DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL-TRIGONOMÉTRICO

Gisela Montiel, Gabriela Buendía, Pilar Beltrán, Zaztal Santos
gmontiel@ipn.mx, buendiag@hotmail.com, pilysoria@gmail.com,
zaztal_17@hotmail.com
Instituto Politécnico Nacional, CICATA
Medio Superior

Resumen
Prosentamos un laboratorio centrado en la resignificación de la función trigonométrica, en un contexto gráfico-variacional. Nos proponemos crear un escenario didáctico-experimental donde el participante trabaje en la modelación y el estudio de un movimiento oscilatorio. El sentido experimental del escenario se fundamenta en la naturaleza de *lo trigonométrico*, un conocimiento cuya construcción está en estrecha relación a la *matematización* de la naturaleza, específicamente de los fenómenos periódicos. Mediante la lectura y el uso de las gráficas, nos proponemos construir aquello que le da sentido y dota de significados a la función trigonométrica, mostrando que ésta no es necesariamente una extensión y/o generalización de la razón trigonométrica.

1. PROPÓSITO Y ALCANCE

Fenómenos ligados a la enseñanza y aprendizaje del concepto de función han sido ampliamente reportados en la literatura especializada de la matemática educativa (Breidenbach, Dubinsky, Hawk y Nichols, 1992; Dreyfus, Eisenberg, 1991; Dubinsky y Harel, 1992; Hitt, 1998; Tall, 1996; Vinner, 1983; 1992). Todos estos trabajos de investigación reportaron distintos matices de la función cuando se llevó a escenarios escolares. Por ejemplo, su aprendizaje mediante el tránsito, vínculo y manejo adecuado de sus representaciones se ha convertido en un paradigma para líneas de investigación tales como la visualización. Estudios como los de Monna (1972) y Youschkevitch (1976) despertaron un interés especial por llevar al aula el proceso evolutivo del concepto de función, incluyendo sus etapas, aplicaciones y dificultades. Esta línea de investigación consideró al concepto *función* en lo general, es decir, las funciones algebraicas, exponencial, logarítmica y trigonométricas fueron tratadas por igual; su naturaleza particular no fue considerada como variable en sus objetos de estudio.

En la última década encontramos trabajos de investigación que se han ocupado del estudio de los fenómenos didácticos relacionados con la función trigonométrica (De Kee, Mura, y Dionne, 1996; Maldonado, 2005; Weber, 2005; Mesa y Herbst, 2010). Estas investigaciones se han caracterizado por estudiar cómo los métodos de enseñanza o los diseños innovadores permiten alcanzar, o no, cierta comprensión de la función trigonométrica, tal como se plantea en el currículo escolar. Alrededor de esa función, pero marcando una importante distinción, nos hemos planteado investigar sobre los procesos de construcción y transmisión de conocimiento, desde una perspectiva que parte de problematizar aquello que se debe enseñar y se debe aprender, es decir, nos preguntamos *qué es eso que enseñamos como función trigonométrica.*

2. PRELIMINARES METODOLÓGICOS

Nuestros estudios se han conducido por una propuesta metodológica (Montiel y Buendía, 2011) que se ha ido configurado al seno del enfoque teórico de la Socioepistemología y que se adapta al tipo de investigación que hace uso de ella (figura 1).

Figura 1

Problematizamos el saber trigonométrico al reconocer la confrontación de la trigonometría escolar con los usos de ese conocimiento en escenarios históricos (Montiel, 2011; Buendía, 2004; Buendía y Montiel, 2011; Buendía y Montiel, 2009), en escenarios experimentales (Beltrán, Montiel y Rodríguez, 2012) y en escenarios que problematizan sus propiedades (Buendía y Ordoñez, 2009; Vázquez, 2007; Buendía, 2006). Con base en estos análisis de corte socioepistemológico se ha configurado una epistemología de prácticas, que hemos llamado *funcionalidad trigonométrica* y que ejemplifica el cambio de atención de los objetos a las prácticas. Es decir, no estudiamos sólo el dominio de los contenidos, sino la construcción de aquello que le es propio a los saberes matemáticos y a la actividad (humana) de la que emerge. Ese énfasis en las prácticas le da el carácter de social a la construcción que propondremos en las siguientes secciones.

Actualmente hemos avanzado hacia el diseño de una situación problema que hoy nos proponemos presentar en el laboratorio, para discutir su congruencia con el marco teórico, su pertinencia en escenarios experimentales y la expectativa de situarla en escenarios escolares particulares. En este sentido, este "andar" metodológico ilustra distintos momentos en la investigación sobre la construcción de conocimiento trigonométrico y es de nuestro interés identificar, con la comunidad, elementos que fortalezcan el diseño y perfilen hacia las consideraciones del escenario escolar y las condiciones institucionales que permitan configurar situaciones de aprendizaje.

Desarrollamos en el presente documento la fundamentación teórica y la epistemología de prácticas que proponemos, con el objetivo de ocupar las sesiones del laboratorio en la puesta en escena de la situación problema y su discusión a la luz de lo aquí expuesto.

3. MÉTODO ENFOQUE TEÓRICO PARA LA CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE CONOCIMIENTO

El enfoque *Socioepistemológico* se propone como tarea fundamental estudiar el conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y a los escenarios socioculturales particulares, caracterizándolo como el fruto de las interacciones entre epistemología y factores sociales (Cantoral, 2002). Desde este enfoque la epistemología es entendida a través de la actividad humana y ello permite tomar como objeto de estudio situaciones que no están definidas en una estructura matemática y que, sin embargo, están presentes cuando se estudia al hombre haciendo matemáticas y no sólo su producción matemática (Arrieta, Buendía, Ferrari, Martínez y Suárez, 2004, p. 418). Es decir, otorga a la actividad humana la función de construir los objetos y los conceptos matemáticos en escenarios y contextos particulares.

La cognición, en la socioepistemología, se entiende como la capacidad de hacer emerger el significado a partir de retroalimentaciones sucesivas entre lo humano y su medio ambiente próximo, incluyendo lo cultural, a partir de una interacción dialéctica entre protagonistas (Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez, G., 2006). Sin embargo, para establecer una distinción entre los significados asociados a los conceptos matemáticos, con los significados asociados a la actividad humana, hablaremos de *significación* para referirnos a éstos últimos. Esta distinción se reporta en (Kilpatrick, Hoyles, Skovsmose y Valero, 2005) y se plantea que para entender el significado de un concepto se clarifica lo que se hace con dicho concepto, mientras que para comprender el significado de una acción se puede ver cuál es la intención (implícita) conectada a la acción. Nosotros en particular analizaremos la significación a partir del desarrollo de usos del conocimiento, en el sentido de Cordero (2005).

Para enmarcar los usos del conocimiento y sus significaciones asociadas, hablaremos de desarrollo del pensamiento matemático en el sentido de Cantoral, Farfán, Cordero, Alanís, Rodríguez, y Garza (2000):

> Dado que la actividad humana involucra procesos de razonamiento y factores de experiencia cuando se desempeñan cualquier clase de funciones, nos interesa que al hablar de pensamiento matemático nos localicemos propiamente en el sentido de la actividad matemática como una forma especial de actividad humana. De modo que debemos interesarnos por entender las razones, los procedimientos, las explicaciones, las escrituras o las formulaciones verbales que el alumno construye para responder a una tarea matemática... (p. 18)
>
> ... el pensamiento matemático no está enraizado ni en los fundamentos de la matemática ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana... (p. 19)

Es decir, entenderemos que el pensamiento matemático incluye construcciones sobre tópicos matemáticos, pero también procesos del pensamiento como la abstracción, la justificación, la visualización, la estimación, la aproximación, el reconocimiento de patrones o el razonamiento bajo hipótesis. Para estudiar cómo se desarrolla este tipo de pensamiento es necesario poner atención en las argumentaciones, los procedimientos y las explicaciones que el alumno configura, en forma escrita, icónica, gestual o verbal; para responder a una tarea específica.

4. CONSTRUCCIÓN SOCIAL DE LA FUNCIONALIDAD TRIGONOMÉTRICA

Para perfilar los elementos que conforman dicha funcionalidad, reconocemos que resulta necesario trabajar en un *contexto dinámico*, donde el estudio del movimiento y el cambio en fenómenos oscilatorios den sentido a sus propiedades periódica y acotada, así como de la unidad de medida que se necesita para representarlos (Buendía y Montiel, 2011). El pensamiento funcional trigonométrico estará inmerso en un contexto en el que importa entender cómo está variando el movimiento y desde ahí resignificar sus propiedades.

4.1 ACERCAMIENTO VARIACIONAL A LO TRIGONOMÉTRICO

El desarrollo de un pensamiento funcional trigonométrico se fundamenta en reconocer que el comportamiento trigonométrico se caracteriza, y se distingue de otros comportamientos algebraicos o trascendentes, por su variación y sus variaciones sucesivas: cómo cambia y cómo cambian sus cambios.

Esta particularidad la ilustran Buendía y Ordoñez (2009) retomando un ejemplo de un libro de texto (Miranda, 2003) sobre diseño de levas, un elemento mecánico que sirve para empujar a otro. En este contexto, el análisis del cambio es un punto fundamental a tratar pues cuando las levas giran a bajas velocidades, los cambios de fuerza que generan los cambios en la aceleración pueden despreciarse (Tabla 1). Sin embargo, a altas velocidades estos cambios se convertirán en fuerzas que actuarán en el seguidor y por ello se requiere que el movimiento de la leva no cambie de forma brusca. Así, se descarta el movimiento parabólico para levas de alta velocidad ya que si bien en apariencia es “suave", sus derivadas no lo son.

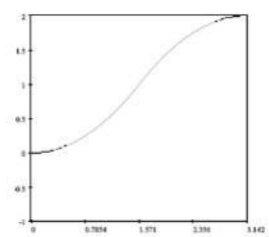
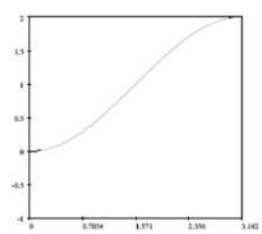
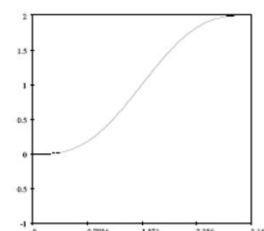
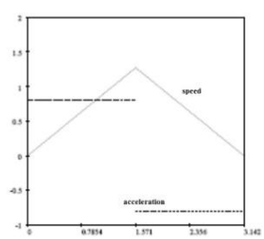
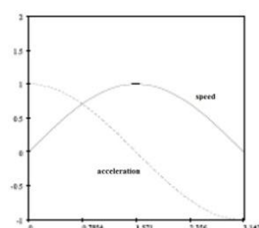
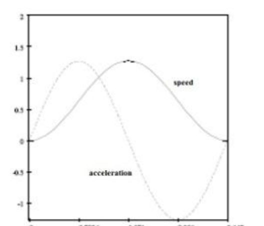
Movimiento Parabólico (P)	Movimiento Armónico (H)	Movimiento Cicloidal (C)	
 (Pa)	 (Ha)	 (Ca)	Gráfica del movimiento
 (Pb)	 (Hb)	 (Cb)	Gráfica de velocidad y de aceleración
$y = A\theta^2 + B\theta + C$ $y' = 2A\theta + B$ $y'' = 2A$ $y''' = 0$	$y = \frac{L}{2}(1 - \cos\frac{\pi\theta}{\beta})$ $y' = \frac{\pi L}{2\beta}\sin\frac{\pi\theta}{\beta}$ $y'' = \frac{\pi^2 L}{2\beta^2}\cos\frac{\pi\theta}{\beta}$	$y = L(\frac{\theta}{\beta} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi\theta}{\beta})$ $y' = \frac{L}{\beta}(1 - \cos\frac{2\pi\theta}{\beta})$ $y'' = \frac{2\pi L}{\beta^2}\cos\frac{2\pi\theta}{\beta}$	Expresión analítica

Tabla 1. Analizando variaciones (Buendía y Ordoñez, 2009)

La seguridad de usar levas de altas velocidades que presenten este tipo de movimientos se debe a que las funciones que modelan los movimientos armónico o cicloidal tienen comportamientos periódicos, y la derivada de la función los conserva. Por ejemplo, aunque la función de desplazamiento no sea periódica como en el caso de una leva que presenta un movimiento de ir y venir pero ascendente, su comportamiento sobre las abscisas sí presenta una repetición propia de lo periódico. Al derivar la función correspondiente, una composición entre lineal y periódica, dicha variación se mantiene y la velocidad y aceleración resultan periódicas.

Así, no es suficiente considerar únicamente que el movimiento sea suave; hay que considerar cómo será la variación de este movimiento para que no haya fuerzas que dañen al sistema. Reconocer entonces la variación *sui-géneris* de la cantidad trigonométrica conforma un elemento importante hacia la funcionalidad trigonométrica.

4.2 IDENTIFICANDO LO QUE SE REPITE

Diversas investigaciones (Buendía, 2006; Vázquez, 2007) han dado evidencia acerca de que el ejercicio intencional de la práctica de predicción favorece que lo periódico en un objeto matemático resulte una característica significativa.

Al trabajar con objetos periódicos o repetitivos, lo que favorece la predicción es una distinción entre el *se repite* y el cómo *se repite*. Al predecir, hay en primera instancia una búsqueda de aquella parte del objeto que de información suficiente para saber qué va a ocurrir después, cómo va a continuar su comportamiento. Esta identificación para las funciones, series o fenómenos periódicos no puede basarse en instantes (o puntos), sino tiene que ser una unidad de análisis o módulo generador (Vázquez, 2007) que contenga información suficiente. En particular, para las funciones trigonométricas, esta unidad de análisis recibirá el nombre de *periodo*.

Una vez entonces que el periodo ha sido identificado, el uso que se le dé hará evidente el tipo de repetición que presenta el objeto en cuestión. Este uso se revela a través de diferentes herramientas totalmente situacionales que se ponen en juego para poder predecir. En cualquier caso, la predicción evidencia el tipo de repetición presente y con esa base, la caracterizarización que se logra para lo periódico.

4.3 LO ACOTADO

La estrategia del círculo unitario para introducir a la función trigonométrica determina que el rango de la función queda en el intervalo [-1,1] y, por lo tanto, la función trigonométrica está acotada entre [-1,1]. Esto ocasiona un fenómeno didáctico similar al que ocurre con lo periódico, pues si bien lo trigonométrico está ligado por su origen a esas características, ambas deberían tener un marco de referencia más amplio que sólo lo trigonométrico para, entonces, ser también significativas al caracterizar a lo trigonométrico.

Al favorecer un contexto dinámico, varios autores reportan el uso de lo acotado como producto del tipo de movimiento analizado y sus condiciones iniciales. Como ilustración presentamos el trabajo realizado por Molina y Sánchez (2004). Ellos presentan un ejercicio de toma de datos en el movimiento oscilatorio de un balón para discutir el isocronismo del péndulo. Primero, plantean una toma de datos soltando el balón a una distancia de 30 cm del suelo y posteriormente, a una distancia de 15 cm; con los datos plantean una discusión acerca de las gráficas que se producen a través de un sensor de movimiento (Figura 2). En este experimento, lo acotado del movimiento del balón puede quedar ligado a las condiciones iniciales del mismo, en particular la relativa a la posición.

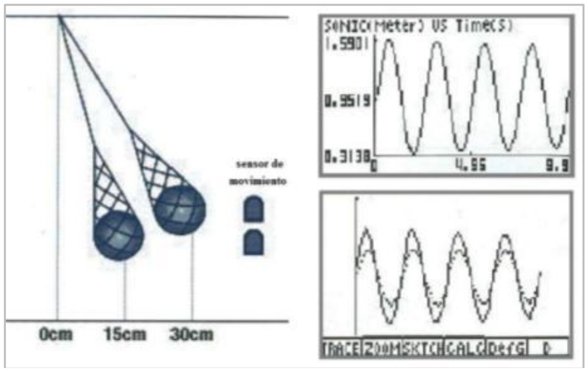


Figura 2. Discutiendo lo acotado

4.4 UNIDAD DE MEDIDA

En una experiencia didáctica, no controlada, con la participación de colegas profesores de varios países de Latinoamérica se discutieron y exploraron algunas de sus concepciones ligadas a ciertas nociones trigonométricas. Dentro de las secuencias trabajadas se presentó la siguiente:

El siguiente calendario mensual muestra el comportamiento de la marea en Puerto Vallarta, México, en junio.

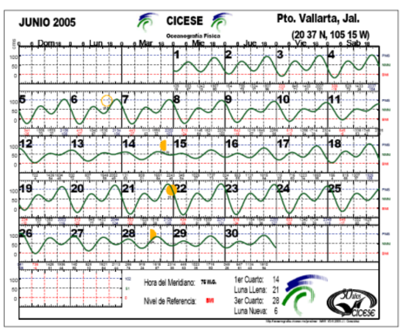


Figura 3

- De acuerdo al calendario, ¿cómo se leen los datos –las alturas-?
- ¿Es posible construir un modelo matemático del fenómeno que se presenta? ¿Porqué? ¿Cómo construiría un modelo matemático?
- ¿Qué medidas tendríamos que tomar para representar el tiempo y las alturas?
- ¿Conoce alguna función que describa este comportamiento?
- ¿Cuál es la unidad de medida de la variable independiente de su modelo?

Junto con el calendario (Figura 3) se proporcionaron los datos que registra el Departamento de Oceanografía Física del Centro de Investigación Científica y de Educación Superior de Ensenada, para discutir sobre la factibilidad de construir un modelo matemático que represente el comportamiento de la marea en Puerto Vallarta, Jalisco, del 1ero al 30 de junio de 2005. Surgieron ideas como:

- recortar cada semana y pegarlas en forma continua (como un electrocardiograma) para ver su comportamiento general,

- definir el modelo en cuatro intervalos para cada periodo (1er cuarto, luna llena, 3er cuarto y luna nueva)

- Determinar el máximo y el mínimo alcanzado en cada periodo, para conocer un posible parámetro de *amplitud* de la función trigonométrica que lo modele.

Al preguntar a los profesores sobre las unidades de medida sólo hubo una respuesta: *tiempo* (variable independiente) y *distancia* (variable dependiente). No hubo siquiera mención de ángulos, todo se centró en el movimiento y las alturas de la marea. El abandono del contexto matemático escolar, que pudiera haber obligado a una discusión sobre grados o radianes, se logró gracias a las condiciones en las que llevamos a cabo esta experiencia; el objetivo no era la resolución en sí misma de los problemas, sino el debate y los consensos.

La hipótesis que planteamos es que el contexto de la situación y el problema que se plantea provocan la identificación de las unidades de medida (tiempo y distancia) y la elección de la herramienta matemática. Evidentemente para quienes no han trabajado con la función trigonométrica, ésta no sería la herramienta inmediata para hacer un modelo, sin embargo, en este momento estamos centrando nuestra atención en aquellos elementos que le dan uso y significado a la funcionalidad trigonométrica. Otro momento será aquel en que se institucionalice la función, con toda la formalidad que demande para convertirse en un concepto matemático, con sus representaciones y propiedades formales.

4.5 DESARROLLO DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL TRIGONOMÉTRICO

Hablamos entonces del *desarrollo de un pensamiento funcional trigonométrico* cuando el que construye conocimiento reconoce, en un *comportamiento* periódico-acotado, una herramienta predictiva. La especificidad de este comportamiento periódico se construye en un contexto de variación, y se distingue de otros comportamientos cuando se reconoce en sus cambios y sus variaciones sucesivas el mismo *tipo* de comportamiento (trigonométrico, acotado y periódico). En este contexto emerge la unidad de medida (radián-real) como necesaria para articular el problema físico con el lenguaje matemático que lo modela.

El carácter social del desarrollo de la funcionalidad trigonométrica nos obliga a reconocer ahora, en el que construye, otros elementos de uso que también contribuyen a su significación. Entre ellos están la oralidad –principalmente con descripciones verbales de los comportamientos que, institucionalmente, se traducen como las propiedades de la función-, la producción pictórica -esquemas de la realidad que se articulan con elementos matemáticos numéricos, geométricos, algebraicos o de otro tipo-, los cálculos aproximados de predicción sustentados en el comportamiento de la gráfica, la negociación y socialización de conocimiento.

5. BREVE DESCRIPCIÓN DE LAS ACTIVIDADES

El conjunto de actividades que trabajaremos en el taller tienen como base los distintos elementos señalados en la sección anterior, siempre en una continua interrelación. Con esa base, proponemos a la modelación y a la graficación como prácticas institucionales: prácticas de referencia que dan un contexto –escolar- al desarrollo del pensamiento funcional trigonométrico.

Así, partimos de favorecer un tránsito continuo entre dichas prácticas (ver figura 4) proponiendo preguntas y actividades que desarrollen aquellos elementos de uso que contribuyen a la significación continua –resignificación- de la funcionalidad trigonométrica.

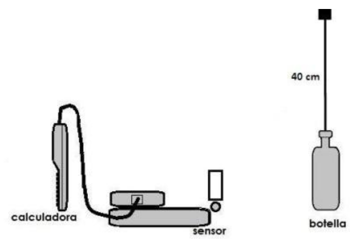


Figura 4. Ejemplo de una de las actividades

1. ¿A qué distancia del sensor se encuentra la botella?
2. ¿Encuentras en la gráfica todos los datos que describen lo que está pasando?
3. Ubica sobre la gráfica los nuevos datos que se obtendrían al configurar la calculadora para hacer la toma cada medio segundo.

6. MÉTODO Y REFLEXIONES FINALES

Si bien el discurso matemático escolar supone como necesaria la secuencia clásica *trigonometría→ círculo trigonométrico→ función trigonométrica*, la investigación desde la perspectiva socioepistemológica nos provee evidencia de la importancia de reconocer el momento epistemológico para desarrollar un pensamiento funcional trigonométrico.

Toda propuesta teórica o didáctica basada en la aproximación socioepistemológica supone un cambio significativo en la visión de enseñar y aprender matemáticas. Podemos hablar ahora del desarrollo del pensamiento matemático y de la construcción de conocimiento a partir de prácticas y no sólo con base en las secuencias lógicas y estructuradas que hasta ahora han sido favorecidas en el tratamiento escolar de los conceptos. En ese sentido hablamos de la funcionalidad trigonométrica y no en estricto sentido de la función y sus estructuraciones formales (representaciones, propiedades y aplicaciones).

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G. y Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras de conocimiento matemático. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 17, 418-422. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Beltrán, M., Montiel, G. y Rodríguez, R. (2012). Desarrollo del pensamiento funcional mediante el uso de gráficas. Memoria del Congreso Internacional sobre la Enseñanza y Aplicación de las Matemáticas. Facultad de Estudios Superiores Cuautitlán, UNAM.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawk, J. y Nicholson, D. (1992). Development of the process concept of function. *Educational Studies in Mathematics 23*(3), 247 – 285.

Montiel, G. y Buendía, G. (2011). Propuesta metodológica para la investigación socioepistemológica. En L. Sosa, R. Rodríguez y E. Aparicio (Eds.), *Memoria de la XIV*

Escuela de Invierno en Matemática Educativa, 443-454. México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A.C.

Buendía, G. y Montiel, G. (2011). From history to research in mathematics education: Socio-epistemological elements for trigonometric functions. Capítulo aceptado en V. Katz & C. Tzanakis (Eds.), *Recent developments on introducing a historical dimension in Mathematics Education*. Mathematical Association of America.

Buendía, G. y Montiel, G. (2009). Acercamiento socioepistemológico a la historia de las funciones trigonométricas. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, Vol. 22, 1287-1296. México, DF: Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. y Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Buendía, G. y Ordoñez, A. (2009) El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 12* (1), 7-28.

Buendía, G. (2006). Una Socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 9 (2), 227-251.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico)*. (Tesis inédita de Doctorado). Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R., Farfán, R. M., Lezama, J. y Martínez, G. (2006). Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Número especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático. L. Radford y D'Amore, B. (Editores invitados), 27 – 46.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R. y Garza, A. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Cordero, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 8(3), 265-286.

De Kee, S., Mura, R. y Dionne J. (1996). La compression des notions de sinus et de cosinus chez des élèves du secondaire. *For the Learning of Mathematics 16*(2), 19 - 22.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1991). *On the reluctance to visualize in mathematics. Visualization in teaching and learning mathematics*. En W. Zimmerman y S. Cunningham (Eds.) MAA Notes 19, 25 –38.

Dubinsky, E. y Harel, G. (Eds.). (1992). *The concept of function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. Notes 25, MAA.

Hitt, F. (1998). Difficulties in the articulation of different representation linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior 17*(1), 123 - 134.

Kilpatrick, J., Hoyles, C., Skovsmose, O. y Valero, P. (2005). Meanings of meaning of mathematics. En J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Skovsmose y P. Valero (Eds.) *Meaning in mathematics education*, 9-16. NY, USA: Springer.

Maldonado, E. (2005). U*n análisis didáctico de la función trigonométrica*. (Tesis inédita de Maestría). Cinvestav-IPN, México.

Mesa, V. y Herbst, P. (2010). Designing representations of trigonometry instruction to study the rationality of community college teaching. *ZDM Mathematics Education*, 1-12.

Miranda, J. (2003). Diseño de levas. En Mecanismos (pp. 98-142)

Molina, J. y Sánchez, M. (2004). Analizando la relación entre el periodo y el tiempo en el movimiento de un péndulo. *Revista C + 1*, 1-4.

Monna, A. (1972). The Concept of Function in the 19th and 20th Centuries, in Particular with Regard to the Discussions between Baire, Bore and Lebesgue. *Archive for History of Exact Sciences 9*, 59 - 84.

Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico. Un estudio socioepistemológico*. México: Ediciones Díaz de Santos.

Tall, D. (1996). Functions and calculus. En A. L. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Netherlands: Kluwer.

Vázquez, R. (2007). *Estudio de lo periódico en diferentes contextos: identificación y uso de la unidad de análisis.* (Tesis inédita de Maestría). Universidad Autónoma de Chiapas, México.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of mathematics education, science and technology 14*(3), 293 – 305.

Vinner, S. (1992). The function Concept as a Prototype for problems in Mathematics Learning. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.) *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (Mathematical Association of America Notes Vol. 25, pp. 195 - 213). USA.

Weber, K. (2005). Student's understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research Journal 7(3*), 91-112.

Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. Arch. Hist. Exact. Sci. 16, 37-85. Traducción tomada de Farfán, R. (Ed.) (1997) Serie: *Antologías*, No. 1, 81-98. Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav – IPN, México.