vol. 7, Núm. 1. pp. 49-78.

Maffey, S. (2006). *Estudio sobre la metacognición y competencia de profesores y estudiantes en relación al tema de ecuaciones lineales.* Tesis de maestría. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología avanzada del IPN. Versión digital disponible en http://www.mateedu.cicata.ipn.mx/tesis/maestria/maffey_2006.pdf.

Nava, P. (2012). *La enseñanza de los sistemas de ecuaciones lineales a través de las situaciones didácticas: Un estudio con alumnos de bachillerato.* Tesis de Maestría no publicada. Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas.

Polya, G. (1965). *Como plantear y resolver problemas.* México: Trillas (reimp. 1997).

Santamarina, F. I. (2006). *La conceptualización de la matemática en la escuela primaria de Holanda.* Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Comahue.

Soto, M. (2003). *El conocimiento didáctico de la división: un estudio con profesores en formación.* Tesis de Maestría no publicada. Unidad Académica de Docencia Superior, Universidad Autónoma de Zacatecas.

Vergnaud, G. (1990). La teoría de los campos conceptuales. *Reserches en didáctique des Mathématiques.* 10(2.3), 133-170.