MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL: UNA DESCOMPOSICIÓN GÉNETICA HIPOTÉTICA

Ofelia Montelongo Aguilar, Gustavo Martínez Sierra
omontelo@mate.reduaz.mx, gmartinezsierra@gmail.com
Universidad Autónoma de Zacatecas, Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN
Avance de investigación
Superior

Resumen
En este trabajo se presenta una descomposición genética hipotética de la matriz asociada a una transformación lineal. Con la intención de proporcionar al estudiante un camino viable para la comprensión de dicho concepto. En esta descomposición genética se describen las construcciones (acción, proceso, objeto y esquema) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, inversión y generalización) que el alumno debe seguir para lograr la construcción del concepto en estudio. Se utiliza como marco teórico- metodológico la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) y la primera componente de su ciclo de investigación que consta de un análisis teórico.

Palabras clave: *Matriz, transformación lineal, descomposición genética.*

1. INTRODUCCIÓN

El interés por los problemas que surgen en la enseñanza-aprendizaje del Álgebra Lineal comienza con el trabajo realizado por Harel en 1985, desde entonces varios investigadores de diversos países se han enfocado en detectar las ***fuentes de las dificultades*** de los estudiantes al estudiar las nociones del álgebra lineal en el nivel superior. Estas investigaciones han sido abordadas desde diferentes marcos teóricos y metodologías. Los resultados que se han obtenido resuelven solo de manera parcial la problemática, debido principalmente a las dificultades **cognitivas y conceptuales** que caracterizan a esta disciplina (Dorier & Sierpinska, 2001).

Los conceptos que se abordan en el Álgebra Lineal, en específico el de matriz asociada a una transformación lineal, son difíciles de entender para los estudiantes que inician un primer curso, Dorier (2000) considera que se debe a que los conceptos de Álgebra Lineal son conceptos “unifadores y generalizadores” ya que estos unificaron y generalizaron los diferentes métodos, herramientas y objetos, que ya existían en diferentes áreas de la matemática. Hillel (2000) ofrece evidencia que revela la existencia de un problema de aprendizaje de la matriz asociada a una matricial de un operador lineal. Menciona el tipo de errores que los estudiantes tienen al enfrentarse con el concepto. Nuestro interés va más allá de identificar los errores o dificultades que tienen los estudiantes, pretendemos ***entender de una mejor manera cómo se desarrolla en los estudiantes el aprendizaje del concepto de matriz asociada a una transformación lineal***. Y así no solo detectar los errores que tienen los estudiantes sino además ofrecerle un camino viable para que logren comprender el concepto.

2. MARCO TEÓRICO-METODOLOGICO

La teoría APOE está sustentada en ideas de Piaget concernientes a la abstracción reflexiva, y transpone estas al contexto de las matemáticas de nivel superior, para describir el desarrollo del pensamiento matemático en los estudiantes. La abstracción reflexiva se considera como aquel proceso que le permite al individuo, a partir de las acciones sobre los objetos inferir sus propiedades, o las relaciones entre objetos en un cierto nivel de pensamiento. (Dubinsky, 1991 a), 1991 b)). Dubinsky usa la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado, enfrentándolo a situaciones matemáticas que promueven su reflexión. Partiendo de la idea del conocimiento matemático como:

> El conocimiento matemático de un individuo es su "tendencia" a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, construyendo acciones, procesos y objetos y organizándoles en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas (Dubinsky & MaDonald, 2001, p.276).

El concepto "tendencia" se refiere a la capacidad del individuo de relacionar las construcciones mentales así como las interconexiones que un individuo utiliza para entender un concepto, y la forma en que un individuo usa (o no usa) éstas en situaciones problemáticas.

La teoría APOE considera que la construcción del conocimiento matemático pasa por tres etapas básicas: de acción, de proceso y de objeto; el mecanismo para pasar de un estado de construcción de conocimiento a otro, es la abstracción reflexiva. De este modo, la construcción del conocimiento matemático se realiza a través de distintas abstracciones sucesivas hasta llegar a construir de manera coherente un esquema asociado a un objeto matemático.

Una acción es interiorizada en un proceso en el cual la transformación es controlada de forma consciente por el individuo. El proceso es encapsulado en un objeto a través de acciones repetitivas y una reflexión sobre él. Los esquemas son una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, así como de las relaciones entre ellos en función del concepto. Esto se muestra en el siguiente esquema:

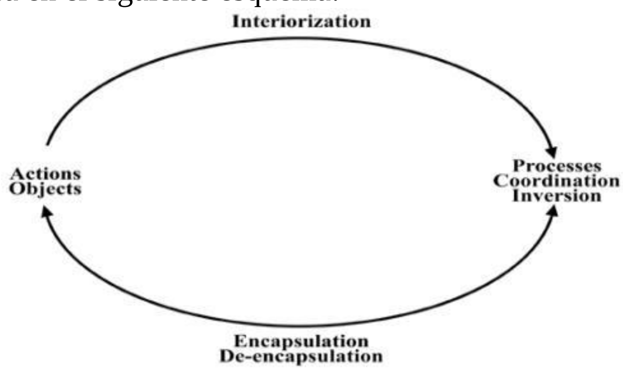

Figura 1. Construcciones y Mecanismos (Dubinsky, 1991).

Una **acción** es una transformación de los objetos que es percibida por el individuo como algo externo. La transformación es llevada a cabo por reacción a una indicación externa que da instrucciones sobre los pasos a seguir (Asiala, 1996). Un individuo tiene una concepción acción de una transformación dada, si su profundidad de comprensión está limitada a realizar acciones para llevar a cabo esa transformación.

Un individuo tiene una concepción acción de la matriz asociada a una transformación lineal si por ejemplo al trabajar con una situación problemática debe estar de manera explícita la instrucción: ***calcule la matriz que representa a la transformación lineal en las bases ordenadas dadas.*** Las acciones se determinan por la repetición del algoritmo.

1. Obtener la imagen de los vectores de la base ordenada del espacio vectorial de partida *V* bajo la transformación lineal *T* dada.
2. Escribir cada vector obtenido en el paso anterior como combinación lineal de los vectores de la base ordenada del espacio vectorial de llegada *W*, para obtener el vector coordenado.
3. Escribir cada vector coordenado como las columnas de una matriz A. Esta será la matriz asociada a la transformación lineal *T*.

Cuando una acción es repetida, y el individuo reflexiona sobre ella, puede ser interiorizada en un proceso. Es decir, un individuo hace una construcción interna que hace lo mismo que la acción, pero ahora no necesariamente dirigida por un estimulo externo (Asiala, 1996). Un individuo que ha construido un proceso puede describirlo, o igualmente invertir los pasos del proceso sin hacer los mismos. En contraste con una acción, un proceso es percibido por un individuo como interno, y bajo su control, más que algo que se hace en respuesta a indicaciones externas. Un individuo tiene una concepción proceso de una transformación dada, si su profundidad de comprensión está limitada a pensar sobre la transformación como un proceso.

Un individuo tendrá una concepción proceso de la matriz asociada a una transformación lineal si en una situación problemática el alumno percibe que ésta puede ser resuelta de manera más fácil si trabaja con la matriz asociada a la transformación lineal, y la calcula sin necesidad de aplicar explícitamente los pasos del algoritmo. O si el alumno es capaz de obtener la transformación lineal, dada la matriz asociada que le corresponde, cabe mencionar que en los libros de textos tradicionales de Álgebra Lineal no se proponen ejercicios en los cuales se les pida a los estudiantes obtener la transformación lineal dada su matriz.

Cuando un individuo reflexiona sobre las acciones aplicadas a un proceso particular, llega a ser consciente del proceso como una totalidad, se da cuenta que la transformación (que pueden ser acciones o procesos) puede actuar sobre él, y es capaz de construir tal transformación, entonces está pensando en un proceso como un objeto. En este caso se dice que el proceso ha sido encapsulado en un objeto (Asiala, 1996). Un individuo tiene una concepción objeto de un concepto matemático cuando la profundidad de comprensión del individuo de ese concepto es como un objeto. El individuo es capaz de realizar acciones y procesos sobre el objeto. Un objeto se puede desencapsular en el proceso del cual proviene para trabajar con dicho proceso cuando será necesario. Un individuo que tiene una concepción objeto de la matriz que representa a una transformación lineal es capaz de comprender, por ejemplo que la matriz asociada a la suma de dos transformaciones lineales es la suma de las matrices asociada a cada transformación lineal. O comprende el isomorfismo entre las matrices y las transformaciones lineales.

Dubinsky (1997, pp. 94-95) propone un ciclo de de investigación que consta de tres componentes:

- Componente 1: El análisis teórico mediante el cual se debe dilucidar cuales son las construcciones mentales que el estudiante necesita hacer para aprender un tópico matemático en particular.
- Componente 2: El diseño de estrategias de enseñanza que favorezca la creación de estas construcciones mentales.

- Componente 3: La observación y evaluación de la enseñanza, cuya finalidad es determinar si estas construcciones pudieron hacerse, qué es lo que el estudiante ha aprendido y la reconsideración sobre el análisis teórico y las estrategias didácticas.

3. ANÁLISIS TEÓRICO DE LA MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

La primera componente del ciclo de investigación de la teoría APOE como ya mencionamos, es el análisis teórico del concepto matemático en estudio. En él se describen las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas por el estudiante para el aprendizaje de dicho concepto. A este análisis se le conoce como descomposición genética del concepto (Asiala, 1996). Para llevar a cabo una descomposición genética se considera la experiencia en el aula que tienen los investigadores sobre la enseñanza-aprendizaje del concepto; además se pueden tomar en cuenta el análisis de los libros de texto que utiliza el docente en el curso y los resultados de los estudios previos (Roa & Octak, 2010).

La elaboración de la descomposición genética se guía por las preguntas: ¿Qué elementos previos debe poseer un estudiante para abordar de manera exitosa el concepto en estudio? ¿Qué construcciones y mecanismos mentales están relacionados a dicho concepto? Roa (2008).

1. Análisis de los libros de texto

Los dos primero libros de texto son considerados porque guían la enseñanza del curso de Álgebra Lineal II (donde se estudia la matriz asociada a una transformación lineal) en la Unidad Académica de Matemáticas de la Universidad Autónoma de Zacatecas, que es donde se llevará a cabo la investigación empírica, el tercer libo de texto es considerado porque fue diseñado para la enseñanza del Álgebra Lineal desde la teoría que conforma nuestro marco teórico.

1. *Sean V y W espacios vectoriales dimensionalmente finitos con bases ordenadas* $\beta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $\gamma = \{y, y_2, \dots, y_m\}$, respectivamente. Sea $T: V \to W$ lineal. *Entonces existen escalares únicos* $a_{ij} \in F$ $(i = 1, \dots, m$ *y* $j = 1, \dots, n)$ *tales que* $T(x_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i$ *para* $1 \leq j \leq n$. *Utilizando la notación anterior, llamaremos a la matriz A de* $m \times n$, *definida mediante* $A_{ij} = a_{ij}$, *la matriz que representa a T en las bases ordenadas* β *y* γ *y la escribiremos* $A = [T]_\beta^\gamma$. *Si* $V = W$ *y* $\beta = \gamma$, *escribiremos* $A = [T]_\beta$.

   (Friedberg, Insel y Spence, 2003)

2. *Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F, y sea W un espacio vectorial de dimensión m sobre F. Sea* $\beta = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ *una base ordenada de V, y* $\beta' = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$ *una base ordenada de W. Si T es cualquier transformación lineal de V en W, entonces T está definida por su efecto sobre los vectores* α_j. *Cada uno de los n vectores* $T\alpha_j$ *se expresa de manera única como combinación lineal* $T\alpha_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\beta_i$ *de los* β_i, *los escalares* $A_{1j}, \dots, A_{mj}$ *son las coordenadas de* $T\alpha_j$ *en la base ordenada* β'. *Por consiguiente, la transformación T está determinada por los mn escalares* A_{ij}. *La matriz* $m \times n$, *A, definida por* $A(i, j) = A_{ij}$ *se llama* ***matriz de T respecto al par de bases ordenadas*** $\boldsymbol{\beta}$ ***y*** $\boldsymbol{\beta'}$.

   (Hoffman y Kunze, 1973)

3. *Dados los espacios vectoriales U y V con bases ordenadas $B = [b_i]$ y C respectivamente, y una transformación lineal $T\colon U \to V$, la representación matricial de T con respecto a B y C es la matriz cuya J^{th} columna es el vector coordenado de $T(b_j)$ con respecto a la base ordenada C.*

(Weller *et al*, 2002)

Una cuestión que consideramos importante es que Friedberg da las definiciones de base ordenada y vector coordenado previas a la de matriz asociada a una transformación lineal, sin embargo la de vector coordenado no es referida de manera explícita en esta última, en cuanto a Hoffman la considera de manera implícita al mencionar que las columnas de la matriz son las coordenadas de los vectores $T\alpha_j$ en la base ordenada β'. Desde mi experiencia considero más apropiada la definición que proporciona Weller et al (2002) ya que al tratar con el concepto de vector coordenado para obtener la matriz que representa a una transformación lineal los estudiantes podrían tener una mejor comprensión por ejemplo de la relación entre la transformación lineal y la matriz que la representa, esperamos que los instrumentos de de recolección y análisis de datos den evidencia de esta afirmación.

Por otra parte las definiciones hacen mención a una considerable cantidad de conceptos previos como son: el de espacio vectorial dimensionalmente finito, el de base ordenada, transformación lineal y vector coordenado, sin mencionar los que están involucrados de manera indirecta, estos conceptos fueron abordados al final del curso de álgebra lineal I y principios del curso de álgebra lineal II, si los estudiantes no muestran una buena comprensión de ellos difícilmente podrán comprender el nuevo concepto.

2. Experiencia del docente- investigador

A impartir el curso de Álgebra Lineal II, he notado que las dificultades más comunes de los estudiantes al calcular la matriz asociada a una transformación lineal son: evaluar la transformación en los vectores de la base ordenada del espacio vectorial de partida, expresar a los nuevos vectores como combinación lineal de la base ordenada del espacio vectorial de llegada y de qué manera ordenar los vectores coordenados en una matriz (si como columnas o renglones).

3. Resultados de estudios previos

Por su parte, Weller et al. (2002) elaboraron un libro de texto para un curso introductorio de Álgebra Lineal titulado “Learning Linear Algebra with ISETL”, basado en el ciclo de enseñanza ACE (actividades (A), discusiones en clases (C) y ejercicios (E)), propuesto en la segunda etapa del ciclo de investigación de la teoría APOE.

En el libro de texto, se proponen cinco actividades que incluyen la realización de programas con el ordenador ISETL y el aprendizaje cooperativo. La intención es que los estudiantes pasen por las etapas de acción, proceso y objeto. Las actividades fueron diseñadas en base a una descomposición genética preliminar, las cuales son consideradas por Octak y Trigueros (2010) como un tanto esquemáticas y consideran debieran ser refinadas.

En el libro no se nuestras estas descomposiciones genéticas. Una cuestión importante de resaltar es que las actividades están diseñadas para trabajarse bajo espacios vectoriales finitos sobre campos finitos en particular consideran a $\mathbb{Z}_n$ como el campo y a $(\mathbb{Z}_n)^m$ como los espacios vectoriales.

Una de las nociones fundamentales para construir el concepto de matriz asociada a una TL es la de vector coordenado, dado que conforman las columnas de la matriz. Debido a que los vectores coordenados son esencialmente n-uplas (vectores con n componentes en un campo F) esperamos que el proceso vector coordenado le permita al estudiante ser consciente de que cualquier vector *V* se puede expresar por una n-upla, que puede ser encapsulado y que acciones y procesos pueden aplicársele, tal como ordenarlos (en columnas) en una matriz.

Una concepción acción de vector coordenado involucra que dada una base de un espacio vectorial *V* el estudiante pueda determinar el vector coordenado para vectores concretos. Una vez que el estudiante interiorice estas acciones (reflexione al repita la acción de obtener el vector coordenado para diferentes vectores) podrá ser consciente de que cualquier vector de un espacio vectorial V sobre un campo F puede ser representado por una n-upla entonces podremos decir que el estudiante tiene una concepción proceso de vector coordenado. Una vez que el estudiante encapsule dicho proceso podrá considerar a los vectores coordenados como objetos, podrá tomar un objeto y obtener uno nuevo mediante una multiplicación por una matriz, o podrá ordenarlos en columnas para formar una matriz.

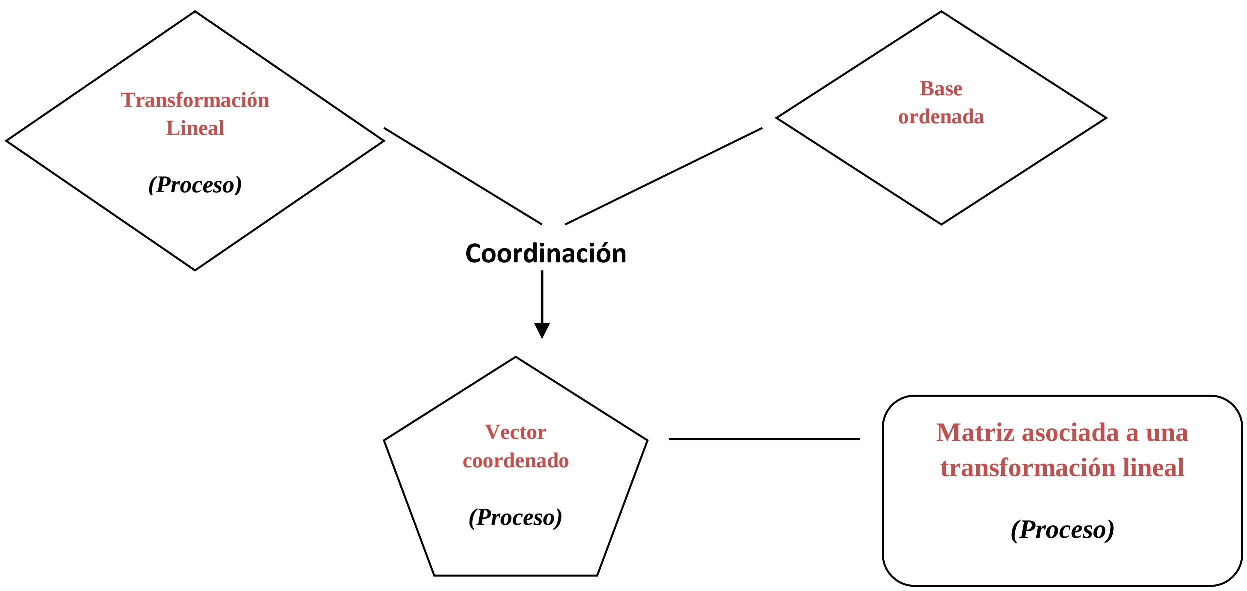

Figura 2. Coordinación de dos procesos.

El concepto de base se debe considerar como algo dinámico no estático, debido a que los vectores que resultan de aplicarle la transformación lineal a los vectores de la base ordenada del espacio vectorial de partida deben ser expresados como combinación lineal de la base ordenada del espacio vectorial de llegada. Los alumnos deben ser conscientes de que esto se puede hacer debido a que el espacio vectorial de llegada tiene una base y que la unicidad de los coeficientes permite asegurar que la matriz asociada a la transformación lineal en las bases dadas es única.

Por otra parte, se requiere que el estudiante tenga una **concepción proceso** del concepto de función ya que esto le permitirá ver a una TL como una transformación dinámica de objetos donde, dado un objeto inicial (un vector del espacio vectorial de partida) se produzca una transformación de él (un vector del espacio vectorial de llegada) (Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols, 1992).

Los procesos de base y transformación lineal se deben ***coordinan*** para obtener el proceso de vector coordenado (las acciones realizadas para expresar la imagen de los vectores de la base ordenada del espacio vectorial de llegada como combinación lineal de los vectores del espacio vectorial de partida, deben ser **interiorizadas** para obtener el vector coordenado), el cual debe ser encapsulado en un objeto ya que cada vector coordenado serán las columnas de la matriz asociada a la transformación lineal.

4. REFERENCIAS

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. y Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. En J. Kaput, Shoenfeld, A. y Dubinsky, E. (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education (Vol. II*, pp. 1-32). U.S.A.: American Mathematical Society.

Breidenbach, D., Dubinsky, E. Hawks, J. y Thomas, K. (1992). Development of the Process conception of Function. *Educational Studies in Mathematics, 23(3),* 247-285.

Dorier, J. (2000). Epistemological Analysis of the Genesis of the Theory of Vector Spaces. En Dorier, J. (Eds.), *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 3-81). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. y Sierpinska, A. (2001). Research into the Teaching and Learning of Linear Algebra. En Holton, D. (Eds.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 255-273). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991 a). Reflexive Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En Tall, D. (Eds), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1991b). The constructive aspects of reflective abstraction in advanced mathematics. En Steffe, L. (Eds.) *Epistemological Foundations of Mathematical Experiences* (pp. 160-220). New York: Springer-Verlag.

Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. En Holton, D. (Eds.). *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (Vol. *7*, pp. 273-280). Kluwer Academic Publishers.

Friedberg, S., Insel, A. y Spence, L. (2003). *Linear Algebra* (4ta ed.). New Jersey: Prentice Hall.

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. En Dorier, J. (Eds.). *The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 191-207). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Hoffman, K. y Kunze, R. (1973). *Álgebra Lineal* (1ra ed.). Bogotá: Prentice Hall.

Roa, D. (2008). *Construcción y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal* (Tesis de maestría no publicada). Cinvestav. México.

Roa, S. y Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13(1),* 89-112.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. y Dubinsky, E. (2002). Learning Linear Algebra with ISETL. Obtenido de http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf.