

TRANSICIÓN ENTRE LA ARITMÉTICA Y EL ÁLGEBRA A TRAVÉS DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA



Alma Rosa Pérez Trujillo, Ana Deysi Pérez Hernández
 almarpt@hotmail.com, anayde2002@hotmail.com
 Universidad Autónoma De Chiapas
 Reporte de investigación
 Básico

Resumen

La transición de la aritmética al álgebra es un paso importante para llegar a ideas más complejas y abstractas dentro de las matemáticas escolares. Sin embargo, en este proceso se presentan diferentes obstáculos, ya que para la mayoría de los alumnos es muy complicado llegar a entender cuestiones algebraicas. En esta investigación se ha puesto en escena una secuencia didáctica diseñada para facilitar esta transición, la investigación se llevó a cabo con estudiantes de primer grado de secundaria.

Palabras clave: *Aritmética, Álgebra, secuencia didáctica.*

1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo estará fundamentado en el marco teórico de la Teoría de Situaciones Didácticas propuesto por Guy Brousseau (2007), además del enfoque de competencias y como metodología empleamos la Ingeniería Didáctica; articulando adecuadamente la teoría con la metodología pudimos responder las preguntas de indagación que hemos planteado y que responden al proceso de transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico.

El desarrollo de la investigación, gira en torno a la problemática que tienen los alumnos al iniciar la secundaria con el uso del álgebra ya que vienen de la primaria con conocimientos aritméticos y empiezan relacionarse y utilizar métodos diferentes para resolver problemas matemáticos. Por consiguiente, para facilitar el cambio, se planteará una secuencia didáctica desde un entorno numérico (aritmético) y llegar a resolver problemas que impliquen la utilización de números y letras (algebraico) permitiendo así adquirir nuevos conocimiento mediante figuras geométricas, ya que es un paso importante para llegar a ideas más complejas y abstractas dentro de las matemáticas escolares. En esta investigación se ha puesto en escena una secuencia didáctica diseñada para facilitar esta transición a estudiantes de entre 11 y 12 años de edad, los cuales están cursando el primer grado de secundaria, de una escuela pública José Emilio Grajales ubicado en Chiapa de Corzo, Chiapas.

En esta investigación se realizó una secuencia didáctica para el nivel básico de secundaria, con la finalidad de generar, adquirir y el uso de las operaciones aritméticas y algebraicas, nuevos conceptos relacionados, facilitando el aprendizaje entre ambas. En la enseñanza escolar de la aritmética los alumnos afrontan con éxito problemas de adicción, sustracción y multiplicación, a través de un amplio conjunto de estrategias pero hay dificultad de aprendizaje en las operaciones algebraicas y se muestra en las investigaciones un alto índice de reprobación. Consideramos que a través de la secuencia didáctica propuesta, se busca que los alumnos desarrollen una forma de pensamiento que les permita expresar situaciones que se presentan en diversos medios socioculturales, así como utilizar las técnicas adecuadas para reconocer, plantear y resolver problemas matemáticos cotidianos y reales, a fin de posibilitar las interrelaciones de los diferentes conceptos que hacen al conocimiento matemático. Por lo anterior, nuestras preguntas

de investigación están enfocadas a investigar ¿Cuáles son los problemas que se presentan en la transición de lo aritmético al algebraico?, ¿Qué características o relaciones de aprendizaje aritmético favorecen la transición al aprendizaje algebraico significativo?, ¿Será posible facilitar la transición entre la aritmética y el álgebra en la adición, sustracción y multiplicación con números enteros a través de una secuencia didáctica? ¿Qué relación encuentran los alumnos entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico?

El objetivo de la investigación en la enseñanza de las matemáticas es realizar una secuencia didáctica, que favorezca la transición de lo aritmético a lo algebraico para alumnos de primer grado de secundaria.

2. MARCO TEÓRICO

Guy Brousseau (2007), propone un modelo a partir del cual pensar la enseñanza como un proceso centrado en la producción de los conocimientos matemáticos en el ambiente escolar. Brousseau retoma la hipótesis central de la epistemología genética de Jean Piaget como un marco para modelizar la producción de conocimientos matemático, se va construyendo esencialmente a partir de reconocer, abordar y resolver problemas que son generados a su vez por otro problema, concibe conocimientos como resultado de la adaptación de un medio.

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje (1986).

Teoría de Situaciones Didácticas es un componente importante en el aprendizaje de un concepto matemático, es tener un problema que posea un cierto contenido didáctico, que le pueda interesar al alumno, y que además este en juego el conocimiento por alcanzar.

El modelo de Guy Brousseau, representa el proceso de producción de conocimientos matemáticos de los estudiantes a partir de dos tipos de interacciones básicas: la interacción de alumno con una problemática que brinda resistencias y retroacciones que utilizan sobre los conocimientos matemáticos situados con los estudiantes, la interacción del docente con el alumno a propósito de la interacción del alumno con la problemática matemática. A partir de ellos postula la necesidad de un medio pensando y sosteniendo con una intencionalidad didáctica. De acuerdo a lo anterior un medio sin interacciones didácticas es insuficiente para inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que el alumno adquiriera, concibiendo no se puede acceder al saber matemático si no se dispone de un medio.

Entonces una situación es didáctica cuando un individuo (generalmente el profesor) tiene la intención de enseñar a otro individuo (generalmente el alumno) un saber matemático dado explícitamente y debe darse en un medio.

En el siguiente apartado abordaremos la metodología que seguimos en la investigación.

3. MÉTODO

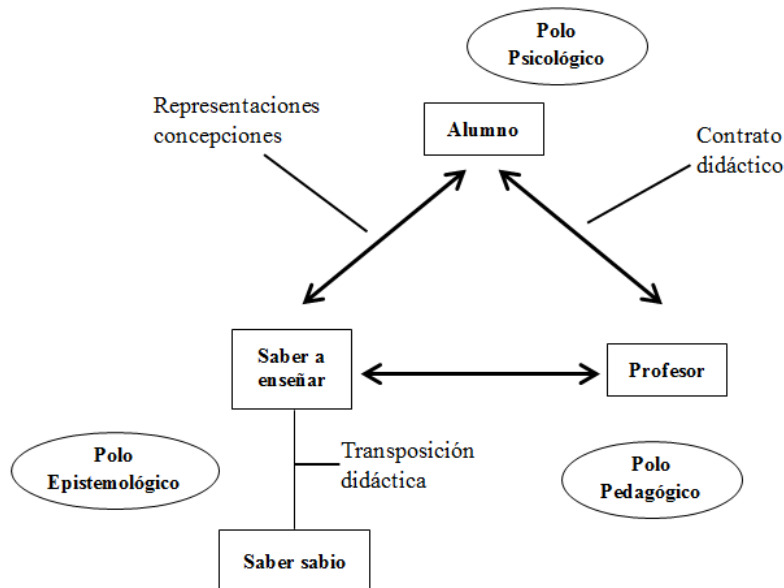
En este trabajo se abordará el estudio de aritmética y álgebra a través de un desarrollo del sentido numérico y pensamiento algebraico, lo cual implica que los alumnos aprendan utilizar los números y las operaciones en distintos contextos, así como tener la posibilidad de modelizar

situaciones y resolverlas, es decir, de expresarlas en lenguaje matemático y algebraico, desarrollar las deducciones necesarias y obtener un resultado que cumpla con las condiciones formadas, los modos de expresión simbólica y pensamiento abstracto que se desarrollan por medio del estudio del álgebra, como son extraer información, comprender procedimientos y saber utilizarlas.

Como mencionamos anteriormente, la metodología empleada en esta investigación es la Ingeniería Didáctica, de acuerdo a Artigue (2005) la Ingeniería didáctica es una forma de trabajo didáctico equiparable el trabajo del ingeniero quien, para realizar un proyecto determinado se basa en los conocimientos científicos de su dominio y acepta someterse a un control de tipo científico. Se utiliza como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje.

Según Douady (1996) el termino ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor.

Para Brousseau (1998), la perspectiva sistémica que considera a la didáctica de las matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto. Como se muestra en el siguiente esquema (ver esquema 1):



Esquema 1. El sistema didáctico (tomada de Brousseau. 1998).

Los conocimientos didácticos se construyen partiendo de problemas que encuentran los profesores en el medio, teniendo en cuenta su experiencia profesional y accesibilidad, con el objetivo de hacer de esa didáctica un verdadero instrumento de desarrollo importante del profesor hacia el alumno un buen aprendizaje. De acuerdo con lo anterior la ingeniería didáctica es un

producto resultante que posibilita un proceso de aprendizaje en el transcurso de interacción entre el profesor y los alumnos donde se ejecuta el producto final, adecuado a la dinámica de la clase. Para llevar a cabo el análisis de las secuencias didácticas recurrimos a la metodología de la ingeniería didáctica de Artigue (2005) que consta de las siguientes fases:

- a) Análisis Preliminar
- b) Diseño de la Secuencia
- c) Análisis a priori
- d) Puesta en escena
- e) Análisis a posteriori
- f) Validación

Siguiendo las fases de la metodología de la ingeniería didáctica, se pretende lograr los objetivos del trabajo de investigación y que el alumno construya conocimientos nuevos que le permitan transitar fácilmente entre el aprendizaje aritmético y algebraico mediante el trabajo con la secuencia didáctica diseñada para tal fin.

Un aspecto relevante es el concerniente a la validación de resultados, que en el caso de la investigación descansa en un asunto interno basado en la confrontación de entre el análisis *a priori* de la situación construida y el análisis *a posteriori* de la misma situación, bajo el principio de que la conducta del estudiante sólo puede ser entendida si ésta es relativa a la situación observada, esta situación y su potencial cognitivo deben ser caracterizados de antemano comparando el análisis *a priori* con lo observado: la validación sólo puede tener lugar si las situaciones que involucran la ingeniería son estrictamente controladas en lo relativo a los contenidos tratados.

La secuencia didáctica que se aplicó a los alumnos, está formada con tablas, números y figuras geométricas donde se observaran como va aumentando la figura geométrica, se hará que completen tablas de sucesiones, además identifiquen las sumas, restas y multiplicación, se realizarán diferentes preguntas sobre las actividades propuestas con la intención que el alumno se vea comprometido a resolver y construir fórmulas para contestar la secuencia. Además, el alumno analizará cuales son los cambios que se va desarrollando en la secuencia y como va observando la transición de lo aritmético a lo algebraico, y así facilitar al alumno una serie de secuencia para el aprendizaje de la transición que el alumno está descubriendo durante el proceso.




Para el diseño se divide en tres actividades, donde se espera que los alumnos construyan y comprendan el proceso de transición, es un paso importante para que los alumnos supere obstáculos que la mayoría de los estudiantes encuentran muy difíciles, en parte, se debe a que este contenido matemático que se enseña por lo general se toma como base el dominio numérico (los símbolos numéricos), recurriendo a dominios matemáticos como la geometría para facilitar la transición. Utilizando las fórmulas sencillas para calcular perímetros, áreas y volúmenes de las figuras, ya que estas fórmulas sólo han sido vistas como abreviaturas de los procedimientos, por lo que los alumnos casi nunca han utilizado las expresiones con literales para simbolizar una relación aritmética o geométrica entre cantidades.

4. RESULTADOS

El análisis de la transición del pensamiento aritmético al algebraico tiene el fin de motivar y despertar el interés en los estudiantes de forma atractiva mediante una secuencia didáctica y lograr un aprendizaje significativo y además ayudar a los alumnos a que se involucren en la actividad, pongan en juego su saber matemático anterior (aritmética) y lleguen a desarrollar correctamente ideas matemáticas nuevas (álgebra) a partir de sus propias experiencias.

Se construyeron sucesiones de números o figuras geométricas a partir de una regla teniendo como objetivo interpretar las literales que aparecen en la formulas aplicándola con números generales, y comprender el cambio que se realiza utilizando variables, simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información.

Para observar el proceso de validación de la secuencia didáctica que han llevado a cabo los alumnos, hemos realizado un ejercicio en el cual se confronta el análisis *a priori* con el análisis *a posteriori*, como resultado de la confrontación el diseño de la secuencia o las hipótesis desprendidas del estudio son revisadas (Artigue, M., et al. 2005) y en este caso son validadas, a fin de facilitar el análisis cada una de las actividades fueron divididas en tres partes, en la siguiente tabla se muestran algunas de las actividades de la secuencia didáctica que hemos diseñado.

Actividades propuestas	<i>A priori</i>	<i>A posteriori</i>	Validación
<p>Actividad 1: Jugando con cuadritos</p> <p>⇒ Alexa y Elisa juegan a formar cuadrados con cuadritos con medida de 1 en cada lado. Alexa construyó los cuadros y los acomoda así:</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">  1 </div> <div style="text-align: center;">  2 </div> <div style="text-align: center;">  3... </div> </div> <ol style="list-style-type: none"> 1. Dibuja los 2 cuadros que siguen: 2. ¿Cuántos cuadritos se necesita para hacer el cuarto cuadrado? 3. ¿Y el quinto? 4. ¿Cuántos cuadritos necesitarías para formar un cuadrado número 10? 	<p>Se pretende que el alumno logre con facilidad la transición de lo aritmético a lo algebraico, tomando como base las sucesiones de números y figuras geométricas</p>	<p>El alumno logró ver que los ejercicios presentan algún patrón de comportamiento en las figuras, encontraron algunos de los términos que dan continuidad a la sucesión.</p>	<p>Todos los alumnos respondieron acertadamente a lo que se les solicitaba, ellos encuentran la progresión geométrica de una forma sencilla. La mayoría de los alumnos inicio la actividad contando los cuadritos ya que las figuras eran pequeñas, después tuvieron que buscar una regla para saber cuantos cuadritos hay y obtener el resultado fácilmente.</p>
	<p>Deberá construir sucesiones de números o figuras geométricas a partir de una regla y comprender el</p>	<p>Todos los alumnos dibujaron los cuadros que se les solicitaba ellos encuentran una progresión</p>	

	cambio que se realiza utilizando variables, simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información.	geométrica, completaron todos los ejercicios correctamente siguiendo patrones numéricos y geométricos.	
5. ¿Qué procedimiento utilizaste para encontrar el número de cuadritos del decimo cuadrado? 6. Compara la regla que obtuviste con las obtenidas por el resto del grupo.	El estudiante deberá establecer relaciones entre las cifras o términos de una operación aritmética para producir o verificar resultados entre los datos que aparecen en las actividades.	Encontraron la regla de la actividad 1 es multiplicar el lado por lado. Desde esta actividad el alumno llamado Rigo alcanza a relacionar letras para encontrar una regla general LxL. En la actividad 2 la regla que explicaron todos fue sumar cada cuadrito de la figura. Para la actividad 3 los alumnos en esta parte todos iniciaron con la  regla de multiplicar la base por la altura y la alumna Carolina llego a expresarlo con variables.	La mayoría de estudiantes alcanzan a estructurar una regla sencilla para dar respuesta a los ejercicios propuestos. Uno de los estudiantes incluso presenta una regla a través de una fórmula.

<p>7. Completa la siguiente tabla con el procedimiento que utilizaste:</p>	<p>El aprendizaje del álgebra para los estudiantes nace de la necesidad de trabajar con números de los cuales desconocen su valor, así que le asignamos variables para poder hacer operaciones como sumas, restas, multiplicaciones, divisiones.</p> <p>El alumno puede desarrollar por medio del estudio del álgebra, cómo poder extraer información de cuadros, tablas y comprender fórmulas y saber utilizarlas.</p> <p>Se pretende que el estudiante llegue a generalizar una regla o fórmula para la solución en una forma sencilla para resolver el problema, lo cual implica el descubrir regularidades utilizando variables.</p>	<p>Construyó y comprendió la sucesiones de números o figuras geométricas a partir de una regla y percibo el cambio que se realiza utilizando variables, simbología y los conceptos matemáticos para interpretar y transmitir información, mucho más útil.</p> <p>El alumno logro llegar a generar una regla para llegar a la solución de las actividades, utilizaron letras para generar la fórmula general sustituyeron la letra por los valores, y llegaron a descubrir la regularidad de las figuras, por ejemplo el alumno Rigo obtuvo la regla utilizado letras:</p> <p>multiplicar $L \times L$</p> <p>Para otro alumno la respuesta lo represento así:</p> $\begin{array}{r} \text{Número de figuras} \times \text{lado} \\ 10 \\ \times 10 \\ \hline 100 \end{array}$	<p>El alumno comprende que operación utilizar pero se le dificulta un poco percibir en que ocasión utilizar las operaciones y en lo general llego a definir y encontrar como aplicar y utilizar las tablas siguiendo los patrones numéricos.</p> <p>Los alumnos contestaron que contar los cuadritos pero para encontrarlo con facilidad sería multiplicar lado por lado.</p> <p>El estudiante desarrollo los conocimientos que trae de la primaria con el cual puede aplicar lo aprendido con enseñanzas nuevas, como la contar, restar, multiplicar y representar una regla general utilizando variables.</p>																																				
<table border="1"> <tr> <th>Número de figuras</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>...</th> <th>50</th> </tr> <tr> <th>Lado del cuadrado</th> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>Número de cuadritos</th> <td>1</td> <td>4</td> <td>9</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <th>Área del cuadrado</th> <td>1</td> <td>4</td> <td>9</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>	Número de figuras	1	2	3	4	5	6	...	50	Lado del cuadrado	1	2	3						Número de cuadritos	1	4	9						Área del cuadrado	1	4	9						<p>8. Explica que tendrías que hacer para encontrar el número de cuadrados que corresponde a la figura n-ésima.</p> <p>9. Escribe una fórmula para el número de cuadrados correspondientes a la n-ésima figura.</p> <p>10. ¿Explica qué relación observas entre el lado del cuadrado y su área?</p>		
Número de figuras	1	2	3	4	5	6	...	50																															
Lado del cuadrado	1	2	3																																				
Número de cuadritos	1	4	9																																				
Área del cuadrado	1	4	9																																				

5. CONCLUSIONES

Al término de la primaria, el alumno tiene conocimientos aritméticos, y un poco de algebraicos, pero no pueden definirlo, como tal, cuando el alumno ingresaba a la secundaria, se inicia con la enseñanza del álgebra lo que implica el pasar de lo aritmético a lo algebraico; inicia con el

manejo de conceptos algebraicos, y posteriormente el alumno conoce como debe aplicarse, sin embargo este tránsito no siempre se logra.

En esta investigación partimos de ese hecho, de acuerdo con lo investigado con la secuencia didáctica propuesta se llegó a la conclusión que a los alumnos se le facilita el aprendizaje mediante construcción de figuras geométricas y tablas con patrones numéricos.

El grupo de alumnos que participo en el estudio de la secuencia didáctica, fue capaz de entender el proceso que necesitaba realizar, con lo cual se facilita el tránsito entre lo aritmético a lo algebraico, el trabajo realizado consistió en percibir patrones y así como de expresar y escribir la regla de este patrón mediante las actividades propuestas, las cuales involucran los patrones numéricos y geométricos.

Los alumnos pudieron detectar semejanzas, diferencias que se hicieron en las figuras y los números así como generalizar operaciones aritméticas partiendo de casos particulares hasta llegar a formular una regla general.

La idea que llegan a concebir los alumnos es que es posible operar con la literal que representa una medida cualquiera, de este modo se inicia también el trabajo con expresiones algebraicas equivalentes. Se puede seguir un proceso similar para otras fórmulas, como las del área del cuadrado y del rectángulo y columnas, y también encontrar el perímetro de las figuras. Por tanto, a través de secuencias didácticas se puede obtener elementos de análisis del tránsito de lo aritmético a lo algebraico con la finalidad de mejorar el aprendizaje de las matemáticas.

6. REFERENCIAS

- Artigue, M. et al. (2005). Ingeniería Didáctica en educación Matemática. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica. pp. 7-23.
- Butto, C.; Rojano, T. (2010). *Pensamiento algebraico temprano: el papel del entorno logo*. Educación Matemática, vol. 22, núm. 3, abril, Santillana. México.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Argentina. Libro de Zorsal. Traducido por Dilma Fregona.
- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Examen Enlace 2011 Educación Básica*. Consultado el 27 de enero de 2012, Pagina web: http://www.enlace.sep.gob.mx/content/gr/docs/2011/ENLACE2011_versionFinalSEP.pdf
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Plan de Estudios Educación Básica 2011*. Consultado el 27 de enero de 2012, Página web: <http://basica.sep.gob.mx/dgdc/sitio/pdf/PlanEdu2011.pdf>
- Secretaría de Educación Pública (2011). *Prueba PISA*. Consultado el 27 de enero de 2012, Página web: <http://www.pisa.sep.gob.mx/>.