

ELEMENTOS DE LA COMBINATORIA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA



Rivera López Martha Iris, Maldonado Mejía Erika Suguey
 caneiris_037@hotmail.com, elikamm@gmail.com
 Universidad Autónoma de Guerrero
 Reporte de Investigación
 Básico

Resumen

El estudio está centrado en dar evidencia de los aprendizajes que logran los niños de la educación primaria acerca de la combinatoria con relación a lo planteado en el plan y programas de estudio, así como los libros de texto. Para ello se identificaron en los programas de estudio y libros de texto los elementos de la combinatoria que se proponen y cómo son desarrollados, a saber estos elementos son: la noción de conjunto, relación, orden y así como las primeras ideas de los principios y técnicas de conteo. Este análisis permitió diseñar el instrumento para obtener información acerca del aprendizaje de los alumnos.

Palabras clave: *Elementos, combinatoria, Educación primaria.*

1. INTRODUCCIÓN

La introducción de la Estadística y Probabilidad en la educación básica es más reciente en comparación con otras áreas de la Matemática, siendo ésta considerada como una de las áreas más difíciles tanto para su enseñanza como para su aprendizaje (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006). Por otro lado, Heitele (1975) propone diez ideas fundamentales de estocásticos, siendo una de ellas la combinatoria, área de nuestro interés.

Las investigaciones sobre el área de la combinatoria son muy escasas a pesar de ser de su suma importancia en el desarrollo del pensamiento formal (Inhelder y Piaget, 1955) así como tema base de la teoría de probabilidad. Algunas investigaciones han reportado que la enseñanza de la teoría combinatoria no es considerada necesaria por muchos profesores de estadística, o bien presentan dificultad para enseñarla de manera comprensiva y duradera, pues no hay suficiente investigación en este campo que oriente a los profesores (Kavousian, 2005), orillándolos a enfatizar en la aplicación de las fórmulas de cada una de las operaciones combinatorias para la resolución de problemas (Roa, 2000; Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006), cuya aportación es insuficiente para su comprensión.

Los resultados de investigaciones, no diseñadas en México, interesadas en el desarrollo del razonamiento combinatorio en la resolución de problemas, evidencian algunas dificultades que se han presentado, particularmente en la resolución y por consecuencia en su aprendizaje (English, 1993; Navarro-Pelayo *et al*, 1996 y Roa, 2000). En México, Salgado y Trigueros (2009) reportan que estudiantes de este país también presentan dificultades en el aprendizaje de la combinatoria. Por ejemplo, estudiantes universitarios presentan confusiones con algunos aspectos necesarios para el uso de los principios y técnicas de conteo en la resolución de problemas, principalmente identificación del conjunto a trabajar y la relevancia del orden en el problema. Por ello consideramos importante mirar qué tanto de combinatoria se plantea en la educación primaria, pues es en el Nivel Básico cuando se inicia el estudio de la estadística y probabilidad.

Como hoy día la enseñanza de la probabilidad y de la estadística se considera para edades tempranas y el pensamiento combinatorio es necesario para comprender la probabilidad (Heitele, 1975; Vecino, 2003), nos hemos interesado en mirar: ¿Qué elementos de la combinatoria son aprendidos en la educación primaria?

Para responder a nuestra pregunta de investigación nos hemos basado en las siguientes preguntas auxiliares:

- ¿Qué elementos de la combinatoria se proponen en los documentos oficiales de la educación primaria, es decir en los planes de estudios y libros de texto?
- ¿Cómo ponen en juego los elementos de la Combinatoria los niños de educación primaria al resolver problemas combinatorios?

Con este estudio se podría dar evidencia del tratamiento que se le está dando a la combinatoria en la educación primaria e identificar aquellos aspectos del aprendizaje de la combinatoria que detienen u obstaculizan su aprendizaje.

2. COMBINATORIA Y SUS ELEMENTOS

El desarrollo del pensamiento probabilístico se apoya directamente en conceptos y procedimientos de la teoría de la probabilidad y de la estadística inferencial, e indirectamente en la estadística descriptiva y la combinatoria (Heitele, 1975; Cañizares, 1997; y Roa, 2000). Es por esto que Heitele (1975) considera a la combinatoria como una idea fundamental estocástica.

La combinatoria se entiende como el estudio de formas de listar, arreglar y organizar elementos de conjuntos discretos de acuerdo con reglas específicas (Cameron, 1994). La combinatoria de una manera muy simple es considerada como una herramienta de cálculo para la Probabilidad. Por ello se requiere que los individuos desarrollen un pensamiento combinatorio que, de acuerdo con Bonilla y Rueda (2011), está vinculado a la relación de diferentes conceptos y procedimientos que aparecen cuando el sujeto se enfrenta a una situación de tipo combinatorio. Es decir, éste es considerado como el que aparece cuando en la solución de una tarea o actividad se utilizan los principios generales y los elementos de la Teoría Combinatoria, dándose tratamiento a las ideas combinatorias presentes.

Respecto a la enseñanza de la teoría combinatoria, Heitele (1975), Fischbein y Gazit (1988, citado por Batanero, Godino y Navarro, 1996) y Sanabria (2010) sugieren que se inicie el trabajo con sus principios (Regla de la suma y la regla del producto) y las técnicas de conteo (Permutación, variación y combinación)¹, considerando como representación icónica el diagrama de árbol, así como apoyo para construir y contar todas las posibles formas de combinar elementos de uno o más conjuntos.

Elementos de la combinatoria

De acuerdo a lo propuesto en algunas investigaciones ya antes citadas así como en los libros oficiales de Estadística y Probabilidad, es posible identificar qué conceptos son principales para la comprensión de la combinatoria, siendo estos denominados como elementos de la combinatoria.

¹ En algunos textos son denominadas también como operaciones combinatorias.

- *Principios de conteo.* En ciertas circunstancias es posible contar todos los posibles resultados de una situación e incluso proporcionarlos explícitamente. Sin embargo, esto no siempre es posible o resulta muy tedioso, siendo así necesario algún método de cálculo que evite que se escriban o dibujen explícitamente todos los posibles resultados, pero que se tenga la seguridad de cuántos son, es decir la cardinalidad del conjunto solución. Dentro de éstos tenemos los principios aditivo y multiplicativo que a continuación se enuncian:

☆ *El principio aditivo* afirma lo siguiente: Si se realiza una actividad que se puede llevar a cabo en k –formas alternativas, donde la alternativa i tiene N_i formas diferentes $i = 1, 2, 3, \dots, k$; entonces el número de formas diferentes en que la actividad puede realizar es $N = N_1 + N_2 + \dots + N_k$. (Carreto, Godínez y Ariza; 2009)

☆ *El Principio Multiplicativo* establece que: Si se realiza una actividad que se puede descomponer en r pasos ordenados, donde el paso i se realiza de M_i formas diferentes $i = 1, 2, 3, \dots, r$; entonces el número de formas diferentes en que la actividad puede realizarse es $M = M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$. (Carreto, Godínez y Ariza; 2009)

Vecino (2003) sugiere que el trabajo de combinatoria en la primaria se introduzca con la construcción de pares, ternas, cuaternas, etc., llevándolos al planteamiento de tablas y diagramas de árbol, como métodos de representación y obtención de todas las posibilidades. Según Heitele (1975), Cañada y Figueiras (2011) el diagrama de árbol es el recurso más próximo hacia la obtención de las técnicas de conteo y su construcción indica un grado de madurez en cuanto al pensamiento utilizado por los niños.

Estos principios conducen a las técnicas de conteo de acuerdo a la influencia del orden o de la repetición e incluso si estos no son considerados.

- *Técnicas de conteo*

☆ *Variaciones:* En lenguaje usual, variar significa: “hacer que una cosa sea diferente en algo de lo que antes era”. De manera formal una variación son los distintos arreglos tomados de k en k , que se pueden formar con los n elementos ($n > k$), de tal forma que en cada arreglo, entren k elementos distintos y que un grupo se diferencie de los demás, bien en alguno de sus elementos o en su orden de colocación. El número de variaciones de n elementos tomados k a la vez es: $V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$

Cuando tenemos el caso en que $k = n$, tenemos el caso de la operación conocida como permutación.

☆ *Permutaciones:* Genéricamente, permutar es: “variar la disposición u orden en que estaban dos o más cosas”. En donde es necesario precisar si estas cosas son o no indistinguibles, para asegurar que la nueva configuración sea en esencia distinta a la anterior. De manera formal una permutación de n elementos es uno de los posibles arreglos que se pueden formar, de tal manera que cada arreglo esté compuesto de los n elementos y difiera de los demás por el orden de colocación de los elementos. El número de permutaciones de n elementos: $p_n = n!$

En ocasiones se desea seleccionar k elementos de entre n , sin que el orden en los arreglos sea importante: este tipo de arreglos es denominado *combinación*.

☆ *Combinaciones*. En lenguaje común, combinar es: “unir cosas diversas, de manera que formen un compuesto”. Al igual que las variaciones y las permutaciones, el concepto de combinación tiene un significado muy concreto en matemáticas: brevemente, número de conjuntos de un determinado número de elementos que se pueden formar con un universo de objetos, sin importar el orden de selección, sino cuáles elementos se toman. Entonces una combinación de n elementos diferentes tomados k a la vez, es un arreglo no ordenado de k de los n elementos, difiriendo entre los distintos arreglos por al menos un elemento que los conforman. El número de combinaciones de n elementos tomados k a la vez es:

$$C_m^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

De lo presentado anteriormente es claro que están en juego otras nociones que deben ser entendidas para la comprensión de los principios y las técnicas de conteo, las cuales serán consideradas como elementos de la combinatoria.

- *Conjunto*. En la educación primaria, la idea de conjunto está asociada a una colección de objetos con una o más características en común. El trabajo en este nivel educativo es la identificación de conjuntos basándose de alguna característica en común que permita la formación de dicho conjunto y la obtención de su cardinalidad. De manera formal un conjunto se puede denotar por abstracción o por extensión:

Notación 1: (Notación de un conjunto por abstracción). $A = \{x \mid P(x)\}$ si y sólo si A es un conjunto cuyos elementos cumplen la proposición $P(x)$ o A es el conjunto vacío.

Notación 2: (Notación de un conjunto por extensión) Se dice que: $A = \{a, b\}$ si y sólo si se cumple que: $(\forall x) \{x \in A \Leftrightarrow (x = a \vee x = b)\} \wedge A$ es un conjunto

De la misma manera se puede denotar $\{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \dots$

- *Relación*. El concepto de relación implica la idea de correspondencia entre los elementos de dos conjuntos o más. Entonces relación se entiende como la correspondencia que hay entre todos o algunos elementos del primer conjunto con uno o más del segundo conjuntos, tal que se formen, productos cartesianos². Una correspondencia entre dos conjuntos es cualquier subconjunto de su producto cartesiano. En la práctica consiste en asignar una pareja o varias a todos o algunos elementos del conjunto.
- *Orden*. Respecto a la idea de orden, se entiende que está en juego la posición de los objetos o de los elementos.

3. MÉTODO

Debido a que nuestro interés es mirar el aprendizaje de los niños de educación primaria, se utilizó como instrumento de investigación un cuestionario, el cual está integrado por una serie de problemas en los que están implícitos algunos de los elementos de la combinatoria. Para analizar

² Un producto cartesiano es el producto de todos los pares ordenados posibles.

las respuestas de los niños, consideramos importante tener presente qué acciones identificaremos en lo que realiza el niño al enfrentarse a cada uno de los problemas, las cuales se formularon a partir de lo propuesto por Bonilla, Rueda (2011), Sanabria (2010), Wilhelmi (2004), siendo las siguientes:

- ✓ *Identificación de conjuntos*: Definir o establecer los objetos y su característica frente a la situación. Al utilizar la etiquetación, entendida como el manejo de letras o números como un objeto, eliminando el significado abstracto de la letra y éste es remplazado por un aspecto mucho más concreto y real que ayudará al sujeto en el establecimiento de todos los arreglos.
- ✓ *Identificación de relaciones*: Identificar las relaciones presentes en la situación así como las que permitirán la construcción de los arreglos. Aludimos a una identificación, ya que en ocasiones a pesar de que se hace referencia a los objetos o elementos de naturaleza similar, a veces la relación les atribuye una característica que los distingue. O bien la idea de orden está presente, la cual dará en sus estudios posteriores información para la aplicación de las fórmulas de las matemáticas.
- ✓ *Obtención de todas las posibilidades*: consiste en iniciar la construcción de todos los diferentes arreglos que se puedan formar a partir de diferentes métodos como son: la construcción de los objetos, donde el sujeto trata básicamente de realizar los dibujos de las representaciones de los elementos a combinar; listado de las posibilidades, descritas y explicitando caso por caso; la construcción de tablas que permitan conocer todas las posibilidades; la utilización de los diagramas de árbol o tener indicios de que se utiliza algún principio o técnica de conteo.
- ✓ *Conteo sistemático o al tanteo*. A través de cualquier método para la obtención de todas las posibilidades se puede percibir si su conteo es sistemático, el cual es considerado así si en las construcciones que realiza el niño es posible mirar o identificar algún patrón que le permita generar todas las posibilidades, si no es así, será considerado como conteo al tanteo.

Las acciones que permitieron el desarrollo de esta investigación:

- ✓ *Revisión de los materiales oficiales de la SEP³ que orientan o instrumentan la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Primaria*, como son los Planes y programas de estudio (SEP, 2011) y los Libros de Texto (SEP, 2011), para identificar qué aspectos de la combinatoria se proponen y cómo estos se plantean trabajar. Los criterios en la revisión de los libros de texto son adaptados de Vázquez (2004): situación planteada, elementos de la combinatoria, recursos para organizar y tratar la información, términos utilizados y estructura de la lección.
- ✓ *Elaboración del cuestionario*. El cuestionario se diseñó a partir de los elementos identificados en la revisión de los programas de estudio y los libros de texto. Éste está compuesto por 5 problemas, en donde están en juego los principios y las técnicas de conteo. En este caso tenemos dos problemas que inducen al principio multiplicativo, y uno por cada técnica de conteo (variación, permutación y de combinación).
- ✓ *Análisis de resultados*. Se examinó cómo resolvieron los problemas los alumnos y esto se contrastó con lo planteado en los documentos oficiales de la educación primaria.

³ Secretaría de Educación Pública (SEP).

4. RESULTADOS

En la Revisión de los materiales oficiales de la SEP (2011) que orientan o instrumentan la enseñanza de las matemáticas en la educación Primaria, como los Planes y programas de estudio así como los Libros de Texto, se identificó que las nociones propuestas a desarrollar son: La noción de conjunto, relación, orden y combinaciones, mientras que los principios aditivo y multiplicativo, la permutación y variación no son resaltados de manera explícita en los programas, sin embargo están contemplados dentro de algunos contenidos.

De primer a tercer grado se tiene que los elementos a enseñar son: Conjunto, relaciones, principio multiplicativo (asociado a la multiplicación).

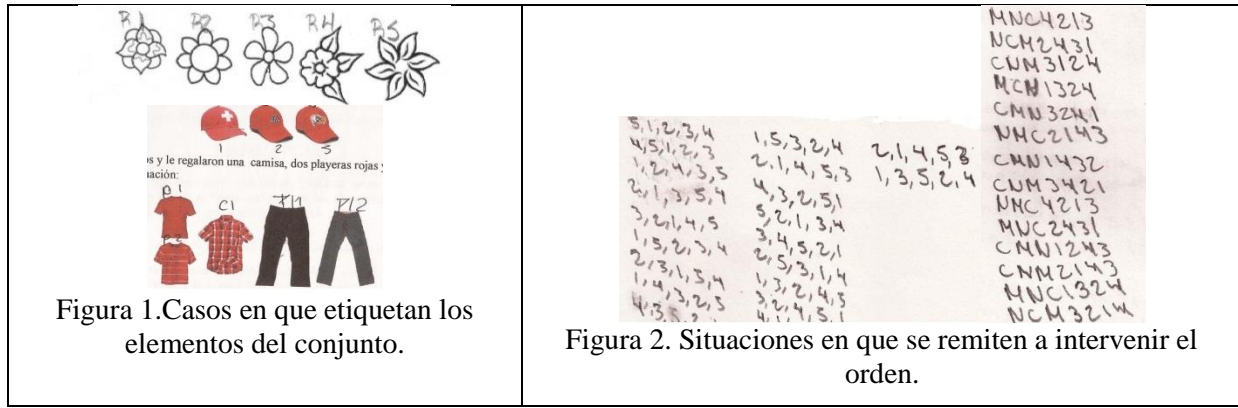
De cuarto a sexto grado de manera explícita se señala la enseñanza de permutaciones y combinaciones y algunos problemas están relacionados con la variación sin embargo en este nivel educativo no se explicita.

El cuestionario final se aplicó a un grupo 30 alumnos de sexto año de primaria. La característica de este grupo es que es uno de los que obtuvieron mayor puntaje en la prueba ENLACE⁴ 2011 en Chilpancingo de los Bravo, Guerrero. Se considera que son más aptos para brindar más información acerca de los aprendizajes alcanzados en la educación primaria.

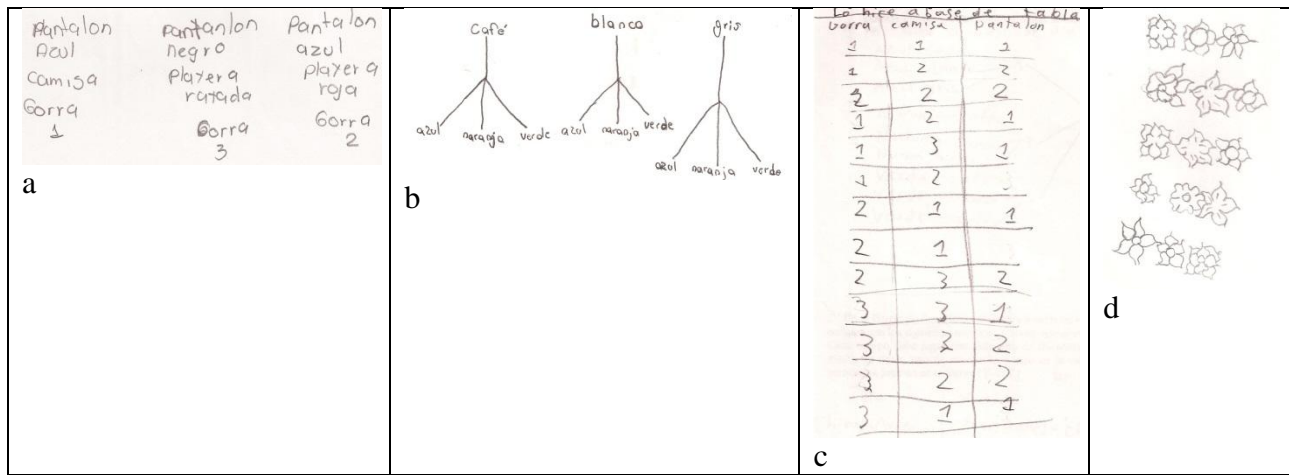
Del análisis de las respuestas dadas en el cuestionario por los estudiantes se encontró que:

- a) En la identificación de conjuntos, es escaso el proceso de la etiquetación, el 60% de los niños recurren a ella sólo en los casos en donde no reconocen la naturaleza e identidad de los objetos o cuando el nombre asignado a éstos corresponde a más de dos palabras (Figura 1).
- b) En la identificación de relaciones, siendo la relación de orden y subconjunto del conjunto dado. Respecto con la intervención del orden les es más difícil identificarlo, sólo recurren a variar la posición de los elementos del conjunto (sin importar que sea una permutación o una combinación). Por ejemplo, en un problema se les daban cinco flores distintas y se les pidió la formación de ramos de tres flores distintas, en otras palabras se les pidió la obtención de los subconjuntos de cardinalidad tres del conjunto, en donde el niño sólo se remitió a cambiar el orden de las flores dadas (Figura 2), un 20% de los niños identifican las dos relaciones. En el problema de permutación se les planteó el diseño de placas compuestas por letras y números pero sólo deberían variar las terminaciones, pero al no identificar el conjunto a trabajar, un 40% de los niños varían todos sus elementos (Figura 2).

⁴ La Evaluación Nacional de Logro Académico en Centros Escolares (ENLACE), permite reunir información muy valiosa para identificar los aprendizajes que las alumnas y alumnos han construido con el apoyo de los docentes, lo mismo que para detectar aquellos que se les dificultan.



c) En la obtención de todas las posibilidades, un 80% de los niños utilizan el listado de las posibilidades, el resto presenta indicios de la construcción de un diagrama de árbol la construcción de tablas. Fue notable el escaso uso de los dibujos gráficos de los elementos de los conjuntos y de las posibilidades (Figura 3).



d) El conteo utilizado en los problemas, un 60% lo realizan al tanteo, especialmente en los problemas de combinación y permutación (Figura 2), y cuando se trata de trabajar con dos conjuntos o más, fijan elementos y buscan un patrón que les permite llevar una sistematicidad (Figura 3b) y agotar casos, mientras que otros se resisten a remplazar elementos y se quedan solo con una correspondencia univoca (Figura 3a).

5. CONCLUSIONES

De acuerdo a lo planteado en los libros de texto, los elementos a enseñar en la educación primaria son conjuntos, relaciones, cardinalidad, ideas del uso del principio aditivo y multiplicativo, así como de las técnicas de conteo: variación, permutación y combinación. Para las técnicas de conteo el término utilizado para aludir a ellas en los problemas es el de combinaciones, y son utilizadas para conjuntos con un número pequeño de elementos. La permutación es la única técnica que es presentada como noción a enseñar, así como el método para obtener todas las permutaciones. Es nula la presentación de métodos para la obtención de todas las diferentes formas de agrupaciones. En comparación con lo encontrado en los cuestionarios, los niños

presentan dificultad para identificar las relaciones y los conjuntos implícitos en cada uno de los problemas planteados. La etiquetación es un proceso escasamente utilizado por los niños, pero también en los libros de texto es insuficiente la importancia que se le da. Las representaciones más utilizadas y requeridas por los libros de texto son el listado de todos los posibles resultados y la construcción de tablas. La construcción de diagramas de árbol no es mencionado explícitamente ni presenta ejemplos de éste. De manera general tanto en los libros como en los niños el conteo utilizado en su mayoría es al tanteo.

Respecto con las técnicas de conteo, tenemos que a pesar de que son tratadas en el libro de texto, no son evidentes las diferencias entre una combinación y una permutación, es decir, no se resalta la idea de orden, característica principal que conduce a dificultades más adelante. En la educación primaria hay indicios de elementos de la combinatoria, tal que su planteamiento presentado se ve reflejado en las acciones realizadas por los niños, por lo que queda en el aire un estudio más minucioso de cada aspecto planteado de la combinatoria en los libros de texto, así como de los conocimientos que tenga el profesor al respecto.

6. REFERENCIAS

- Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematic*. 32, 181-199. Recuperado el 25 de octubre de 2011 de <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/Implicitmodel.htm>.
- Bonilla, D. y Rueda, M (2011). *Niveles de razonamiento combinatorio que demuestran estudiantes universitarios*. Recuperado el 20 mayo de 2012 de http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/1272/994
- Cameron, P. (1994). *Combinatorics: Topics, techniques, algorithms*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Cañizares, M. (1997). *Influencia del Razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Departamento de didáctica de las Matemáticas. Granada. Recuperada el 19 de Agosto de 2011 de <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/tesis/CANIZARE.pdf>
- Carreto, R., Godínez, F. y Ariza, F. (2009). *Introducción a la Teoría de la Probabilidad*. Universidad Autónoma de Guerrero. México.
- English, L. (1993). "Children's Strategies for Solving Two- and Three- Dimensional Combinatorial Problems". *Journal for Research in Mathematics Education*. 24(3), 255-273. Recuperado el 20 de Julio de 2011 de <http://eprints.qut.edu.au/18047/2/18047.pdf>
- Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 187-205.
- Inhelder, B. y Piaget, J. (1955). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente*. Barcelona: Paidós.
- Kavousian S. (2005). The development of combinatorial thinking in undergraduate students *Proceedings of the 27th Annual Meeting of PME-NA, Virginia Tech*, Recuperado el 5 de Noviembre de 2011 de http://filebox.vt.edu/users/lloyd/pmena2005/short_orals/so_kavousian.pdf
- Navarro-Pelayo, V., Batanero, C. y Godino, J. (1996). Razonamiento Combinatorio en Alumnos De Secundaria. *Educación Matemática*. 8(1), 26-39. Recuperado el 15 de Febrero de 2011 de <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/RAZON.htm>.

- Salgado, H., Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática*. 21 (1), 91-117. Recuperado el 20 de Mayo de 2011 de <http://redalyc.uaemex.mx/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=40516761005>
- Sanabria, G. (2010). Una propuesta para la enseñanza de los Elementos de Análisis Combinatorio. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*. Recuperado el 25 de Agosto de 2011 de <http://es.scribd.com/doc/56113306/palomar>
- Serradó, A; Azcárate, P; Cardeñoso J, (2006). La caracterización escolar de la noción de probabilidad en libros de texto de la ESO. *Revista de Investigación e Innovación Educativa del Instituto Universitario de Ciencias de la Educación. Tarbiya*. 38, 91-112. Recuperado el 30 de Agosto de 2011 de <http://web.uam.es/servicios/apoyodocencia/ice/tarbiya/tarbiya/38/38.html>
- Roa, F. (2000). *Razonamiento combinatorio en estudiantes con preparación matemática avanzada*. Tesis Doctoral de la Universidad de Granada, Granada, España. Recuperada el 18 de Febrero de 2011 de <http://www.ugr.es/~batanero/ARTICULOS/TesisRoa.pdf>
- Vázquez, O. (2004). *Enseñanza y Comprensión del enfoque clásico de la probabilidad en primer grado de Secundaria*. Tesis de Maestría no Publicada. CINVESTAV, IPN. México.